Introduction au domaine de recherche

Rafael RENAUDIN-AVINO

Table des matières

Introduction

Cette introduction au domaine de recherche reprend mon mémoire de master 2, effectué sous la direction de Christoph Sorger, que je tiens à remercier pour sa disponibilité, ses conseils avisés et son expérience qu'il a partagée avec pédagogie avec moi.
La théorie mathématique des blocs conformes a été initiée principalement par Tsuchiya, Kanie, Yamada et Ueno dans les années 80-90, s'inspire d'idées venant de la physique (voir [11]), notament de Witten, et induit de nombreuses problématiques et questions non explorées encore aujourd'hui. Cette théorie donne le jour à une famille de fibrés vectoriels, paramétrés par une algèbre de Lie simple complexe $\mathfrak{g}$, un entier l, et un n-uplet de poids "de niveau l", au-dessus d'espaces de modules pour les courbes complexes.
Dans ce texte, nous nous immergerons tout d'abord dans la théorie des algèbres de Lie affines et de leur représentations, avant de voyager dans le monde des courbes complexes, de leurs déformations et mises en familles. Nous pourrons ensuite définir et étudier les blocs conformes associés à une courbe, puis leur version familiale, à savoir les fibrés sus-cités. Enfin, nous concluerons par quelques questions d'actualité sur ces objets.

1 Algèbres de Lie

En dimension finie Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie. Prenons $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, qui fixe la structure de $\mathfrak{g}$

de la manière suivante : si on note $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ l'ensemble des racines du système $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on a la décomposition en espaces de poids :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

Les représentations simples de $\mathfrak{g}$ sont toutes des représentations de plus haut poids, et sont paramétrées à isomorphisme près par l'ensemble des poids dominants, $P_+ \subset P$, via la bijection :

$$\left| \begin{array}{ccl} P_+ & \longrightarrow & \{\text{représentations simples de } \ \mathfrak{g}\}/\cong \\ \lambda & \longmapsto & [V_\lambda] \end{array} \right.$$

(voir par exemple [6]).

Algèbres de Lie affines A l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ on associe l'algèbre de Lie affine $\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}c$, qui est l'extension centrale de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z))$, via le 2-cocycle $(P, Q) \mapsto Res_{z=0}(PQ')$. Posons à présent :

$$\begin{array}{l} \hat{\mathfrak{g}}_+ := \mathfrak{g} \otimes z\mathbb{C}[[z]] \\ \hat{\mathfrak{g}}_- := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}] \end{array}$$

On a alors :

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \hat{\mathfrak{g}}_- \oplus \mathbb{C}c,$$

qui est une décomposition de $\hat{\mathfrak{g}}$ en sous-algèbres de Lie.

Les représentations de $\hat{\mathfrak{g}}$ n'ont pas de classification aussi évidente que celles de $\mathfrak{g}$, mais en se restreignant à une certaine classe de représentations, on obtient un résultat similaire, dû à Kac (cf [7]).
Une représentation V de $\hat{\mathfrak{g}}$ est dite *intégrable* si elle vérifie les conditions (équivalentes) suivantes :

(i) Pour tout vecteur de racine X_α et $n \in \mathbb{N}$, $X_\alpha \otimes z^{-n}$ agit de façon localement nilpotente sur V

(ii) La représentation V admet une décomposition en sous-espaces de poids de dimension finie (les poids étant dans $\hat{\mathfrak{h}}^*$).

L'élément c étant central, il agit sur toute représentation irréductible par un scalaire. Nous dirons qu'une représentation V est *de niveau* $l \in \mathbb{N}$ lorsque c agit sur V par l'entier l. Les représentations intégrables de niveau l irréductibles de $\hat{\mathfrak{g}}$ sont alors classifiées à isomorphisme près par l'ensembles des poids de niveau l :

$$P_l := \{\lambda \in P_+ \mid (\lambda, \theta) \leq l\}$$

(où θ est la plus grande racine de $\mathfrak{g}$, et $(.,.)$ désigne la forme de Killing de $\mathfrak{g}$).

Nous noterons $\mathcal{H}_\lambda$ "la" représentation correspondant à $\lambda \in P_l$, caractérisée par la propriété :

$$V_\lambda \underbrace{\simeq}_{\mathfrak{g}-module} \{v \in \mathcal{H}_\lambda | \ \hat{\mathfrak{g}}_+.v = 0\}$$

Une version à n paramètres de $\hat{\mathfrak{g}}$ est donnée par la somme de n idéaux isomorphes à $\hat{\mathfrak{g}}$, ou l'on identifie les centres : $\hat{\mathfrak{g}}_n := \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z_i)) \oplus \mathbb{C}.c$. Alors, les $\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}} := \mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_n}$, pour $\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in P_l^n$, seront des blocs fondamentaux pour les modules intégrables de niveau l de $\hat{\mathfrak{g}}_n$ (qui agit diagonalement sur $\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$).

2 Courbes et familles de courbes complexes

Courbes complexes Grâce à la classification topologique des surfaces, on sait que topologiquement, une courbe complexe lisse sera isomorphe à un "tore à g trous", où g est la moitié de la dimension de son premier espace de cohomologie, appelé son *genre*.
En prenant en compte la structure complexe, les courbes complexes de genre 0 sont toutes isomorphes à $\mathbb{CP}^1$, celles de genre 1 (les courbes elliptiques) sont classifiées par leur période fondamentale vivant dans le demi-plan de Poincaré. Celles de genre ≥ 2 sont pour leur part toutes des quotients du disque unité par des sous-groupes discrets de $PSU_{1,1}(\mathbb{C})$.

Familles de courbes Une famille de courbes de genre g est une "projection" $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ d'une "grosse" variété sur une variété appelée *base*, dont les fibres en tout point sont des courbes complexes. Les courbes complexes d'un genre g donné s'organisent toutes en famille au-dessus d'espaces de modules M_g, variétés quasi-projectives. Si l'on ajoute à la donnée de π des sections $s_1, \ldots, s_n$, on parle de *famille de courbes pointées*. Les courbes pointées se mettent elles aussi en famille au-dessus d'espaces de modules $M_{g,n}$.
Une famille est dite *complète* en un point si elle contient (à isomorphisme près) toutes les déformations infinitésimales de la courbe au-dessus de ce point. Elle est dite *verselle* si de plus elle ne contient qu'une seule fois chaque déformation au premier ordre de la courbe. Pour être plus précis, la famille est complète en $b \in \mathcal{B}$ si pour toute autre famille $\mathcal{F}' : \mathcal{C}' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{B}'$ avec un point donné $b' \in \mathcal{B}'$ tel que $\pi'^{-1}(b') = \pi^{-1}(b)$, alors il exite un morphisme $f : U \to \mathcal{B}$ d'un voisinage ouvert de b' dans $\mathcal{B}$ tel que le tiré en arrière $f^*\mathcal{F}$ soit isomorphe à $\mathcal{F}'_{|U}$. La famille est alors verselle en b si dans ces conditions $df_{b'}$ est uniquement déterminé.

A toute courbe C donnée, on peut associer une déformation verselle de C, d'où l'intérêt de la notion. A partir de maintenant, si X est une variété, le symbole Θ_X désignera le faisceau des champs de vecteurs sur X, et pour $b \in \mathcal{B}$, nous noterons $C_b := \pi^{-1}(b)$ la courbe au-dessus de b dans la famille.

L'obstruction à la versalité en un point b d'une famille complète est donnée par le défaut d'isomorphisme de l'application de Kodaira-Spencer en b : $\rho_b : T_b\mathcal{B} \to H^1(C_b, \Theta_{C_b})$, qui "code" les déformations au premier ordre de la courbe C_b contenues dans la famille. Notons $\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$ le faisceau des champs de vecteurs sur $\mathcal{C}$, tangents aux fibres de π. De la suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \to \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} \to \Theta_{\mathcal{C}} \to \pi^*\Theta_{\mathcal{B}} \to 0,$$

On tire la suite longue en cohomologie :

$$0 \to \pi_*\Theta_{\mathcal{C}} \to \Theta_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\rho} R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} \to \dots$$

et ρ est alors la version familiale des applications $\rho_b, b \in \mathcal{B}$, appelée application de Kodaira-Spencer de la famille.

Singularités Les espaces $M_{g,n}$ ne sont en général pas compacts. Ainsi par exemple, une courbe de genre 0 pointée en quatre points distincts est forcément isomorphe à $(\mathbb{CP}^1, 0, 1, \infty, p)$ où p est distinct de $0, 1, \infty$. Si l'on veut travailler avec une base compacte, on doit "compléter" $M_{0,4} = \mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ en $\overline{M_{0,4}} = \mathbb{CP}^1$. Mais on aura alors au-dessus des points particuliers $0, 1, \infty$ des courbes avec des points doubles, isomorphes aux voisinages de ces points à un voisinage de zéro dans $\{XY = 0\} \subset \mathbb{C}^2$.
Une courbe possédant potentiellement de telles singularités est appelée *courbe stable.*

3 Blocs conformes

Motivation : théories conformes en physique On se donne un nombre fini d'étiquettes Λ muni d'une involution $\lambda \mapsto \lambda^*$, décrivant les états de certaines particules. L'état sans particule correspond à une étiquette λ_0 fixée par l'involution. Une théorie rationnelle conforme des champs associe à toute courbe pointée $(C, p_1, \dots, p_n)$ avec chaque point p_i étiqueté par $\lambda_i \in \Lambda$, un espace vectoriel $V_C(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda})$, satisfaisant certaines conditions :

(i) *Une condition d'invariance conforme*, que l'on peut exprimer comme suit. Si z est une coordonnée complexe, une transformation conforme infinitésimale est donnée par $z \mapsto z + \varepsilon f(z)$, où $\varepsilon \in \mathbb{C}[\varepsilon]/_{\varepsilon^2}$, et $f(z)\frac{d}{dz}$ est un champ de vecteur local. Les champs locaux $L_n := z^{n+1}\frac{d}{dz}$, en particulier, satisfont : $[L_n, L_m] = (m - n)L_{n+m}$, et engendrent une algèbre de Lie de dimension infinie contenant $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}L_{-1} \oplus \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}L_1$ (i.e l'algèbre de Lie des transformations conformes de $\mathbb{CP}^1$). L'invariance conforme signifie que les espaces $V_C(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda})$ sont invariants sous ces transformations, i.e ne dépendent pas du choix des coordonnées z_i des p_i. Les physiciens demandent même que l'invariance vaille pour $f(z)$ seulement méromorphe, aussi l'algèbre de Lie doit être agrandie en une algèbre de Virasoro (comme l'algèbre des opérateurs de Sugawara).

(ii) *L'état sans particule doit se propager*, i.e $V_C(\overrightarrow{p}; \overrightarrow{\lambda}) \simeq V_C(\overrightarrow{p}, q; \overrightarrow{\lambda}, \lambda_0)$.

(iii) *Invariance sous* *, i.e $V_C(\overrightarrow{p}; \overrightarrow{\lambda}) \simeq V_C(\overrightarrow{p}; \overrightarrow{\lambda}^*)$.

(iv) Enfin, une *invariance sous l'éclatement d'une particule en particules d'états opposés en un point singulier* : concrètement, si $c \in C$ est un point singulier, $\tilde{C}$ est la normalisation de C, et a, b les point au-dessus de c, on doit avoir :

$$V_C(\overrightarrow{p}; \overrightarrow{\lambda}) \simeq \bigoplus_{\mu \in \Lambda} V_C(\overrightarrow{p}, a, b; \overrightarrow{\lambda}, \mu, \mu^*)$$

Bloc conforme associé à une courbe pointée Ici nous construisons ces espaces vectoriels sus-cités. Soit C une courbe projective lisse, connexe, pointée en $\overrightarrow{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. On étiquette chacun des p_i par $\lambda_i \in P_l$. Pour peu que l'on ait au moins un point p_i par composante irréductible de C, les développements en série de Laurent en les p_i nous donnent une injection :

$$\mathfrak{g}(C - \overrightarrow{p}) := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(C - \overrightarrow{p}) \hookrightarrow \hat{\mathfrak{g}}_n,$$

qui fait de $\mathfrak{g}(C - \overrightarrow{p})$ une sous-algèbre de Lie, par la formule des résidus. On peut ainsi considérer les espaces des invariants et coinvariants pour l'action de $\mathfrak{g}(C - \overrightarrow{p})$ sur $\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}}$:

$$\begin{cases} V_C(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda}) := \mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}} / \mathfrak{g}(C - \overrightarrow{p}).\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}} & \text{(espace des vacua)} \\ V_C^\dagger(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda}) := Hom_{\mathfrak{g}(C - \overrightarrow{p})}(\mathcal{H}_\lambda, \mathbb{C}) \simeq Hom_{\mathbb{C}}(V_C(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda}), \mathbb{C}) & \text{(espace des blocs conformes)} \end{cases}$$

On peut alors vérifier que l'association $(C, \overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda}) \to V_C(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda})$ définit bien une théorie des champs conforme :

Rationalité : Le théorème de Riemann-Roch nous assure alors que dès lors que $\overrightarrow{p} \neq \emptyset$, il y a assez de fonctions méromorphes sur C pour obtenir le résultat suivant (cf [2]) :

Théorème 3.1. *Les espaces de vacua et des blocs conformes sont de dimension finie.*

Propagation des vacua : On obtient le fort résultat suivant grâce aux contraintes algébriques pesant sur les $\mathcal{H}_\lambda$ (en particulier qu'ils sont engendrés comme $\hat{\mathfrak{g}}_-$-modules par leur sous-module V_λ) :

Théorème 3.2. - *Soient* $\overrightarrow{p} = \{p_1, \ldots, p_s\}$ *et* $\overrightarrow{q} = \{q_1, \ldots q_t\}$ *des ensembles de points de* C*, disjoints ;*

- *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_t$ *dans* P_l *;*

- *On fait agir* $\mathfrak{g}(C-\overrightarrow{p})$ *sur* V_{μ_j} *via le morphisme d'évaluation :* $X\otimes f \mapsto f(q_j)X$.

Alors les inclusions $V_{\mu_j} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\mu_j}$ *induisent un isomorphisme :*

$$\left[\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}} \otimes V_{\overrightarrow{\mu}}\right]_{\mathfrak{g}(C-\overrightarrow{p})} \xrightarrow{\sim} \left[\mathcal{H}_{\overrightarrow{\lambda}} \otimes \mathcal{H}_{\overrightarrow{\mu}}\right]_{\mathfrak{g}(C-\overrightarrow{p}-\overrightarrow{q})} = V_C\left(\overrightarrow{p} \cup \overrightarrow{q}, (\overrightarrow{\lambda}, \overrightarrow{\mu})\right)$$

On en déduit la propriété de propagation des vacua :

Corollaire 3.3. *Soit* $q \in C - \overrightarrow{p}$. *Il y a un isomorphisme canonique :*

$$V_C\left(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{\lambda}\right) \xrightarrow{\sim} V_C\left(\overrightarrow{p} \cup \{q\}, (\overrightarrow{\lambda}, 0)\right)$$

Remarquons au passage que l'hypothèse d'un point au moins par composante irréductible de C n'est pas si restrictive, car quitte à étiqueter les points supplémentaires par 0, ce corollaire nous assure que l'on peut en rajouter autant que l'on veut.

Dernières propriétés : Ce qui va jouer le rôle d'involution dans P_l est $\lambda \mapsto -\omega(\lambda)$, où ω est l'élément du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ renversant le signe des racines. Il se trouve que la propriété de factorisation citée ci-dessus est aussi valable dans notre théorie, de même que la propriété d'invariance sous cette involution.

4 Fibrés vectoriels des blocs conformes

Faisceaux des Vacua et des blocs conformes Lorsque l'on s'intéresse non plus à une courbe pointée, mais à une famille de courbes n-pointées $\mathcal{F} = (\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}, s_1, \ldots, s_n)$, on peut mettre la construction ci-dessus en famille, en tensorisant nos objets algébriques par $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$. On obtient alors un $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$-module. Sous les hypothèses de versalité de la famille, d'un morphisme π propre, plat, lisse entre variété quasi-projectives, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.1. *La formation du faisceau des vacua commute aux changements de base, i.e on a :*

$$\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} V_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathcal{F}) \simeq V_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathcal{F}_Y)$$

Ce résultat nous dit en particulier que la fibre en un point b du faisceau des vacua correspond à l'espace des vacua associé à la courbe $(C_b, s_1(b), \ldots, s_n(b))$. Aussi les fibres sont de dimension finie, et on a même plus fort :

Théorème 4.2. *Le faisceau des vacua est un* $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$*-module cohérent.*

Opérateurs différentiels Travaillons pour commencer avec une famille de courbes lisses (sans singularités). Notons $\Sigma_i = s_i(\mathcal{B})$, et Σ la réunion des Σ_i, sous-variétés de codimension 1 dans $\mathcal{C}$. Notons enfin $\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$ le faisceau des champs de vecteurs sur $\mathcal{C}$ tangents aux fibres de π. La versalité de la famille nous permet de construire un $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$-module :

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subset \bigoplus_{1\leq j\leq N} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}((\xi_j))\frac{d}{d\xi_j},$$

muni d'un crochet $[.,.]_d$, qui fait de la suite suivante une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$-algèbres de Lie :

$$0 \to \pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(*\Sigma) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\tau} \Theta_{\mathcal{B}} \to 0$$

En utilisant les opérateurs de Sugawara, on peut alors faire agir les éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ par opérateurs différentiels tordus sur le faisceau des vacua, i.e : on construit un opérateur linéaire $D : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to End_{\mathbb{C}_s}\left(V_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathcal{F})\right)$ satisfaisant, pour $\Phi \in V_{\overrightarrow{\lambda}}(\mathcal{F})$ et $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$:

$$D(\underline{l})(f.\Phi) = \tau(\underline{l})(f)\Phi + fD(\underline{l})(\Phi).$$

Liberté locale L'action construite ci-dessus impose alors une rigidité suffisante aux sections du faisceau des vacua pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 4.3. *Le faisceau des vacua est localement libre sur $\mathcal{B}$.*

Ce résultat reste valable si l'on se place sur une famille de courbes avec singularités (famille de courbes stables), mais on a alors un défaut de surjectivité dans la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$-algèbres de Lie présentée ci-dessus. Autrement dit, au voisinage des points singuliers, nous n'aurons pas assez d'opérateurs différentiels via $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Dans [9], la liberté locale sur le bord est démontrée en construisant suffisamment de sections formelles à partir des données du bord, en normalisant les courbes au-dessus des points singuliers. Comme corollaire de la liberté locale du faisceau des vacua, on obtient la propriété de changement de base pour le faisceau des blocs conformes, et on peut alors s'assurer de la dualité des deux faisceau, qui sont donc tout deux des espaces vectoriels.

Connexions projectivements plates Il se trouve que lorsque la base $\mathcal{B}$ d'une famille de courbes est assez "petite" pour être munie d'une bidifférentielle méromorphe ω symmétrique, de birésidu égal à un, alors on peut construire à partir de ω et des opérateurs différentiels sus-cités une connexion projectivement plate sur le fibré des blocs conformes associé à la famille. C'est le cas des espaces de modules $\overline{M_g, n}$. Les connexions alors obtenues sont appelées *KZ* (pour Khiznik-Zamolodchikov), et sont des connexions à singularités régulières sur le "bord" (i.e les points au-dessus desquels les courbes stables portent des singularités). Pour les genres 0 et 1, les connexions KZ sont même plates. Aussi, les sections horizontales pour la connexion formeront des trivialisations pour le fibré des blocs conformes. Ces sections satisfont à un système d'équations différentielles, appelées équations KZ.

Perspectives ouvertes par la théorie des blocs conformes et travaux récents

Géométrie des espaces $\overline{M_{g,n}}$: Quels sont les cônes amples des espaces $\overline{M_{g,n}}$ (i.e quels sont tous leurs plongements projectifs) ? Cette question formulée par Mumford dans les années 70 fait l'objet de la conjecture de Fulton, ou "conjecture F" : l'adhérence du cône ample de $\overline{M_{g,n}}$ serait le dual du cône des "courbes F", i.e des strates de codimension un du bord. Gibney, Keel et Morrison ont démontré en 2003 que pour vérifier cette conjecture, il suffit de la vérifier pour les espaces $\overline{M_{0,n}}$ (ce qui a été fait déjà pour $n \leq 7$).
C'est maintenant que les blocs conformes apportent une pierre à l'édifice : pour $\overrightarrow{\lambda} \in P_l^n$, notons $\mathbb{V}_{g,\overrightarrow{\lambda}}$ le fibré des blocs conformes sur $\overline{M_{g,n}}$, associé aux poids λ_i.

Lemme 4.4. *([4])*
Les fibrés vectoriels $\mathbb{V}_{0,\overrightarrow{\lambda}}$ sont engendrés par leurs sections globales. En particulier, leurs fibrés en droite déterminant sont dans l'adhérence du cône ample de $\overline{M_{0,n}}$ (ce sont des fibrés en droites nef).

Les blocs conformes nous donnent donc accès à une partie du cône nef de $\overline{M_{0,n}}$, via les fibrés déterminants. Mais cette partie engendre-t-elle le cône nef tout entier ? La question reste ouverte.
Toujours dans [4], N. Fakhruddin donne une formule pour les premières classes de Chern des fibrés $\mathbb{V}_{g,\overrightarrow{\lambda}}$ pour $g = 0$ et $g = 1$, en fonction des résidus de la connexion KZ sur le bord. Le calcul est alors explicite pour $(g, n) = (0, 4)$ et $(g, n) = (1, 1)$, ce qui devrait être suffisant pour déterminer les premières classes de Chern pour tout (g, n). Les calculs explicites sont cependant délicats à mener dans les cas les plus généraux, aussi la question de l'espace ambient dans lequel "vivent" les classes de Chern de tous les blocs conformes (rappelons que $\mathfrak{g}$, l et $\overrightarrow{\lambda}$ peuvent varier) reste ouverte. En particulier, sont-elles toutes engendrées par des diviseurs ?

Références

[1] A. Beauville. Conformal blocks, fusion rules and the verlinde formula. *Arxiv*, 1994.

[2] C.Sorger. La formule de verlinde. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/1995.*

[3] H. Esnault et E. Viehweg. Logarithmic de rham complexes ans vanishing theorems. *Invent. Math. 86*, 1986.

[4] Najmuddin Fakhruddin. Chern classes of conformal blocs. *ArxiV*, Mai 2011.

[5] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer, 1977.

[6] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* springer, 1972.

[7] Victor G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras.* Progress in Mathematics, 1983.

[8] Toshitake Kohno. *Conformal Field Theory and Topology.* American Mathematical Society, 2002.

[9] K.Ueno. *Conformal field theory with gauge symmetry.* Fields Institute Monographs, 2008.

[10] J-P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents. 1954.

[11] A. Tsuchiya, K. Ueno, and Y. Yamada. Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries. In *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, Advanced studies in pure mathematics vol.19*, 1989.