Introduction au domaine de Recherche : Gradients de Heegaard, surfaces incompressibles et variétés de dimension 3 virtuellement fibrées sur le cercle.

Claire Renard, sous la direction de Michel Boileau.

15 octobre 2008

Table des matières

Introduction

La topologie et la géométrie en dimension 3 constituent un domaine qui a beaucoup progressé ces dernières années, notamment grâce aux travaux de Thurston, Hamilton, Perelman et bien d'autres qui ont mené à la démonstration de la conjecture de géométrisation de Thurston.

Une variété M de dimension 3, connexe, compacte, à bord éventuellement vide et orientable, est dite **irréductible** si toute sphère $\mathbb{S}^2$ proprement plongée dans M borde une boule $\mathbb{B}^3$ dans la variété M. Sinon, on dit que la variété M est **réductible**. Une sphère proprement plongée ne bordant aucune boule de M est dite **essentielle**. En découpant le long de sphères essentielles, une variété réductible peut être décomposée en la somme connexe de variétés irréductibles et de variétés homéomorphes à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Quitte à réordonner les facteurs, une telle décomposition est unique à homéomorphisme près. Il est aussi à noter qu'en dimension trois, les catégories continue, linéaire par morceaux et lisse sont équivalentes (c'est un résultat dû à Moise [Moi]).

Une variété M est dite **hyperbolique** si l'intérieur de M peut être muni d'une métrique riemannienne complète de courbure sectionnelle constante égale à -1. Une variété de dimension 3 est une **variété graphée** s'il existe une famille finie de tores plongés et disjoints $\{T_1, \ldots, T_n\}$ telle que toute composante de la variété obtenue en découpant M le long de ces tores est un fibré en cercles $\mathbb{S}^1$. Une surface F proprement plongée dans une variété M de dimension trois est dite **incompressible** si F est connexe, compacte, orientable, non parallèle au bord de M, et le groupe fondamental de F s'injecte dans celui de M. D'après le lemme de Dehn (voir par exemple [Hat2, Corollaire 3.2 p. 48]), ceci revient à dire que le bord de tout disque D plongé dans M intersectant la surface F transversalement et vérifiant $D \cap F = \partial D$ borde un disque D' de F.

Avec ces définitions, nous pouvons énoncer ce qui est désormais nommé le théorème de géométrisation de Perelman.

Théorème 0.1 (Géométrisation). *Toute variété M de dimension 3, connexe, compacte, orientable et irréductible peut être scindée le long d'une famille finie $\{T_1, \ldots, T_n\}$ de tores incompressibles, non parallèles au bord de M et deux à deux non parallèles, de telle sorte que chaque morceau est soit hyperbolique, soit une variété graphée.*

Pour plus de précisions, nous renvoyons par exemple à [Sco], [Thu1, notamment le paragraphe 3.8 p. 179], [Boi] et [BMP, paragraphe 1.1 p. 5]. Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons aux articles de Perelman [Per1], [Per2] et [Per3], ainsi qu'aux références [KL], [MT] et [BBBMP].

Ce résultat a des corollaires importants. Le plus remarquable est la réponse affirmative à la conjecture de Poincaré, mais on peut également noter la démonstration de la conjecture de Borel en dimension trois. Cette conjecture stipule qu'une variété de dimension trois, connexe, compacte, sans bord et **asphérique** (c'est à dire dont le deuxième et troisième groupe d'homotopie sont triviaux) est uniquement déterminée par son type d'homotopie, à difféomorphisme près. De plus, le théorème de géométrisation a permis d'établir que si le groupe fondamental de la variété M est infini, alors cette variété admet une infinité de revêtements finis, et en fait son groupe fondamental est résiduellement fini [Hem1].

Cependant, d'autres propriétés importantes ne découlent pas du théorème de géométrisation et un certain nombre de questions difficiles restent ouvertes.

Une de ces questions est liée aux variétés de Haken. Une variété M de dimension 3 connexe, compacte, orientable et irréductible est dite **de Haken** si elle contient une surface incompressible.

Il existe des exemples de variétés de dimension trois de groupe fondamental infini qui ne sont pas de Haken. Mais comme une telle variété M admet beaucoup de revêtements finis, on peut espérer qu'un de ses revêtements finis soit, lui, de Haken. On dit alors que la variété M est **virtuellement de Haken**. Les variétés virtuellement de Haken font l'objet d'une conjecture, due à Waldhausen [Wald].

Conjecture 1 (de Waldhausen). *Toute variété de dimension 3, connexe, compacte, orientable et irréductible possède un revêtement fini $M' \to M$ pour lequel M' contient une surface incompressible (donc M est virtuellement de Haken).*

Le théorème 0.1 de géométrisation implique en particulier que la conjecture de Waldhausen reste ouverte uniquement pour les variétés hyperboliques sans bord. C'est pourquoi nous nous restreindrons souvent à ce cas.

On dispose d'un critère homologique pour déterminer si une variété M de dimension trois est de Haken. On définit le **premier nombre de Betti** $b_1(M)$ comme le rang du premier groupe d'homologie de M à coefficients entiers $H_1(M, \mathbb{Z})$. Si le premier nombre de Betti $b_1(M)$ est strictement positif, alors la variété M contient une surface incompressible (voir par exemple [Jac, Théorème III.10 p. 35] ou [Hem, Lemme 6.6 p. 62]). Ainsi, si la variété M possède un revêtement dont le premier nombre de Betti est non nul, alors M est virtuellement de Haken. Cela nous amène à énoncer la conjecture plus forte qui suit (voir par exemple [Thu2, question 17 du paragraphe 6]).

Conjecture 2 (du premier nombre de Betti virtuellement non nul). *Toute variété M de dimension 3 connexe, compacte, orientable, irréductible et de groupe fondamental infini possède un revêtement fini $M' \to M$ dont le premier nombre de Betti est non nul (i.e* rang $H^1(M', \mathbb{Z}) = b_1 > 0$*).*

Avec le théorème de géométrisation, cette conjecture elle-aussi n'est ouverte que dans le cas hyperbolique sans bord. Dunfield et Thurston ont vérifié cette conjecture sur 10 986 variétés hyperboliques compactes sans bord [DuTh].

Dans le cas où le bord de M est non vide ou pour les variétés autres qu'hyperboliques, on peut en fait trouver un revêtement fini de M dont le premier nombre de Betti est arbitrairement grand. Ce résultat conduit à une conjecture plus forte :

Conjecture 3 (du nombre de Betti virtuellement infini). *Soit M une variété hyperbolique de dimension 3, compacte, sans bord, connexe et orientable. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un revêtement fini $M' \to M$ dont le premier nombre de Betti est plus grand que n : $b_1(M') \geq n$.*

D'autre part, si une variété de dimension trois fibre sur le cercle $\mathbb{S}^1$, alors son premier nombre de Betti est non nul et elle est a fortiori de Haken. Ainsi, si une variété M de dimension trois possède un revêtement fini fibré sur le cercle, M vérifie les conjectures de Waldhausen et du premier nombre de Betti virtuellement non nul. On dit qu'une variété qui admet un revêtement fini fibré sur le cercle est **virtuellement fibrée**. C'est le cas des variétés graphées dont le bord est non vide. Par contre, il existe des exemples de variétés graphées qui ne fibrent pas virtuellement sur le cercle. On ne sait pas non plus démontrer qu'une variété fibrant sur le cercle vérifie la conjecture du premier nombre de Betti virtuellement infini.

Pour les variétés hyperboliques, Thurston a proposé la conjecture suivante [Thu2, question 17 du paragraphe 6] :

Conjecture 4 (de Thurston). *Toute variété hyperbolique de dimension 3 connexe, orientable, complète et de volume fini est virtuellement fibrée sur le cercle, i.e. elle possède un revêtement fini $M' \to M$ où M' est une fibration sur le cercle $\mathbb{S}^1$ (de fibre une surface).*

La difficulté de cette conjecture réside en partie dans le fait qu'il n'existe que des critères suffisants permettant de conclure qu'une variété de dimension 3 est fibrée sur le cercle ([Lac2004], [Mah] et [Agol]). De plus, ceux-ci sont peu nombreux et souvent délicats à mettre en oeuvre en pratique. Pour toutes les conjectures précédentes, il est en général difficile de savoir a priori quel type de revêtement considérer parmi tous les revêtements finis de la variété.

Pour avancer vers la résolution de ces conjectures, plusieurs approches sont possibles, et souvent liées : on peut utiliser d'une part des outils de géométrie et de topologie de dimension trois, d'autre part des méthodes plus algébriques venant de la théorie des groupes et de la théorie des graphes.

1 Approche topologique et géométrique.

1.1 Scindements de Heegaard.

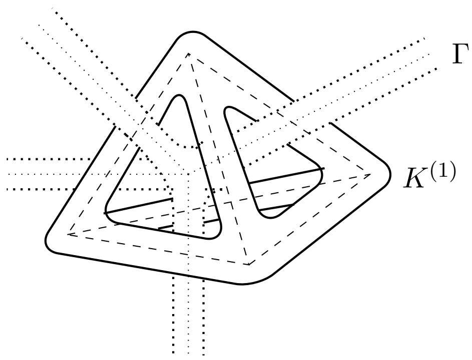
Afin de trouver une éventuelle surface incompressible dans une variété M de dimension trois compacte, connexe et orientable, une approche peut consister à partir d'une surface qui existe dans toute variété de dimension trois et à la modifier dans des revêtements pour la rendre incompressible. Un candidat possible pour une telle surface est de considérer une surface de Heegaard.

Soit g un entier naturel. Un **corps à g anses**, ou **bretzel de genre g**, est le voisinage régulier d'un graphe connexe de caractéristique d'Euler égale à $1-g$. Le bord de ce bretzel est une surface F connexe, compacte, sans bord, orientable et de genre g.

Soit M une variété de dimension 3 compacte, connexe, orientable et sans bord. Un **scindement de Heegaard** de M est une décomposition de la variété M en deux corps à anses H_0 et H_1 de même genre $g \in \mathbb{N}$, recollés par un homéomorphisme de leur bord. L'entier g est appelé le **genre** du scindement de Heegaard. La surface F est une **surface de Heegaard** de M. On note ce scindement $M = H_0 \cup_F H_1$. Il existe une théorie analogue dans le cas où M est une variété de dimension 3 compacte, connexe, orientable et de bord non vide.

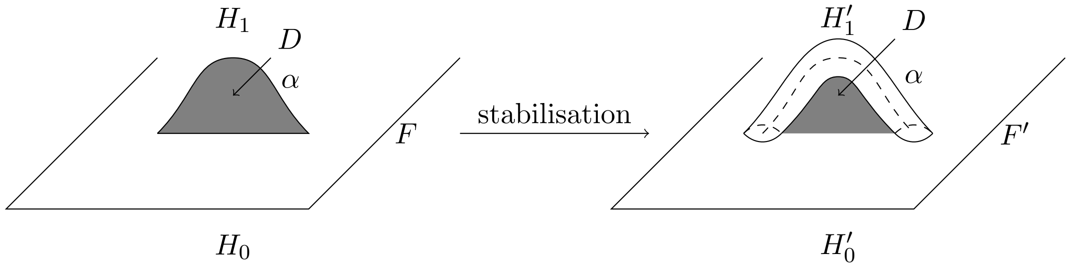
Deux scindements de Heegaard sont **isotopes** si les surfaces de Heegaard correspondantes sont isotopes dans la variété M. Ils sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de M envoyant la première surface de Heegaard sur la seconde. Si H est un corps à anses, un **disque méridien** pour H est un disque D proprement plongé dans H (donc transverse au bord de H et tel que $D \cap H = \partial D \subset \partial H$), tel que ∂D est une courbe essentielle dans ∂H (i.e. d'homotopie non triviale).

Toute variété M de dimension 3 compacte et orientable admet un scindement de Heegaard. Ce résultat découle immédiatement de l'existence d'une décomposition en anses de M où les anses sont attachées par ordre croissant d'indice. On peut aussi construire un scindement de Heegaard de M à partir d'une triangulation. Supposons pour simplifier que la variété M soit de dimension 3, connexe, compacte et sans bord. D'après Moise [Moi], il existe une triangulation K de M. Soit $K^{(1)}$ le 1-squelette de cette triangulation et Γ le 1-squelette dual. Les sommets de Γ correspondent aux centres de gravité des 3-simplexes (qui sont des tétraèdres) et les arêtes sont en correspondance avec les 2-simplexes de K (les faces, qui sont des triangles). L'espace entre $K^{(1)}$ et Γ dans M peut alors être muni d'une structure produit. Ainsi, en "épaississant" ces deux graphes, on peut faire en sorte que les bords de voisinages réguliers de $K^{(1)}$ et de Γ dans M coïncident. Cette surface commune est alors une surface de Heegaard et chacun de ces voisinages réguliers de graphes est un corps à anses. On a ainsi obtenu un scindement de Heegaard de la variété M à partir d'une triangulation.



Soit M une variété de dimension 3 connexe, compacte et orientable, et $H_0 \cup_F H_1$ un scindement de Heegaard de genre g de M. Il est assez facile de construire un scindement de Heegaard de M de genre $g+1$ à partir de $H_0 \cup_F H_1$ par une opération de **stabilisation** comme suit.

Soit α un arc proprement plongé dans H_1, avec ses deux extrémités dans $\partial H_1 \cong F$ et tel qu'il existe un disque D plongé dans H_1 dont le bord est la réunion de α et d'un arc de ∂H_1. On peut alors rajouter à H_0 un voisinage régulier de α, qu'on enlève à H_1. On obtient ainsi un nouveau scindement de Heegaard de M, de genre $g+1$, obtenu à partir du scindement $H_0 \cup_F H_1$ par **stabilisation**. On remarque que deux scindements obtenus à partir de $H_0 \cup_F H_1$ par une stabilisation sont isotopes.



Par contre, deux scindements isotopes après stabilisation n'étaient pas forcément isotopes au départ. En fait, on a même le théorème suivant :

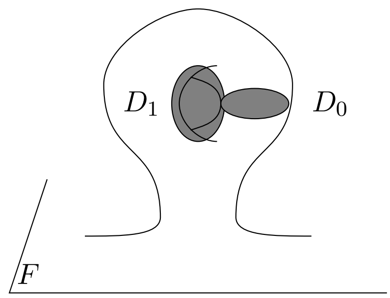
Théorème 1.1 (Reidemeister-Singer). *Soit M une variété de dimension 3 compacte, connexe, sans bord et orientable.*

Soient $H_0 \cup_F H_1$ et $H_0' \cup_{F'} H_1'$ deux scindements de Heegaard de M. Alors il existe deux entiers n et p tels que le scindement obtenu à partir de $H_0 \cup_F H_1$ en effectuant n stabilisations et le scindement obtenu à partir de $H_0' \cup_{F'} H_1'$ en effectuant p stabilisations soient isotopes.

Ainsi, stabiliser un scindement de Heegaard fait perdre de l'information. La question naturelle qui se pose alors est la suivante : dans quel cas un scindement de Heegaard provient-il d'une stabilisation d'un scindement plus simple, i.e. dans quel cas un scindement de Heegaard peut-il être **déstabilisé** ?

Lemme 1.2. *Soit M une variété de dimension 3 connexe, compacte et orientable.*

Un scindement de Heegaard $H_0 \cup_F H_1$ de M peut être déstabilisé si et seulement s'il existe deux disques D_0 et D_1 proprement plongés respectivement dans H_0 et H_1 et s'intersectant en un unique point.

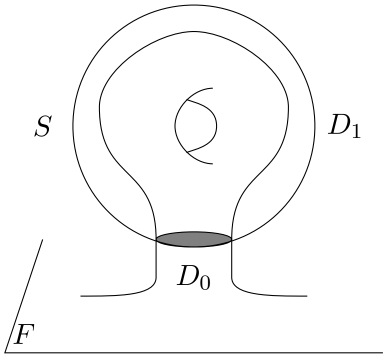


Scindement de Heegaard pouvant être déstabilisé.

On a la définition suivante :

Définition 1.3. *Soit M une variété de dimension 3 connexe, compacte et orientable, et un scindement de Heegaard $H_0 \cup_F H_1$ de M. Ce scindement est dit* ***réductible*** *s'il existe deux disques méridiens D_0 et D_1 proprement plongés respectivement dans H_0 et H_1 tels que leurs bords coïncident : $\partial D_0 = \partial D_1 \subset F$ est un cercle essentiel de F.*

Un scindement de Heegaard qui n'est pas réductible est dit ***irréductible****.*



Scindement de Heegaard réductible.

Cette définition revient à dire que si le scindement de Heegaard est réductible, alors il existe une sphère S (qui est l'union des deux disques précédents) intersectant F en un unique cercle essentiel.

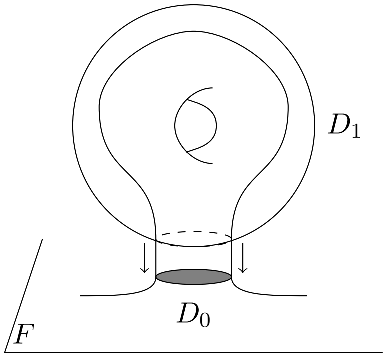
Même si les définitions semblent différer, dans le cas où la variété M est irréductible et différente d'une sphère ou de l'adhérence d'une sphère trouée, un scindement de Heegaard est réductible si et seulement s'il peut être déstabilisé. L'idée est qu'alors un scindement de Heegaard réductible peut être déstabilisé en un scindement de genre strictement plus petit, donc simplifié.

Définition 1.4. *Un scindement de Heegaard $H_0 \cup_F H_1$ de M est dit **faiblement réductible** s'il existe deux disques méridiens D_0 de H_0 et D_1 de H_1 dont les bords sont disjoints : $\partial D_0 \cap \partial D_1 = \emptyset$.*

*Un scindement de Heegaard qui n'est pas faiblement réductible est dit **fortement irréductible**.*

Remarque 1.5. *Tout scindement de Heegaard réductible est faiblement réductible.*

En effet, soit un scindement de Heegaard réductible $M = H_0 \cup_F H_1$ et deux disques méridiens D_0 de H_0, D_1 de H_1 dont les bords coïncident : $\partial D_0 = \partial D_1$. On peut toujours éloigner un peu le bord de D_0 dans F pour le disjoindre du bord de D_1 et obtenir ainsi deux disques méridiens montrant que le scindement est faiblement réductible.



Scindement de Heegaard réductible, donc faiblement réductible.

Une surface de Heegaard est par définition hautement compressible. Cependant, un résultat dû à Casson et Gordon (voir par exemple [CaGo, Théorème 3.1 p. 280], ou [Scha, Théorème 3.11 p.932]) montre comment l'on peut utiliser les scindements de Heegaard pour construire une éventuelle surface incompressible dans la variété M.

Théorème 1.6. *Soit M une variété de dimension 3 compacte, connexe et orientable, et un scindement de Heegaard $H_0 \cup_F H_1$ de M irréductible, mais faiblement réductible. Alors la variété M contient une surface incompressible.*

Ce théorème donne une piste pour résoudre la conjecture sur les variétés virtuellement de Haken : il suffit d'arriver à construire un scindement de Heegaard d'un revêtement fini $M_i \to M$

qui soit irréductible mais faiblement réductible. Cette approche n'est pas sans espoir car on sait [Lac2006, Proposition 3.1 p. 338] qu'en prenant l'image réciproque d'une surface de Heegaard fortement irréductible dans un revêtement fini de degré suffisamment grand, on obtient une surface de Heegaard faiblement réductible. Cependant, cette surface est génériquement réductible.

Le résultat suivant de Pitts et Rubinstein (voir [PiRu], [FrHa, Théorème 2.4 p. 533] et [Sou, Théorème 3.6 p.18]) permet de relier la notion de scindement de Heegaard fortement irréductible aux surfaces minimales. Une surface de Heegaard fortement irréductible dans une variété hyperbolique M de dimension trois, connexe, compacte, sans bord et orientable est isotope à une surface minimale, ou au bord d'un voisinage produit d'une surface minimale non orientable plongée dans M, avec un tube attaché verticalement dans la structure de I-fibré induite sur ce voisinage régulier.

De façon analogue, les travaux de Freedman, Hass, Scott [FHS], Meeks, Simons, Schoen et Yau ([MSY, Théorème principal p. 127] et [SY, Théorème 5.1 p. 610]) ont montré que toute surface incompressible orientable, connexe et proprement plongée dans une variété hyperbolique M de dimension trois, connexe, compacte et orientable est isotope à une surface minimale ou au revêtement double d'une surface minimale non orientable. De plus, après l'isotopie, deux telles surfaces sont soit égales, soit disjointes.

Les surfaces de Heegaard partagent ainsi avec les surfaces incompressibles des propriétés liées aux surfaces minimales. En particulier, on peut utiliser des outils de géométrie riemannienne et la théorie des surfaces minimales pour contrôler la géométrie de ces surfaces. Par exemple, Lackenby [Lac2006, Proposition 6.1 p. 347] majore le diamètre de la surface minimale représentant une surface de Heegaard F fortement irréductible dans une variété hyperbolique M par $c\,|\chi(F)|$, où c est une constante strictement positive ne dépendant que du rayon d'injectivité de M. De plus, on peut prendre la même constante c dans tous les revêtements finis de M, et cette majoration peut être ainsi utilisée pour établir des réultats de fibration virtuelle ([Lac2004], [Mah] et [Agol]).

1.2 Quelques résultats de Lackenby.

1.2.1 Gradients de Heegaard.

L'objet de mon mémoire de M2 était d'étudier l'article de Lackenby [Lac2006]. Ces résultats, complétés par ceux d'un autre article [Lac2004], conduisent à un certain nombre de conjectures qui permettraient de résoudre la conjecture de Waldhausen.

Comme on l'a dit, une des difficultés majeures de cette conjecture est de trouver la bonne tour de revêtements dans laquelle les variétés deviendraient de Haken pour un indice assez grand, et donc pour une infinité d'indices. L'approche de Lackenby requiert de contrôler le genre de Heegaard dans des tours de revêtements finis. Pour ce faire, ce dernier associe à toute famille de revêtements finis de M un invariant qui prend en compte le comportement asymptotique du genre de Heegaard. Il obtient ainsi la définition du gradient de Heegaard.

Soit M une variété de dimension 3 compacte, connexe et orientable. Notons $\chi_-^h(M) = 2g(M)-2$ la **caractéristique d'Euler-Heegaard de** M, où $g(M)$ est le genre de Heegaard de la variété M. Bien sûr, la caractéristique d'Euler-Heegaard $\chi_-^h(M)$ est le minimum sur toutes les surfaces de Heegaard F de M de $-\chi(F)$, l'opposé de la caractéristique d'Euler de F.

De façon analogue, on peut définir la **caractéristique d'Euler-Heegaard forte de** M comme le minimum de $-\chi(F)$ pris sur l'ensemble de toutes les surfaces de Heegaard fortement irréductibles F de M. On la note $\chi_-^{sh}(M)$. Si la variété M n'admet pas de scindement de Heegaard fortement irréductible, alors par les conventions usuelles $\chi_-^{sh}(M) = +\infty$. Bien entendu, toute variété M de dimension 3 connexe, compacte et orientable vérifie $\chi_-^h(M) \leq \chi_-^{sh}(M)$.

Soit F une surface de Heegaard pour M réalisant le genre de Heegaard de M : $\chi_-^h(M) = -\chi(F)$. Dans un revêtement fini $M' \to M$ de degré d, l'image réciproque de F est une surface de Heegaard F' de M' de caractéristique d'Euler $\chi(F') = d\chi(F)$. Par suite,

$$\frac{\chi_-^h(M')}{d} \leq \chi_-^h(M).$$

Ainsi, dans une tour de revêtements finis $(M_i \to M)_{i \in I}$ de M le rapport $\frac{\chi_-^h(M_i)}{d_i}$ est toujours majoré par la caractéristique d'Euler-Heegaard de M : la croissance de la caractéristique d'Euler-Heegaard la plus rapide que l'on puisse espérer est une croissance linéaire en le degré du revêtement. Il est donc intéressant d'introduire les quantités suivantes, comme l'a fait Lackenby [Lac2006, p. 319].

Définition 1.7 (gradient de Heegaard et gradient fort de Heegaard). *Soit M une variété de dimension 3 compacte, connexe et orientable, et une famille de revêtements finis $(M_i \to M)_{i \in I}$ de M. Notons d_i le degré du revêtement $M_i \to M$ pour tout $i \in I$.*

Le ***gradient de Heegaard de M relativement à*** $(M_i \to M)_{i \in I}$ *est la quantité :*

$$\nabla^h((M_i \to M)_{i \in I}) = \inf_{i \in I} \left\{ \frac{\chi_-^h(M_i)}{d_i} \right\}.$$

De même, on peut définir le ***gradient fort de Heegaard de M relativement à*** $(M_i \to M)_{i \in I}$ *par :*

$$\nabla^{sh}((M_i \to M)_{i \in I}) = \inf_{i \in I} \left\{ \frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{d_i} \right\}.$$

Si la famille de revêtements finis $(M_i \to M)_{i \in I}$ de M n'est pas spécifiée, alors le gradient est la borne inférieure sur tous les revêtements finis de M. On l'appelle le ***gradient de Heegaard*** *de M, noté $\nabla^h(M)$, et le* ***gradient fort de Heegaard*** *de M, noté $\nabla^{sh}(M)$.*

Le raisonnement précédent montre que pour toute famille de revêtement finis $(M_i \to M)_{i \in I}$ de M, on a $\nabla^h((M_i \to M)_{i \in I}) \leq \chi_-^h(M)$. En fait, Lackenby a montré que pour une variété M hyperbolique de dimension trois, connexe, compacte et orientable, on a l'inégalité stricte $\nabla^h(M) < \chi_-^h(M)$.

La seule variété compacte, connexe, orientable, sans bord et de caractéristique de Heegaard strictement négative est la sphère $\mathbb{S}^3$. Donc le gradient de Heegaard d'une variété M connexe, compacte, sans bord, orientable et de dimension 3 est strictement négatif si et seulement si le revêtement universel $\widehat{M}$ de M est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$. Dans ce cas, M n'admet qu'un nombre fini de revêtements d'indice fini. Hormis cette situation particulière que nous ne rencontrerons pas, le gradient de Heegaard et le gradient fort de Heegaard sont toujours positifs ou nuls, voire infini pour ce dernier.

Le gradient de Heegaard d'une variété compacte, connexe, orientable et virtuellement fibrée sur le cercle est nul. Lackenby [Lac2006, p. 320] conjecture que la réciproque est vraie dans le cas hyperbolique :

Conjecture 5 (du gradient de Heegaard). *Une variété de dimension 3 compacte, connexe, orientable et hyperbolique a son gradient de Heegaard nul si et seulement si elle fibre virtuellement sur le cercle.*

Si la conjecture 4 est vraie, on s'attend à ce que le gradient de Heegaard d'une variété hyperbolique soit toujours nul. Par contre, Lackenby conjecture que ce n'est pas le cas pour le gradient fort de Heegaard.

Conjecture 6 (du gradient fort de Heegaard). *Le gradient fort de Heegaard des variétés de dimension 3 compactes, sans bord, connexes, orientables et hyperboliques n'est jamais nul.*

Lackenby [Lac2006, Paragraphes 6 et 7] propose un certain nombre de résultats qui corroborent ces deux conjectures.

1.2.2 Propriété (τ).

Un des résultats majeurs de l'article [Lac2006] est le théorème 1.7 p. 323 qui donne un programme pour résoudre la conjecture de Haken. Ce théorème utilise conjointement le gradient de Heegaard et une propriété sur les groupes de présentation finie, appelée propriété (τ).

Soient G un groupe de type fini et S une famille génératrice finie symétrique (i.e. stable par passage à l'inverse) de G, ne contenant pas l'élément neutre e de G. Soit H un sous-groupe de G (non nécessairement distingué). Le **graphe de Schreier de** $H\backslash G$ **relativement à** S est le graphe fini $X(H\backslash G, S) = X(H\backslash G) = (V, E)$ dont l'ensemble des sommets V est en bijection avec l'ensemble des classes à droite de $H\backslash G$ et les arêtes sont les triplets $(Hh, Hg, s) \in H\backslash G \times H\backslash G \times S$ avec $Hh = Hg.s$. L'arête opposée à e est $\bar{e} = (Hg, Hh, s^{-1})$. Le sommet initial de e est $o(e) = Hh$ et son sommet terminal est $t(e) = Hg$.

Si le sous-groupe H est distingué dans G, le graphe de Schreier de $H\backslash G$ est en fait le graphe de Cayley du groupe $H\backslash G = G/H$ relativement à la famille génératrice $\widetilde{S} = (Hs,\ s \in S)$ (nous renvoyons à [GdH, Chap. 1 §2 p. 4 et Appendix §3.1 p. 248] pour la définition du graphe de Cayley d'un groupe de type fini).

Soit un graphe fini connexe $X = (V, E)$, où V est l'ensemble des sommets de X et E l'ensemble de ses arêtes. Si A est un sous-ensemble de V, on note ∂A (le "bord" de A) le sous-ensemble de E des arêtes d'origine un sommet de A et d'extrémité un sommet de $V \setminus A = A^c$ le complémentaire de A dans V.

Définition 1.8 (Constante de Cheeger). *Soit $X = (V, E)$ un graphe fini connexe ayant au moins deux sommets. La **constante de Cheeger** de X est définie par :*

$$h(X) = \min \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|},\ A \subset V,\ A \neq \emptyset \text{ et } |A| \leq \frac{|V|}{2} \right\}.$$

Pour une variété riemannienne, on a une constante analogue :

Définition 1.9 (Constante isopérimétrique de Cheeger).
*La **constante de Cheeger** d'une variété riemannienne (M,g) de volume fini est :*

$$h(M) := \inf_A \left\{ \frac{\mathrm{Aire}_g(\partial A)}{\mathrm{Vol}_g(A)} \right\},$$

où A parcourt les sous-variétés de M vérifiant $0 < \mathrm{Vol}_g(A) \leq \frac{\mathrm{Vol}_g(M)}{2}$.

Proposition et Définition 1.10. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, connexe et orientable. Soient $\Gamma = \pi_1(M)$ le groupe fondamental de M relatif à un certain choix de point base dans M, $(\Gamma_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes d'indice fini de Γ, et $(M_i \to M)_{i\in I}$ la famille des revêtements riemanniens finis associés aux sous-groupes Γ_i. Soit S une famille génératrice finie symétrique de Γ, ne contenant pas l'élément neutre de Γ. Pour tout $i \in I$, notons $X_i = X(\Gamma_i\backslash\Gamma, S)$ le graphe de Schreier (fini connexe) de $\Gamma_i\backslash\Gamma$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout i, on ait* $h(X_i) \geq \epsilon_1$.
2. *Il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que pour tout i, on ait* $h(M_i) \geq \epsilon_2$.

*De plus, cette propriété est indépendante de la famille génératrice finie symétrique S choisie. On dit alors que la variété M **possède la propriété** (τ) **relativement à la famille de revêtements finis** $(M_i \to M)_{i\in I}$, ou que **le groupe** Γ **possède la propriété** (τ) **relativement à la famille de sous-groupes d'indice fini** $(\Gamma_i)_{i\in I}$.*

La famille de revêtements finis $(M_i \to M)_{i\in I}$ est appelée un **treillis** si pour tous $i, j \in I$, le revêtement correspondant au sous-groupe $\pi_1(M_i) \cap \pi_1(M_j)$ de $\pi_1(M)$ fait aussi partie de la famille (ici $\pi_1(M_i)$ et $\pi_1(M_j)$ sont vus comme des sous-groupes de $\pi_1(M)$ le groupe fondamental de M).

Une reformulation du théorème 1.7 de [Lac2006] est :

Théorème 1.11. *Soient une variété M de dimension 3 connexe, compacte, sans bord, orientable, irréductible, et un treillis $(M_i \to M)_{i\in I}$ de revêtements finis galoisiens de M.*

Supposons que :

1. *La variété M ne possède pas la propriété (τ) relativement au treillis de revêtements finis $(M_i \to M)_{i\in I}$.*
2. *Le gradient fort de Heegaard du treillis $(M_i \to M)_{i\in I}$ est non nul : $\nabla^{sh}((M_i \to M)_{i\in I}) > 0$.*

Alors la variété M est virtuellement de Haken : pour une infinité de $i \in I$, le revêtement fini M_i contient une surface incompressible.

Ce théorème constitue une avancée vers la conjecture sur les variétés virtuellement de Haken. En effet, prenons pour treillis la famille $(M_i \to M)_{i\in I}$ des revêtements finis galoisiens de M. La deuxième hypothèse serait toujours vérifiée dans le cas d'une variété hyperbolique, compacte et sans bord : c'est la conjecture 6 du gradient fort de Heegaard, ou la conjecture 5 du gradient de Heegaard de Lackenby (puisque si le gradient de Heegaard est nul, cela veut dire que la variété est virtuellement fibrée sur le cercle, donc a fortiori de Haken. D'autre part, si le gradient de Heegaard est non nul, a fortiori le gradient fort de Heegaard est non nul puisqu'il est minoré par le gradient "faible").

Une autre conjecture de Lubotzky et Sarnak impliquerait la validité de la première hypothèse dans le cas d'une variété hyperbolique, compacte et sans bord :

Conjecture 7 (Lubotzky-Sarnak). *Le groupe fondamemental d'une variété de dimension 3 hyperbolique de volume fini ne possède pas la propriété (τ) relativement à la famille de ses sous-groupes distingués d'indice fini.*

Si ces deux conjectures se révélaient exactes, alors une variété de dimension 3 hyperbolique, connexe, orientable, compacte et sans bord serait virtuellement de Haken, ce qui est le cas qui manquait pour prouver la conjecture sur les variétés virtuellement de Haken.

La démonstration du théorème 4.1 p. 341 de [Lac2006] utilise des techniques de surfaces minimales en rapport avec les scindements de Heegaard [PiRu] :

Théorème 1.12. *Soit M une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, orientable, complète et de volume fini. Alors $h(M) \leq \frac{4\pi\chi_-^h(M)}{\mathrm{Vol}(M)}$.*

Le théorème 1.5 p. 322 de [Lac2006] est une conséquence immédiate du théorème 1.12. Il permet de relier la propriété (τ) et le gradient de Heegaard :

Théorème 1.13. *Soit M une variété de dimension trois hyperbolique, connexe, compacte, sans bord et orientable.*

Si la variété M possède la propriété (τ) relativement à la famille de revêtements finis $(M_i \to M)_{i\in I}$, alors le gradient de Heegaard de $(M_i \to M)_{i\in I}$ est non nul : $\nabla((M_i \to M)_{i\in I}) > 0$.

En particulier, une variété qui fibre sur le cercle n'a pas la propriété (τ) relativement à la famille de ses revêtements finis.

1.2.3 Quelques critères de fibration virtuelle.

Dans un autre article [Lac2004], Lackenby utilise les résultats et les méthodes développées dans [Lac2006] pour énoncer un critère permettant de dire qu'une variété possède un revêtement dont le premier nombre de Betti est virtuellement non nul, ainsi qu'un critère déterminant si la variété est virtuellement fibrée sur le cercle.

Théorème 1.14. *Soit M une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, compacte, sans bord et orientable. Soit $(M_i \to M)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de revêtements galoisiens finis de degré d_i. Alors :*

1. *Si $\lim_{i\to\infty} \frac{\chi_-^h(M_i)}{\sqrt{d_i}} = 0$, pour tout i assez grand, le premier nombre de Betti de M_i est non nul. En particulier, M vérifie la conjecture 2 du premier nombre de Betti virtuellement non nul.*
2. *De plus, si $\lim_{i\to\infty} \frac{\chi_-^h(M_i)}{\sqrt{d_i}} = 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\frac{\chi_-^{sh}(M_i)}{\sqrt{d_i}} \geq \epsilon$.*

3. *Si* $\lim_{i\to\infty} \frac{\chi_-^h(M_i)}{d_i^{1/4}} = 0$, *pour tout* i *assez grand, la variété* M_i *fibre sur le cercle* $\mathbb{S}^1$.

Un résultat de Maher [Mah] permet d'éviter la condition que les revêtements soient réguliers.

Théorème 1.15. *Soit* M *une variété hyperbolique de dimension trois, connexe, compacte, sans bord et orientable. Soit* $(M_i \to M)_{i\in I}$ *une famille infinie de revêtements finis de degré* d_i*. Si la caractéristique d'Euler-Heegaard* $\chi_-^h(M_i)$ *est uniformément bornée, alors sauf pour un nombre fini d'indices* $i \in I$*, la variété* M_i *contient une surface plongée qui est une fibre virtuelle.*

En particulier, on sait grâce à ce théorème que la variété M est virtuellement fibrée sur le cercle si et seulement si M admet une famille infinie de revêtements finis $(M_i \to M)_{i\in I}$ dont le genre de Heegaard $g(M_i)$ est borné indépendamment de i.

2 Une autre approche possible : le point de vue algébrique.

2.1 Construction d'un cocycle non trivial.

En utilisant des techniques de géométrie des groupes, notamment en travaillant sur les graphes de Schreier et des revêtements du 2-complexe de Cayley associé à un groupe de présentation finie, Lackenby a démontré dans son article [Lac2006] le lemme crucial suivant :

Lemme 2.1. *Soit* Γ *un groupe de présentation finie, et* $\langle S, R\rangle$ *une présentation triangulaire de* Γ*, i.e. dont toutes les relations de* R *ont longueur trois. Soit* H *un sous-groupe d'indice fini distingué dans* Γ *et* X *le graphe de Cayley de* $H\backslash\Gamma$ *relativement à* S*. On suppose que* $h(X) < \sqrt{\frac{2}{3|V(X)|}}$.

Soit K *le 2-complexe de Cayley associé à la présentation* $\langle S, R\rangle$ *de* Γ *et* K' *le revêtement galoisien fini correspondant au sous-groupe* H*. Alors* K' *admet un 1-cocycle* c *non trivial : en particulier,* $b_1(K') > 0$.

Soit M une variété de dimension trois de groupe fondamental Γ. On peut utiliser le cocycle non trivial c exhibé dans ce lemme pour construire une surface inompressible duale de c dans le revêtement fini M_i correspondant au sous-groupe H de Γ [Lac2004, Paragraphe 3 p. 145].

Le lemme technique précédent permet de démontrer le théorème suivant de [Lac2006, Théorème 1.1].

Théorème 2.2. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte, connexe, sans bord et orientable de groupe fondamental* Γ*. Notons* $(\Gamma_i)_{i\in I}$ *la famille de ses sous-groupes d'indice fini et pour tout* $i \in I$*, soient* $N(\Gamma_i)$ *le normalisateur de* Γ_i *dans* Γ *et* $M_i \to M$ *le revêtement riemannien fini correspondant au sous-groupe* Γ_i.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Il existe un indice* $i \in I$ *tel que* $b_1(M_i) > 0$.
2. *Pour une infinité d'indices* $i \in I$, $b_1(M_i) > 0$.
3. $h(M_i)[\Gamma : N(\Gamma_i)][\Gamma : \Gamma_i]$ *admet une sous-suite bornée.*
4. $\inf_{i\in I} \left\{ h(M_i)[\Gamma : N(\Gamma_i)]^2[N(\Gamma_i) : \Gamma_i]^{\frac{1}{2}} \right\} = 0$.

Ce théorème est à mettre en parallèle avec le théorème 1.14.

2.2 Un critère algébrique de fibration virtuelle.

Dans son article [Agol], Agol énonce une condition nécessaire pour qu'une variété M de dimension trois irréductible fibre virtuellement sur le cercle. Cette condition repose sur une propriété du groupe fondamental de la variété M, appelée **RFRS**, plus forte que la résiduelle finitude.

Soit Γ un groupe. Notons $\Gamma^{(1)} = [\Gamma, \Gamma]$ le sous-groupe dérivé de Γ et $\Gamma_r^{(1)} = \{x \in \Gamma \mid \exists k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0,\, x^k \in \Gamma^{(1)}\}$ le radical du sous-groupe dérivé de Γ. Le groupe Γ est dit **RFRS** ou **résiduellement fini $\mathbb{Q}$-résoluble** s'il existe une suite de sous-groupes distingués d'indice fini

$(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de Γ avec $\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots$ telle que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i = \{1\}$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$ le sous-groupe Γ_{i+1} contienne $(\Gamma_i)_r^{(1)}$.

Tout sous-groupe d'un groupe RFRS est lui-aussi RFRS. On dit qu'un groupe Γ est **virtuellement RFRS** s'il contient un sous-groupe d'indice fini qui est RFRS. En particulier, les groupes de surface, de réflexions, les groupes artiniens à angles droits, les groupes hyperboliques arithmétiques définis par une forme quadratique, les produits directs et les produits libres de groupes RFRS sont virtuellement RFRS.

Le théorème 5.1 de [Agol] donne une condition suffisante algébrique pour qu'une variété de dimension trois soit virtuellement fibrée sur le cercle.

Théorème 2.3 (Agol). *Soit M une variété de dimension trois connexe, compacte, sans bord, orientable et irréductible. Supposons que le groupe fondamental de M est RFRS et que le premier nombre de Betti de M est non nul. Alors M est virtuellement fibrée sur le cercle.*

2.3 Quelques conjectures sur la taille des groupes kleiniens et divers gradients.

On dit qu'un groupe est un **groupe de surface** s'il est isomorphe au groupe fondamental d'une surface connexe, compacte, sans bord, orientable et de genre supérieur ou égal à deux. Une conjecture plus faible que la conjecture 1 de Waldhausen est la suivante :

Conjecture 8 (du sous-groupe de surface). *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique M de dimension trois, connexe, compacte, sans bord et orientable contient un sous-groupe de surface.*

Si cette conjecture était vraie, on pourrait toujours immerger une surface connexe, compacte, sans bord, orientable et de genre supérieur ou égal à deux dans une variété hyperbolique M de dimensions trois. Cependant, il n'est pas assuré que cette surface puisse provenir d'une surface plongée dans un revêtement fini de M, d'où la conjecture plus forte de Waldhausen.

Le fait de contenir un sous-groupe de surface ne dépend que de la classe de commensurabilité du groupe fondamental de la variété hyperbolique. On connaît une réponse affirmative à cette conjecture dans certains cas, notamment le cas arithmétique, où c'est un théorème de Lackenby [Lac2008, Théorème 1.2 p. 1] qui s'appuie sur un résultat de Lackenby, Long et Reid [LLR].

Théorème 2.4 (Lackenby). *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique arithmétique M de dimension trois, connexe, compacte, sans bord et orientable contient un sous-groupe de surface.*

Un groupe Γ est dit **large** s'il est de présentation finie et s'il contient un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre non abélien. Si le groupe fondamental d'une variété de dimension trois est large, alors cette variété a son premier nombre de Betti virtuellement infini. C'est pourquoi la conjecture suivante impliquerait les conjectures 1 de Waldhausen, 2 du premier nombre de Betti virtuellement non nul et 3 du premier nombre de Betti virtuellement infini.

Conjecture 9 (du groupe large). *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique M de dimension trois, connexe, compacte, sans bord et orientable est large.*

Cette conjecture est vraie pour les variétés arithmétiques dont le premier nombre de Betti est virtuellement non nul ([CLR] et [LLR]). En revanche, on ne sait pas si par exemple les groupes fondamentaux des variétés fibrées sur le cercle sont larges.

Pour démontrer que le groupe fondamental d'une variété M de dimension trois est large, on peut par exemple montrer que M contient deux surfaces orientables disjointes, proprement plongées et dont l'union n'est pas séparante. Récemment, Lackenby a obtenu plusieurs autres critères, plus algébriques.

Le **rang** $d(\Gamma)$ d'un groupe Γ de type fini est le nombre minimal de générateurs du groupe.

Théorème 2.5. *[Lac2005]*

Soit Γ un groupe de présentation finie. Sont équivalentes les assertions :

1. *Le groupe Γ est large.*
2. *Il existe une suite $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_n \supseteq \ldots$ de sous-groupes d'indice fini de Γ, tous distingués dans Γ_1 telle que :*
   (a) *Pour tout $i \geq 1$, le quotient Γ_i/Γ_{i+1} est abélien.*
   (b) $\lim_{i\to\infty} \frac{\ln[\Gamma_i:\Gamma_{i+1}]}{[\Gamma:\Gamma_i]} = \infty$.
   (c) $\limsup_{i\in\mathbb{N}} \frac{d(\Gamma_i/\Gamma_{i+1})}{[\Gamma:\Gamma_i]} > 0$.

Ce dernier résultat nous amène à nous intéresser de plus près au rang. Par le théorème de Reidemeister-Schreier, on sait que si Γ est un groupe de présentation finie et Γ_i un sous-groupe d'indice fini de Γ, le rang de Γ_i vérifie : $d(\Gamma_i) - 1 \leq (d(\Gamma) - 1)[\Gamma : \Gamma_i]$.

Ceci a conduit Lackenby à introduire la définition suivante. Si Γ est un groupe de présentation finie et $\mathcal{F} = (\Gamma_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes d'indice fini de Γ, alors le **gradient du rang de Γ relativement à la famille $\mathcal{F}$** est :

$$\nabla^r(\Gamma, \mathcal{F}) = \inf_{i\in I} \frac{d(\Gamma_i) - 1}{[\Gamma : \Gamma_i]}.$$

Si Γ est le groupe fondamental d'une variété M de dimension trois, connexe, compacte, sans bord et orientable, le rang de Γ est toujours majoré par le genre de Heegaard de M (car les boucles d'un graphe dont un des corps à anses est un voisinage régulier fournissent une famille génératrice de Γ). Donc aussi le double du gradient du rang de Γ associé à la famille $\mathcal{F}$ est toujours majoré par le gradient de Heegaard associé à la famille des revêtements finis correspondant aux sous-groupes de $\mathcal{F}$. Ainsi, Lackenby trouve pour le gradient du rang un résultat qui ressemble beaucoup au théorème 1.7 de [Lac2006].

Théorème 2.6. *[Lac2005-2, Théorème 1.1]*
Soit Γ un groupe de présentation finie et $(\Gamma_i)_{i\in I}$ un treillis de sous-groupes distingués d'indice fini de Γ. Alors au moins une des propriétés suivantes est vraie :

1. *Le sous-groupe Γ_i est un produit libre amalgamé ou une extension HNN pour une infinité de i.*
2. *Le groupe Γ possède la propriété (τ) relativement à la famille $(\Gamma_i)_{i\in I}$.*
3. $\nabla^r(\Gamma, (\Gamma_i)_{i\in I}) = 0$.

En particulier, si M est une variété de dimension trois de groupe fondamental Γ et $(\Gamma_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes distingués d'indice fini dans Γ telle que Γ ne possède pas la propriété (τ) relativement à la famille $(\Gamma_i)_{i\in I}$ et $\nabla^r(\Gamma, (\Gamma_i)_{i\in I}) \neq 0$, alors la variété M est virtuellement de Haken.

De même, si Γ est un groupe de présentation finie et $\mathcal{F} = (\Gamma_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes d'indice fini dans Γ, pour tout nombre premier p on peut définir $d_p(\Gamma_i) = \dim H^1(\Gamma_i, \mathbb{F}_p)$ et

$$\nabla_p^{hom}(\Gamma, \mathcal{F}) = \inf_{i\in I} \frac{d_p(\Gamma_i) - 1}{[\Gamma : \Gamma_i]}.$$

Cette quantité s'appelle le **gradient de l'homologie modulo p**. Dans son article [Lac2005-3], Lackenby démontre un théorème similaire au théorème 2.6. En particulier, si M est une variété de dimension trois de groupe fondamental Γ et $(\Gamma_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes distingués d'indice fini dans Γ telle que Γ ne possède pas la propriété (τ) relativement à la famille $(\Gamma_i)_{i\in I}$ et $\nabla_p^{hom}(\Gamma, (\Gamma_i)_{i\in I}) \neq 0$, alors la variété M est virtuellement de Haken, et en fait le groupe Γ est large.

2.4 Conjecture du rang versus genre de Heegaard.

Il existe des variétés non hyperboliques M (de Seifert ou graphées) telles que $d(\pi_1 M) < g(M)$ ([BZ] et [SW]). La question de trouver de tels exemples hyperboliques est toujours ouverte : c'est la **conjecture du rang versus genre de Heegaard** [Sha, Conjecture 1.1], qui affirme que tout variété hyperbolique M vérifierait $d(\pi_1 M) = g(M)$. Shalen [Sha] utilise cette conjecture pour traduire en terme de genre de Heegaard des résultats obtenus ou conjecturés sur le rang du groupe fondamental d'une variété hyperbolique. Souto [Sou2] montre que dans le cadre des fibrés hyperboliques sur le cercle, le rang et le genre de Heegaard coïncident pour des revêtements suffisamment grands.

Abért et Nikolov [AN] donnent un moyen de calculer le gradient du rang d'un groupe de type fini résiduellement fini Γ relatif à une suite quelconque de sous-groupes emboîtés d'indice fini $\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \ldots$ telle que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n = \{1\}$ en termes de coût de l'action de Γ sur le bord de l'arbre des classes associé à la famille $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir aussi [BG]). De façon équivalente, le gradient du rang d'un groupe Γ de type fini et résiduellement fini peut se calculer comme le coût de l'action de Γ sur sa complétion profinie, moins un. Modulo une conjecture dite du prix fixe, leurs résultats permettraient de construire des variétés hyperboliques dont le rapport entre le genre et le rang est arbitrairement grand.

Références

[AN] M. Abért, N. Nikolov, *Rank gradient, cost of groups and the rank versus Heegaard genus problem.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/0701.361 (2008).

[Agol] I. Agol, *Criteria for virtual fibering.* J. Topol. **1** (2008), no. 2, 269–284.

[BBW] M. Backer, M. Boileau, S. Wang, *Towers of covers of hyperbolic 3-manifolds.* Rend. Istit. Math. Univ. Trieste, Suppl. 1 **XXXII** (2001) 35–43.

[BHV] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, *Kazhdan's property* (T). Cambridge Univ. Press (2008).

[BG] N. Bergeron, D. Gaboriau, *Asymptotique des nombres de Betti, invariants* l^2 *et laminations.* Comment. Math. Helv. **79** (2004), no. 2, 362–395.

[BBBMP] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, J. Porti, *Weak collapsing and geometrisation of aspherical 3-manifolds.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/0706.2065 (2008).

[Boi] M. Boileau, *Géométrisation des actions de groupes en dimension trois.* Journée annuelle de la SMF (2003) 1–18.

[BMP] M. Boileau, S. Maillot, J. Porti, *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures.* SMF, Panoramas et Synthèses **15** (2003).

[BZ] M. Boileau, H. Zieschang, *Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds.* Invent. Math. **76** (1984) 455-468.

[CaGo] A. Casson, C.McA. Gordon, *Reducing Heegaard splittings.* Top. Appl. **27** (1987) 275–283.

[CLR] D. Cooper, D. D. Long, A. W. Reid, *On the virtual Betti numbers of arithmetic hyperbolic 3-manifolds.*, Geom. Topol. **11** (2007) 2265–2276.

[DuTh] N. Dunfield, W. Thurston, *The virtual Haken conjecture : experiments and examples.* Geom. Topol. **7** (2003) 399–441.

[FHS] M. Freedman, J. Hass, P. Scott, *Least area incompressible surfaces in 3-manifolds.* Invent. Math. **71** (1983) 609–642.

[FrHa] C. Frohman, J. Hass, *Unstable minimal surfaces and Heegaard splittings.* Invent. Math. **95** (1989) 529–540.

[GdH] E. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov.* Birkhäuser (1990).

[Hak] W. Haken, *Some results on surfaces in 3-manifolds.* Studies in Modern Topology, Math. Assoc. Am. (1968) 34–98.

[Hat2] A. Hatcher, *Notes on basic three-manifolds topology.* Version préliminaire disponible à l'adresse : http ://www.math.cornell.edu/∼hatcher/3M/3Mdownloads.html (2001).

[Hem1] J. Hempel, *Residual finiteness for 3-manifolds.* Annals of Math. Studies **111** (1987) 379–396.

[Hem] J. Hempel, *3-Manifolds.* Annals of Math. Studies **86**, Princeton Univ. Press (1976).

[Ichi] K. Ichihara, *Heegaard gradient of Seifert fibered 3-manifolds.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/math/0211102 (2003).

[Jac] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology.* Regional conference series in Mathematics **43**, Amer. Math. Soc. (1981).

[KL] B. Kleiner, J. Lott, *Notes on Perelman's papers.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/math.DG/0605667 (2007).

[Lac2005] M. Lackenby, *A characterisation of large finitely presented groups.* J. Algebra **287** (2005), no. 2, 458– 473.

[Lac2004] M. Lackenby, *The asymptotic behaviour of Heegaard genus.* Math. Res. Lett. **11** (2004) no. 2-3, 139–149.

[Lac2005-2] M. Lackenby, *Expanders, rank and graphs of groups.* Israel J. Math. **146** (2005), 357–370.

[Lac2006] M. Lackenby, *Heegaard splittings, the virtually Haken conjecture and Property* (τ). Invent. Math. **164** (2006) 317–359.

[Lac2005-3] M. Lackenby, *Large groups, property* (τ) *and the homology growth of subgroups.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/math/0509036 (2005).

[Lac2008] M. Lackenby, *Surface subgroups of Kleinian groups with torsion.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/0804.1309 (2008).

[LLR] M. Lackenby, D. Long, A. Reid, *Covering spaces of arithmetic 3-orbifolds.* Int. Math. Res. Not. IMRN. Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv :math.GT/0601677 (2008).

[Lub] A. Lubotzky, *Discrete groups, Expanding graphs and Invariant measures.* Prog. Math. **125** (1994).

[LZ] A. Lubotzky, A. Zuk, *On property* (τ). version préliminaire disponible à l'adresse : http ://www.ma.huji.ac.il/∼alexlub/ (2003).

[Mah] J. Maher, *Heegaard gradient and virtual fibers.* Geom. and Top. **9** (2005) 2227–2259.

[MSY] W. Meeks III, L. Simon, S. Yau, *Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature.* Ann. of Math. **116** (1982) 621–659.

[Mil] J. Milnor, *Morse theory.* Annals of Math. Studies **51** Princeton Univ. Press (1963).

[Moi] E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds, V. the triangulation theorem and Hauptvermutung.* Ann. of Math. **55** (1952) 96–114.

[MT] J. Morgan, G. Tian, *Ricci Flow and the Poincaré conjecture.* AMS and Clay Mathematics Institute, Clay Mathematics Monographs **3** (2007).

[Otal] J.-P. Otal, *Three topological properties of small eigenfunctions on hyperbolic surfaces.* Prog. in Math. **265** (2008) 685–695.

[OR] J.-P. Otal, E. Rosas, *Pour toute surface hyperbolique de genre g,* $\lambda_{2g-2} > \frac{1}{4}$. Prépublication (2008).

[Per1] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/math/0211159v1 (2002).

[Per2] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/math.DG/0303109 (2003).

[Per3] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.* Prépublication disponible à l'adresse : http ://arxiv.org/abs/math.DG/0307245 (2003).

[PiRu] J. Pitts, J.H. Rubinstein, *Existence of minimal surfaces of bounded topological type in three-manifolds.* Miniconference on Geometry and Partial Differential Equations (Camberra 1985) 163–176.

[RoSa] C. Rourke, B. Sanderson, *Piecewise linear topology.* Springer (1982).

[Scha] M. Scharlemann, *Heegaard splittings of compact 3-manifolds.* Handbook of geometric topology, ed. par R. J. Daverman, R. B. Sher, chapitre 18 (2002) 921–953.

[SY] R. Schoen, S. Yau, *Existence of incompressible surfaces and the topology of 3-manifolds with non-negative scalar curvature.* Ann. of Math. **119** (1979) 127–142.

[SW] J. Schultens, R. Weidmann, *On the geometric and the algebraic rank of graph manifolds.* Pacific J. Math. 231, no. 2 (2007) 481–510.

[Sco] P. Scott, *The geometry of 3-manifolds.* Bull. London Math. Soc. **15** (1983) n°5 401–487.

[Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames et* SL_2. SMF Astérisque **46** (1977).

[Sha] P. Shalen, *Hyperbolic volume, Heegaard genus, and ranks of groups.* Geometry and Topology Monographs **12** (2007) 335–349.

[Sie] L. C. Siebenmann, *Les bissections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer.* Prépublication de l'Université Paris-Sud (1979).

[Sou] J. Souto, *Geometry, Heegaard splittings and rank of the fundamental group of hyperbolic 3-manifolds.* Geometry and Topology Monographs, **12** (2007), disponible à l'adresse : http ://www.math.uchicago.edu/∼juan/Haifa.pdf.

[Sou2] J. Souto, *The rank of the fundamental group of certain hyperbolic 3-manifolds fibering over the circle.* Geom. and Top. Monographs, **14** (2008) 505–518.

[Thu1] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds.* **1**, Princeton Univ. Press (1997).

[Thu2] W. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry.* Bull. Am. Math. Soc. **6** (1982) 357-381.

[Wald] F. Waldhausen, *The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds.* Ann. of Math. **88** (1968) 272–280.