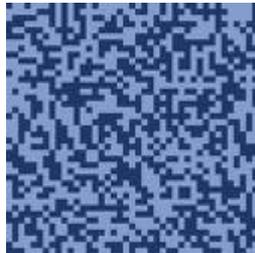


# Introduction au modèle d'Ising en champ aléatoire

Amal Attouchi et Angelina Roche

24 août 2008



*"L'ordre est le plaisir de la raison mais le désordre est le délice de  
l'imagination "*  
*Paul Claudel*

Sujet proposé par Thierry Bodineau

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Etude du modèle avec champ constant</b>	<b>4</b>
2.1	Description du modèle . . . . .	4
2.2	Petite introduction au formalisme de Gibbs . . . . .	6
2.3	Argument de Peierls . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Le modèle d'Ising avec champ aléatoire</b>	<b>13</b>
3.1	L'argument d'Imry-Ma (1975) . . . . .	13
3.2	Absence de transition de phase . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Simulations du modèle par une méthode Monte Carlo</b>	<b>26</b>
4.1	Le modèle d'Ising vu comme une chaîne de Markov . . . . .	26
4.2	Résultats de l'algorithme de Monte Carlo . . . . .	27
4.2.1	Simulation en champ nul . . . . .	27
4.2.2	Simulation en champ aléatoire . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>29</b>

# 1 Introduction

Le modèle d'Ising apparaît dans les années 1920 avec les travaux de Lenz et de son doctorant Ernest Ising. Le problème qu'ils se posaient était de trouver un modèle apte à décrire le phénomène d'aimantation spontanée concernant le ferromagnétisme. Dans sa thèse (1924) E. Ising s'intéressa au problème à une dimension, il était déçu de ne pas pouvoir exhiber une transition de phase et il en conclut (prématurément) que le modèle était inadéquat.

Heureusement l'histoire ne s'arrête pas là, en 1936 Peierls montra qu'en dimension 2 le modèle d'Ising subit une transition de phase dans le sens qu'à basse température et à champ externe nul il y a plusieurs mesures de Gibbs, tandis qu'à haute température il y a unicité. Onsager (1944) en donna la solution exacte en calculant la fonction de partition.

## 2 Etude du modèle avec champ constant

### 2.1 Description du modèle

On considère un métal dans lequel chaque atome est doté d'un moment magnétique orienté verticalement appelé spin qui ne prend que deux valeurs 1 ou -1. On note  $\Lambda$  l'ensemble des positions des atomes, la variable spin au site  $i \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  ( $\Lambda$  étant supposé fini) est notée  $\sigma_i$ , les spins sont supposés interagir avec un potentiel d'interaction qui ne prend en compte que les interactions entre plus proches voisins.

On suppose de plus que le métal est plongé dans un champ magnétique uniforme  $h$ . L'espace des configurations est  $\Omega_\Lambda = \{-1, 1\}^\Lambda$ . L'énergie pour une configuration de spins donnée  $\sigma_\Lambda = \{\sigma_i\}_{i \in \Lambda}$  est alors :

$$H_\Lambda^h(\sigma) = - \sum_{\{i,j\}, i \neq j} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in \Lambda} h \sigma_i. \quad (1)$$

Ce qu'on cherche à définir est la probabilité d'une configuration donnée pour une température donnée. Pour cela on introduit la fonction de poids de Boltzman :  $e^{-\beta H}$  où  $\beta = \frac{1}{T}$  avec  $T$  la température. Cette fonction est proportionnelle à la probabilité cherchée. Nous devons donc normaliser. Pour cela on doit diviser par la somme des poids de toutes les configurations possibles. La somme est appelée fonction de partition et elle est notée  $Z_{\Lambda, \beta}^h$ . On la définit par :

$$Z_{\Lambda, \beta}^h = \sum_{\sigma = \{\sigma_i\}_{i \in \Lambda}} \exp(-\beta H_\Lambda^h(\sigma)). \quad (2)$$

On définit alors une probabilité sur l'espace  $(\Omega_\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda)$  (la tribu  $\mathcal{F}_\Lambda$  étant l'ensemble des parties de  $\Omega_\Lambda$ ) par :

$$\mu_{\Lambda, \beta}^h(\sigma) = \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}^h} \exp(-\beta H_\Lambda^h(\sigma)). \quad (3)$$

Lorsque la température  $T$  est petite, c'est l'effet de regroupement qui domine (il est très improbable d'observer des spins distincts sur des sites voisins) ce qui fait que seules les configurations de basses énergies sont susceptibles d'être visibles, tandis qu'à haute température, cet effet disparaît et tous les spins se mélangent de manière parfaitement homogène.

*Condition au bord.*

Etant donnée une configuration  $\sigma \in \Omega_\Lambda$  et  $\eta \in \Omega$  l'espace des configurations

sur  $\mathbb{Z}^d$  entier, on constuit une configuration  $(\sigma \wedge \eta)$  par

$$(\sigma \wedge \eta)_i = \sigma_i \quad \text{si } i \in \Lambda \quad (4)$$

$$(\sigma \wedge \eta)_i = \eta_i \quad \text{sinon} \quad (5)$$

$\eta$  est la condition au bord. Cette dernière peut favoriser un type de spin au voisinage du bord de  $\Lambda$ . La question est de déterminer si cette information se propage dans  $\Lambda$  tout entier. La mesure de Gibbs avec condition au bord est alors

$$\mu_{\Lambda,\beta}^{\eta,h}(\sigma) = \frac{\exp(-\beta H_{\Lambda}^{\eta,h}(\sigma))}{Z_{\Lambda,\beta}^{\eta,h}}, \quad (6)$$

où le nouvel Hamiltonien est :

$$H_{\Lambda}^{\eta,h}(\sigma) = - \sum_{i,j \in \Lambda, i \sim j} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in \Lambda} (h + \sum_{j \in \Lambda^c, i \sim j} \eta_j) \sigma_i. \quad (7)$$

Parmi les différentes conditions aux bords, deux sont particulièrement intéressantes : celle où tous les  $\eta_i$  sont égaux à 1 appelée condition aux bords + et celle où ils sont tous égaux à -1 appelée condition aux bords -. Les mesures de Gibbs correspondantes sont simplement notées  $\mu_{\Lambda,\beta}^{+,h}$  et  $\mu_{\Lambda,\beta}^{-,h}$ .

#### *Transition de phase.*

On voit que pour  $\beta \neq 0$  un spin va avoir tendance à prendre la même valeur que la majorité de ses voisins. On peut se demander si cette interaction va conduire à un ordre dans tout le système. Commençons alors par regarder deux cas extrêmes.

1.  $\beta = 0$ . Dans ce cas les spins forment une famille de variables aléatoires indépendantes. La connaissance de la valeur d'un spin ne donne aucune information sur l'état des autres.
2.  $\beta = \infty$ . Dans ce cas les spins sont fortement dépendants les uns des autres. la connaissance de l'état d'un spin détermine complètement la configuration.

Le problème est de déterminer quel type de comportement a lieu pour des valeurs intermédiaires de  $\beta$ .

Nous définissons l'aimantation pour tout  $h$  non nul comme étant :

$$m(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\sum_{i \in \Lambda_n} \sigma_i}{n^d} \mu_{\Lambda_n, \beta}^h(d\sigma) \quad (8)$$

où  $\Lambda_n = [-n, n]$ .

L'existence de cette limite est admise pour une démonstration complète nous

renvoyons à [3].

En dimension supérieure à 2 on peut montrer qu'il y a une transition de phase i.e il existe une valeur critique finie notée  $\beta_c$  et appelée température inverse critique telle que :

1. Si  $0 < \beta < \beta_c$  alors  $m(\beta, h)$  converge vers 0 quand  $h$  tend vers 0 positivement.
2. Pour  $\beta > \beta_c$ ,  $m(\beta, h)$  converge vers une constante strictement positive quand  $h$  tend vers  $0^+$  (i.e le système reste aimanté quand on supprime le champ brisant ainsi la symétrie de l'Hamiltonien).

La valeur de  $\beta_c$  dépend de la dimension.

Intuitivement, on peut dire qu'en champ magnétique non nul le système "hésite" entre deux comportements différents, et que l'introduction d'un champ non nul arbitraire suffit pour faire pencher la balance dans la direction du champ.

Il y a une autre façon très utile de comprendre la présence de cette transition de phase comme résultant d'une sensibilité extrême du système à certaines perturbations : au lieu (ou en plus) de briser partout la symétrie entre les deux espèces de spin par l'introduction d'un champ magnétique, on peut également considérer l'effet des différentes conditions aux bords.

Nous noterons simplement

$$m^+(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\sum_{i \in \Lambda_n} \sigma_i}{n^d} \mu_{\Lambda_n, \beta}^{+, 0}(d\sigma)$$

$$m^-(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\sum_{i \in \Lambda_n} \sigma_i}{n^d} \mu_{\Lambda_n, \beta}^{-, 0}(d\sigma).$$

## 2.2 Petite introduction au formalisme de Gibbs

Jusqu'ici nous n'avons considéré que le modèle confiné à un volume fini, le but est d'introduire une mesure adaptée (mesure de Gibbs) au volume infini. Une manière de définir le modèle sur  $\mathbb{Z}^d$  tout entier (volume infini) est de considérer une suite de parties finies  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ , où  $\Lambda_n = [-n, n]^d$ , et une suite de conditions au bord  $(\eta)_n$  et de prendre la limite de la suite de mesures  $(\mu_{\Lambda_n, \beta}^{\eta, h})_n$ .

On dit qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est locale si elle est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_\Lambda$  pour un  $\Lambda$  fini (c'est à dire qu'elle ne dépend que des spins situés à l'intérieur de  $\Lambda$ ). On dira qu'une suite de mesures  $(\mu_n)_n$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  converge

vers la mesure  $\mu$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f) = \mu(f)$ , pour toute fonction  $f$  locale.

On appelle mesure de Gibbs en volume infini toute valeur d'adhérence de la suite  $(\mu_{\Lambda, \beta}^{\eta, h})_n$ . Il n'y a pas nécessairement unicité de la mesure limite associée à un couple  $(\beta, h)$  donné. On dira qu'il y a transition de phase en  $(\beta, h)$  si il y a non unicité de la mesure de Gibbs.

**Théorème 1** Soit  $f_{\Lambda}^{\eta}(\beta, h) = \frac{\ln Z_{\Lambda, \beta}^{\eta, h}}{|\Lambda|}$ . La limite

$$f(\beta, h) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} f_{\Lambda}^{\eta}(\beta, h)$$

existe est indépendante de  $\eta$  et de la suite  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ .

La quantité  $f(\beta, h)$  est appelée énergie libre.

*Démonstration.*

*Existence de la limite.* Le plus simple est de commencer par regarder ce qui se passe quand on fixe des conditions aux bords libres (i.e les  $\eta_i$  nuls) et précisons que si on ne met rien comme indice en haut c'est pour faire référence à des conditions aux bords libres. La preuve se fait alors en deux étapes : d'abord pour des boîtes cubiques puis pour des boîtes générales. Soit  $B_n = [0, 2^n]^d$ . L'idée est de comparer l'énergie libre associée à la boîte  $B_{n+1}$  à celle associée à  $B_n$ . Si l'on décompose  $B_{n+1}$  en  $2^d$  copies disjointes de  $B_n$ , notées  $(B_n^1, \dots, B_n^{2^d})$  alors l'énergie provenant de l'interaction entre les spins de 2 boîtes différentes est bornée par  $\beta$  multiplié par le nombre de sites dans une face de  $B_n$ , soit  $2^{n(d-1)}$ . Comme il y a exactement  $\frac{d2^d}{2}$  faces à considérer, on en déduit que

$$\begin{aligned} Z_{B_{n+1}, \beta}^h &= \sum_{\sigma \in \Omega_{B_{n+1}}} \prod_{i \sim j, i, j \in B_{n+1}} e^{-\beta \sigma_i \sigma_j} \prod_{i \in B_{n+1}} e^{-h \sigma_i} \\ &\geq e^{-\beta d 2^{(n+1)(d-1)}} \prod_{k=1}^{2^d} \sum_{\sigma \in \Omega_{B_n^k}} \prod_{i \sim j, i, j \in B_n^k} e^{-\beta \sigma_i \sigma_j} \prod_{i \in B_n^k} e^{-h \sigma_i} \\ &= e^{-\beta d 2^{(n+1)(d-1)}} (Z_{B_n, \beta}^h)^{2^d} \end{aligned} \quad (9)$$

et donc que

$$f_{B_{n+1}}(\beta, h) = 2^{-d(n+1)} \ln Z_{B_{n+1}, \beta}^h \quad (10)$$

$$\geq 2^{-d(n+1)} (\ln Z_{B_n, \beta}^h)^{2^d} - \frac{\beta d 2^{(n+1)(d-1)}}{2^{d(n+1)}} \quad (11)$$

$$= f_{B_n}(\beta, h) - \beta 2^{-(n+1)}. \quad (12)$$

On procède de la même façon pour avoir une borne de l'autre direction et on arrive à

$$|f_{B_{n+1}}(\beta, h) - f_{B_n}(\beta, h)| \leq \beta d 2^{-(n+1)} \quad (13)$$

d'où l'existence de la limite cherchée suivant les cubes  $B_n$ . Pour des  $\Lambda$  quelconques nous donnons juste l'idée de la preuve qui consiste à recouvrir ces  $\Lambda$  par des cubes  $B_k$  et d'essayer de borner la différence des énergies libres pour le domaine recouvert et le domaine initial.

*Indépendance des conditions aux bords.*

Le fait que la même limite est atteinte quelle que soit la condition au bord vient du fait que pour tout  $\eta$  nous avons :

$$e^{\beta d |\partial \Lambda|} Z_{\Lambda, \beta}^h \geq Z_{\Lambda, \beta}^{\eta, h} \geq e^{-\beta d |\partial \Lambda|} Z_{\Lambda, \beta}^h$$

et la propriété suivante :  $\frac{|\partial \Lambda_k|}{|\Lambda_k|} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$  nous permet de conclure.  $\square$

Nous avons le résultat suivant que nous admettrons :

$$\frac{\partial}{\partial h^+} f(\beta, h) = \int \sigma_0 \mu_{\beta}^{+, h}(d\sigma) \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial h^-} f(\beta, h) = \int \sigma_0 \mu_{\beta}^{-, h}(d\sigma). \quad (15)$$

**Proposition 1** Soit  $\Lambda_n = [-n, n]^d$ . Alors

$$\int \sigma_0 \mu_{\beta}^{+, h}(d\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\Lambda_n|^{-1} \sum_{i \in \Lambda_n} \sigma_i \mu_{\Lambda_n, \beta}^{+, h}(d\sigma),$$

et similairement pour  $\int \sigma_0 \mu_{\beta}^{-, h}(d\sigma)$ .

La démonstration est admise.

Le but de notre exposé est de savoir dans quels cas il y a unicité de la mesure de Gibbs.

### 2.3 Argument de Peierls

Dans le cas du modèle d'Ising notre intuition nous pousse à prévoir que pour des températures assez basses la mesure de Gibbs devrait favoriser les configurations de basses énergies. Si le champ  $h$  est non nul il y a une unique configuration qui minimise l'énergie, c'est celle où tous les spins sont du signe de  $h$ . Si le champ est nul il y a deux configurations qui minimisent l'énergie

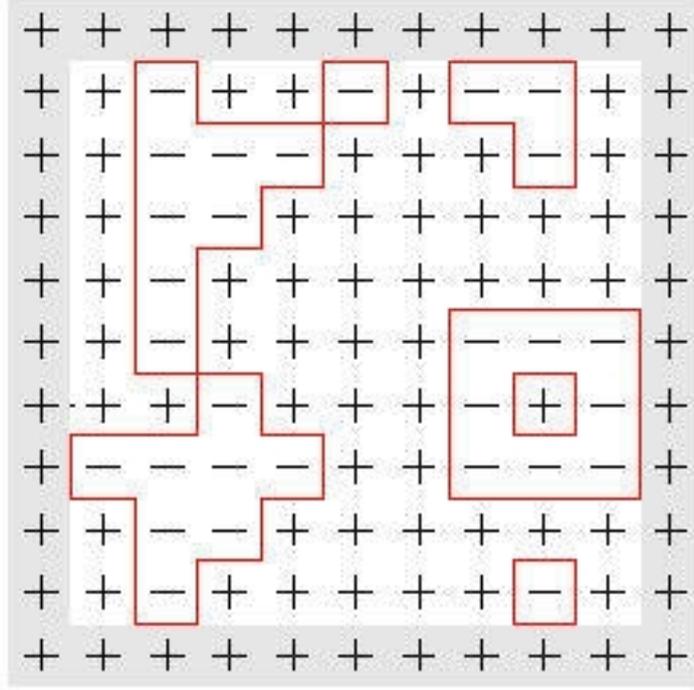


FIG. 1 – contours de Peierls

à savoir celle où tous les  $\sigma_i$  sont égaux à 1 et celle où tous les  $\sigma_i$  sont égaux à -1. La preuve de cette coexistence repose sur l'argument de Peierls.

**Théorème 2** *On se place en dimension 2. Si on définit la température inverse critique par  $\beta_c = \sup \{ \beta > 0 : \int \sigma_0 \mu_\beta^+(d\sigma) = 0 \}$  alors  $\beta_c$  est bien défini et  $0 < \beta_c < \infty$ .*

*Démonstration.*

Soit  $\Lambda$  un carré symétrique de  $\mathbb{Z}^2$ , on note  $\mu_{\Lambda,\beta}^+$  la mesure de Gibbs en volume fini, avec des + à l'extérieur de  $\Lambda$  et avec  $\underline{h} = 0$ . Le nombre  $\beta_c$  est bien défini car la fonction  $\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma_0)$  est positive et croissante pour  $\beta > 0$ ; en effet la croissance est due à

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \int \sigma_0 \mu_{\Lambda,\beta}^+(d\sigma) \right) = \sum_{i,j \in \Lambda} \left( \int \sigma_0 \sigma_i \sigma_j \mu_{\Lambda,\beta}^+(d\sigma) - \int \sigma_0 \mu_{\Lambda,\beta}^+(d\sigma) \int \sigma_i \sigma_j \mu_{\Lambda,\beta}^+(d\sigma) \right) \geq 0 \quad (16)$$

(par l'inégalité GKS). On en déduit ensuite que  $\beta \rightarrow \mu_\beta^+(\sigma_0)$  est croissante, ce qui conclut la démonstration de la première partie du théorème.

Pour montrer que  $\beta_c$  est fini : nous allons montrer que  $\int \sigma_0 \mu_\beta^+(d\sigma) > 0$  pour  $\beta$  assez grand en montrant que  $\int \sigma_0 \mu_{\Lambda,\beta}^+(d\sigma) \geq \text{const} > 0$  pour  $\beta$  assez grand et pour tout carré  $\Lambda$ . Comme

$$\begin{aligned} \int \sigma_0 \mu_{\Lambda,\beta}^+(d\sigma) &= \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma_0 = 1) - \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma_0 = -1) \\ &= 1 - 2\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma_0 = -1). \end{aligned}$$

Il suffit de prouver la borne uniforme :

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma_0 = -1) \leq \frac{1}{2} - \delta < \frac{1}{2} \quad (17)$$

pour  $\beta$  assez grand et pour tout  $\Lambda$ .

L'idée de Peierls est d'attribuer un ensemble de courbes fermées à chaque configuration  $\sigma \in \Omega_\Lambda$ . On définit la frontière de  $\Lambda$ ,  $\partial\Lambda$  comme les sites  $j \in \Lambda^c$  qui sont voisins de  $\Lambda$ , c'est à dire tous les sites de  $\Lambda^c$  qui interagissent avec les sites de  $\Lambda$ . Nous allons fixer tous les spins de la frontière de  $\Lambda$  à  $+1$ .

Pour chaque configuration  $\sigma \in \Omega_\Lambda$ , nous allons tracer un segment de longueur 1 entre chaque paire de spins opposés dans  $\Lambda \cup \partial\Lambda$ . Les courbes fermées obtenues sont appelées contours, si deux contours se touchent en un coin, nous les coupons en direction des spins qui valent  $-1$ .

Nous appellerons  $\Theta_k$  l'ensemble des contours de longueur  $k$  qui entourent l'origine. Nous avons :

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma_0 = -1) \leq \sum_{k \geq 1} \sum_{\gamma \in \Theta_k} \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma \text{ contient } \gamma). \quad (18)$$

Nous allons maintenant donner une estimation du cardinal de  $\Theta_k$  et de la probabilité que  $\sigma \in \Omega_\Lambda$  contienne un contour dans  $\Theta_k$ . Le lemme suivant donne notamment le résultat (attendu) que plus  $k$  est grand, plus la probabilité d'avoir un contour de longueur  $k$  est petite indépendamment de  $\Lambda$ , et donc avec des conditions aux bords  $+$  la moyenne des spins à la limite thermodynamique devient arbitrairement proche de 1.

**Lemme 1** *Pour tout carré symétrique  $\Lambda$  de  $\mathbb{Z}^2$  :*

1.  $|\Theta_k| \leq k^2 3^k$ .
2. *Pour tout contour  $\gamma \in \Theta_k$  de longueur  $k$  :*

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma \text{ contient } \gamma) \leq \exp(-k\beta). \quad (19)$$

*Démonstration.* Pour démontrer le (1), nous allons utiliser un argument de dénombrement. Un contour de longueur  $k$  qui entoure l'origine soit passe juste à droite de l'origine, soit il peut-être obtenu par translation d'un contour qui passe par l'origine. Comme chaque segment de longueur 1 peut pointer suivant trois directions, le nombre de contours de longueur  $k$  qui passent juste à droite de l'origine est au plus  $3^k$ . Le nombre de translations possible est au plus  $k^2$  ( $k$  horizontalement et  $k$  verticalement). D'où le résultat.

Pour la démonstration du (2), nous allons étudier les symétries du Hamiltonien. Fixons un contour  $\gamma \in \Theta_k$ . Soit  $\Omega_{\Lambda, \gamma}$  l'ensemble des configurations  $\sigma \in \Omega_{\Lambda}$  qui contiennent  $\gamma$ . Nous associons à chaque  $\sigma \in \Omega_{\Lambda, \gamma}$  une nouvelle configuration  $\tilde{\sigma} \in \Omega_{\Lambda}$  définie par :

$$\tilde{\sigma}_j = \begin{cases} \sigma_j & \text{si } j \text{ est hors du contour } \gamma \\ -\sigma_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons l'Hamiltonien :

$$H_{\Lambda}^{\tilde{\sigma}, +}(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{i, j \in \Lambda, i \sim j} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c} \tilde{\sigma}_j \sigma_i.$$

Pour tout segment de longueur un du contour  $\gamma$ , l'application  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$  change un terme de la forme  $\sigma_i \sigma_j = -1$  ou  $\tilde{\sigma}_j \sigma_i = -1$  ( $i$  et  $j$  de chaque côté du segment) de  $-1$  à  $1$ . Il n'y a pas d'autre changement. Donc  $H_{\Lambda}^{\bar{\sigma}, +}(\sigma)$  décroît de 1 pour chaque segment de longueur 1 de  $\gamma$  et donc  $H_{\Lambda}^{\bar{\sigma}, +}(\bar{\sigma}) = H_{\Lambda}^{\tilde{\sigma}, +}(\sigma) - k$  si  $\gamma$  a pour longueur  $k$ . Donc

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma \in \Omega_{\Lambda} : \sigma \text{ contient } \gamma) &= \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda, \gamma}} \exp[-\beta H_{\Lambda}^{\tilde{\sigma}, +}(\sigma)]}{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}} \exp[-\beta H_{\Lambda}^{\tilde{\sigma}, +}(\sigma)]} \\ &= \exp(-k\beta) \frac{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda, \gamma}} \exp[-\beta H_{\Lambda}^{\bar{\sigma}, +}(\bar{\sigma})]}{\sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda}} \exp[-\beta H_{\Lambda}^{\bar{\sigma}, +}(\sigma)]}. \end{aligned}$$

Chaque configuration  $\bar{\sigma}$  qui apparaît dans la somme sur  $\Omega_{\Lambda, \gamma}$ , apparaît au plus une fois, car deux configurations différentes contenant  $\gamma$  ne peuvent être associées au même  $\bar{\sigma}$ . Donc la somme sur  $\Omega_{\Lambda, \theta}$  est positive et inférieure à la somme sur  $\Omega_{\Lambda}$ . Ceci prouve (19).  $\square$

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une aimantation spontanée pour le modèle d'Ising sur  $\mathbb{Z}^2$  pour  $\beta$  assez grand, ce qui terminera la preuve du théorème 2.

Par (18) et le lemme,

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \Omega_\Lambda : \sigma_0 = -1) \leq f(\beta) = \sum_{k \geq 1} k^2 3^k \exp(-k\beta). \quad (20)$$

Si  $\beta > \log 3$ , alors  $f(\beta)$  est fini, et  $f(\beta) \rightarrow 0$  quand  $\beta \rightarrow \infty$ . Donc, si on fixe  $\delta > 0$ , nous pouvons trouver  $\bar{\beta}$  tel que  $f(\beta) \leq \frac{1}{2} - \delta < \frac{1}{2}$  pour tout  $\beta \geq \bar{\beta}$ . Comme  $\bar{\beta}$  est indépendant de  $\Lambda$ , nous avons montré (17) et nous avons fini.  $\square$

La démonstration que nous avons faite concerne le champ nul, il nous reste à étudier l'effet du champ magnétique  $h$ . Etant donné que l'argument de Peierls ne marche pas à cause de la perte de symétrie, on admet qu'il y a toujours unicité de la mesure de Gibbs lorsque  $h$  est non nul, c'est à dire pas de transition de phase. Il y a deux manières de démontrer ce résultat (mais que nous n'aborderons pas ici), soit montrer que l'énergie libre est une fonction analytique de  $h \neq 0$  soit montrer que  $\int \sigma_0 \mu_\beta^{+,h}(d\sigma)$  est une fonction concave et donc continue de  $h$ .

### 3 Le modèle d'Ising avec champ aléatoire

Dans les années 1980 se développe l'étude du modèle d'Ising avec champ aléatoire, la question étant de savoir si on a encore une aimantation spontanée à basse température si le système est soumis à un champ aléatoire de moyenne nulle. Les premiers résultats dans ce domaine viennent avec les travaux de Imry et Ma (1975).

Nous allons définir un nouvel Hamiltonien :

$$H_{\Lambda}^{h[\omega]}(\sigma) = - \sum_{i,j \in \Lambda, i \sim j} \sigma_i \sigma_j + \epsilon \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i, \quad (21)$$

où le champ aléatoire  $h = \{h_i[\omega]\}_{i \in \Lambda}$  est donné par des variables aléatoires i.i.d de loi de Bernouilli de paramètre  $\frac{1}{2}$ . On notera  $(\mathcal{E}, \mathbb{P}, \mathcal{P})$  l'espace où vivent les  $h[\omega]$ .

*Heuristique pour l'existence d'une transition de phase pour  $d=3$ .*

Nous choisissons l'état fondamental où tous les spins pointent vers le haut c'est à dire tous les  $\sigma_i$  valent 1 et on regarde un contour de longueur  $N$ . Si on devait renverser simultanément les spins dans ce contour l'énergie d'interaction entre spins serait inchangée puisque les spins sont encore alignés parallèlement les uns aux autres. Si on considère maintenant l'effet du champ aléatoire alors l'énergie due à ce champ est simplement la somme de  $N^d$  variables i.i.d  $h_i$  et elle peut être positive ou négative.

L'énergie provenant de l'interaction entre spins dans une configuration où les spins pointent en bas dans une région  $[-N, N]^d$  avec des plus à l'extérieur de la région  $[-N, N]^d$  est de l'ordre de  $N^{d-1}$ . La contribution du champ aléatoire est nulle en moyenne mais comme chaque  $h_i$  fluctue, la contribution des fluctuations est de l'ordre de  $N^{\frac{d}{2}}$  (par le théorème central limite). En dimension 2 les deux contributions sont du même ordre et on ne peut trancher. En dimension supérieure ou égale à 3 l'énergie des contours domine les fluctuations dues au champ aléatoire et on peut s'attendre à l'existence d'une transition de phase.

Bricmont et Kupianen ont montré en 1988 l'existence d'une transition de phase pour un faible désordre pour  $d \geq 3$ .

#### 3.1 L'argument d'Imry-Ma (1975)

L'argument d'Imry-Ma repose sur une extension de l'argument de Peierls mais la symétrie n'a plus lieu à cause de l'introduction d'un champ aléatoire.

Nous aimerions pouvoir montrer à l'analogie de l'argument de Peierls pour champ nul que

$$\mathbb{P} \left[ \left\{ h \text{ pour lesquels } \mu_\beta^{h[\omega]}[\exists \gamma, \text{ tel que } 0 \in \text{int}\gamma] < \frac{1}{2} \right\} \right] > 0, \quad (22)$$

où  $\text{int}\gamma$  désigne le domaine délimité par le contour  $\gamma$ .

Dans cette perspective notre but est de montrer que

$$\mathbb{P} \left[ \exists \gamma, 0 \in \text{int}\gamma \quad \left| \ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], +} - \ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], -} \right| > \beta |\gamma| \right]$$

est relativement négligeable<sup>1</sup>. Pour cela on procède en plusieurs étapes. On présente d'abord un argument de concentration de la mesure.

**Théorème 3** *Si  $f : [-1, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dont les lignes de niveaux sont convexes et si  $f$  est continue et lipschitzienne alors si  $X_1 \dots X_N$  sont des variables i.i.d. à valeurs dans  $[-1, 1]$  et  $A = f(X_1, \dots, X_N)$  alors :*

$$\mathbb{P}[|A - \mathbb{E}[A]| \geq z] \leq 4 \exp \left( -\frac{z^2}{16C_{Lip}^2} \right). \quad (23)$$

Une preuve dans un cadre simplifié est présentée en annexe.

**Lemme 2** *Soit  $\gamma$  un contour fixé. Supposons que le champ aléatoire est symétrique et borné (ou Gaussien), alors il existe une constante  $C$  finie telle que pour tout  $z \geq 0$*

$$\mathbb{P}[|\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], +} - \ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], -}| > z] \leq C \exp \left( -\frac{z^2}{\epsilon^2 \beta^2 C^2 |\text{int}\gamma|} \right). \quad (24)$$

*Démonstration.* La distribution du champ étant supposée symétrique on a

$$\mathbb{E}[\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], +}] = \mathbb{E}[\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], -}]. \quad (25)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[ |\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], +} - \ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], -}| > z \right] \\ & \leq \mathbb{P} \left[ |\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], +} - \mathbb{E}[\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], +}]| + |\mathbb{E}[\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], -}] - \ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], -}| > z \right] \\ & \leq 2\mathbb{P} \left[ |\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], +} - \mathbb{E}[\ln Z_{\text{int}\gamma, \beta}^{h[\omega], +}]| > \frac{z}{2} \right]. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $|\gamma|$  est la longueur du contour

Pour tout  $h \in \mathbb{R}^N$  posons  $\varphi(h_1 \cdots h_N) = \ln Z_{int\gamma, \beta}^{h, +}$  avec  $N = |int\gamma|$  alors  $\varphi$  est continue convexe, en effet soit  $\alpha$  un réel compris entre 0 et 1 alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha h + (1 - \alpha)h') &= \ln \sum_{int\gamma} \left( e^{-\alpha\beta H_{int\gamma}^{h, +} - (1-\alpha)\beta H_{int\gamma}^{h', +}} \right) \\ &\leq \ln \left[ \left( \sum_{int\gamma} e^{-p\alpha\beta H_{int\gamma}^{h, +}} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{int\gamma} e^{-q(1-\alpha)\beta H_{int\gamma}^{h', +}} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &\leq \frac{1}{p} \ln \sum_{int\gamma} e^{-\alpha\beta H_{int\gamma}^{h, +}} + \frac{1}{q} \ln \sum_{int\gamma} e^{-\alpha\beta H_{int\gamma}^{h', +}} \\ &= \alpha\varphi(h) + (1 - \alpha)\varphi(h'), \end{aligned}$$

où on a appliqué l'inégalité de Hölder avec  $p = \frac{1}{\alpha}$  et  $q$  son exposant conjugué.  $\varphi$  est également lipschitzienne, en effet : <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} |\varphi(h) - \varphi(h')| &\leq \sup_{\tilde{h}} \left| \sum_{j \in int\gamma} [h_j - h'_j] \frac{\partial \ln Z_{int\gamma, \beta}^{\tilde{h}, +}}{\partial \tilde{h}_j} \right| \\ &\leq \epsilon \beta \sup_{\tilde{h}} \left| \mu_{int\gamma, \beta}^{\tilde{h}, +}(\sigma_i) \right| \sum_{j \in int\gamma} |h_j - h'_j| \\ &\leq \epsilon \beta \sqrt{|int\gamma|} \|h - h'\|, \end{aligned}$$

où la première inégalité vient du théorème des accroissements finis, la deuxième d'une majoration de la dérivée de  $\ln Z_{int\gamma, \beta}^{h, +}$  et la troisième vient de l'inégalité de Cauchy Schwartz et du fait que  $\left| \mu_{int\gamma, \beta}^{h, +}(\sigma_i) \right|$  est inférieure à 1. Le théorème 3 nous donne alors l'inégalité cherchée.

Si on revient maintenant à ce qu'on cherche à estimer, c'est à dire :

$$\mathbb{P} \left[ \left\{ h \text{ tel que } \mu_{\beta}^{h[\omega]}[\sigma_0 = -1] < \frac{1}{2} \right\} \right] > 0. \quad (26)$$

On aura alors :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left[ \left\{ h \text{ tels que } \mu_{\beta}^{h[\omega]}[\sigma_0 = -1] < \frac{1}{2} \right\}^c \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ \left\{ h \text{ tel que } \mu_{\beta}^{h[\omega]}[\exists \gamma', \text{ tels que } 0 \in int\gamma'] < \frac{1}{2} \right\}^c \right] \quad (27) \\ &= \mathbb{P} \left[ \left( \mathbb{1}_{\exists \gamma, 0 \in int\gamma} \left| \ln Z_{int\gamma, \beta}^{h[\omega], +} - \ln Z_{int\gamma, \beta}^{h[\omega], -} \right| > \beta|\gamma| \right) + \mathbb{1}_{\nexists \gamma, 0 \in int\gamma} \left| \ln Z_{int\gamma, \beta}^{h[\omega], +} - \ln Z_{int\gamma, \beta}^{h[\omega], -} \right| > \beta|\gamma| \right) \{ \mathcal{A}(h) \} \right] \end{aligned}$$

<sup>2</sup>  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne :  $\|h\| = (\sum_i h_i^2)^{\frac{1}{2}}$

où  $\mathcal{A}(h) = \left\{ h \text{ tels que } \mu_\beta^{h[\omega]}[\exists \gamma', \text{ tel que } 0 \in \text{int}\gamma'] < \frac{1}{2}]^C \right\}$ .

Si on applique l'argument de Peierls au contour  $\gamma'$  contenant l'origine on obtient

$$\mu_\beta^{h[\omega]}[\gamma', \text{ tel que } 0 \in \text{int}\gamma'] \leq e^{-2\beta|\gamma'| + |\ln Z_{\text{int}\gamma,\beta}^{h[\omega],+} - \ln Z_{\text{int}\gamma,\beta}^{h[\omega],-}|}.$$

Dans l'inégalité (27) nous avons deux termes à évaluer. Le deuxième terme sera nul pour  $\beta$  suffisamment grand. En effet comme il n'existe aucun contour atypique, les fluctuations des fonctions de partitions sont contrôlées (par  $\beta|\gamma|$ ) d'où :

$$\mu_\beta^{h[\omega]}[\gamma', \text{ tel que } 0 \in \text{int}\gamma'] \leq e^{-2\beta|\gamma'| + \beta|\gamma'|}.$$

Par conséquent en sommant sur la contribution de tous les contours contenant l'origine, comme dans la démonstration dans le cas déterministe, on obtient que ce deuxième terme est nul pour  $\beta$  grand.

C'est le premier terme de cette inégalité qui en réalité est gênant car il prend en compte les fluctuations des fonctions de partition. Si on essaie de le majorer nous obtenons :

$$\mathbb{P} \left[ \exists \gamma, 0 \in \text{int}\gamma \quad \left| \ln Z_{\text{int}\gamma,\beta}^{h[\omega],+} - \ln Z_{\text{int}\gamma,\beta}^{h[\omega],-} \right| > \beta|\gamma| \right] \quad (28)$$

$$\leq \sum_{\gamma, 0 \in \text{int}\gamma} \mathbb{P} \left[ \left| \ln Z_{\text{int}\gamma,\beta}^{h(\omega),+} - \ln Z_{\text{int}\gamma,\beta}^{h(\omega),-} \right| > \beta|\gamma| \right] \quad (29)$$

$$\leq \sum_{\gamma, 0 \in \text{int}\gamma} \exp \left( -\frac{|\gamma|^2}{C\epsilon^2 |\text{int}\gamma|} \right). \quad (30)$$

Mais on a déjà vu que le nombre de contours de longueur  $k$  contenant l'origine est inférieur à  $C^k$ . Si on utilise l'inégalité isopérimétrique qui nous dit que pour tout contour  $\gamma$  il existe une constante  $c(d)$  dépendante de la dimension  $d$  tel que :

$$|\text{int}\gamma| \leq c(d) |\gamma|^{\frac{d}{d-1}},$$

alors l'argument de Peierls ne peut pas s'appliquer directement. En effet on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma, 0 \in \text{int}\gamma} \exp \left( -\frac{|\gamma|^2}{C\epsilon^2 |\text{int}\gamma|} \right) \\ & \leq \sum_{k > 2d} \exp \left( k \ln C - \frac{k^{\frac{d-2}{d-1}}}{\epsilon^2} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Cette méthode de majoration n'est pas très performante car elle ne prend pas en compte le fait que  $(h_i[\omega])_{i \in \text{int}\gamma}$  et  $(h_i[\omega'])_{i \in \text{int}\gamma'}$  sont très corrélés si  $\text{int}\gamma \cap \text{int}\gamma'$  est grand. Le champ aléatoire ajoute le problème de corrélation des contours.

Pour avoir une meilleure estimation de cette probabilité et savoir si elle est petite pour un faible désordre nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire. Nous admettrons le théorème ci-dessous qui permet de montrer l'existence d'une transition de phase en dimension  $d \geq 3$ .

**Théorème 4** *S'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{Z}^d$*

$$\mathbb{P} \left[ \left| \ln Z_{\Lambda, \beta}^{h[\omega], +} - \ln Z_{\Lambda', \beta}^{h[\omega], +} - \mathbb{E}[\ln Z_{\Lambda, \beta}^{h[\omega], +} - \ln Z_{\Lambda', \beta}^{h[\omega], +}] \right| \geq z \right] \leq \exp\left(-\frac{z^2}{C\epsilon^2\beta^2|\Lambda\Delta\Lambda'|}\right) \quad (31)$$

*alors si  $d \geq 3$ , il existe un  $\epsilon_0$  et un  $\beta_0$  tel que  $\forall \epsilon \leq \epsilon_0$  et  $\beta \geq \beta_0$ ,  $\mathbb{P} - p.p.$   $\omega$  il existe au moins deux mesures de Gibbs  $\mu_\beta^{h[\omega], +}$  et  $\mu_\beta^{h[\omega], -}$ .*

### 3.2 Absence de transition de phase

Nous touchons maintenant au but de notre exposé, c'est à dire à la démonstration de l'absence de transition de phase en dimension 2, cette démonstration nous vient d'Aizenman et Wehr (1990), qui, en s'inspirant des travaux d'Imry-Ma, démontrent l'unicité de la mesure de Gibbs dans le modèle bidimensionnel en champ aléatoire. Cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 5** *En dimension 2, il existe une unique mesure de Gibbs en volume infini pour le modèle d'Ising en champ aléatoire.*

Au préalable, nous allons introduire quelques notions. On rappelle que  $\mathcal{E}$  est l'espace où vivent les variables aléatoires  $h_i[\omega]$ . On définit une action  $\tau$  du groupe de translation  $\mathbb{Z}^d$  sur  $\mathcal{E}$  par

$$(h_{x_1}[\tau_y\omega], \dots, h_{x_n}[\tau_y\omega]) = (h_{x_1+y}[\omega], \dots, h_{x_n+y}[\omega]). \quad (32)$$

On introduit l'espace

$$\mathcal{E}_0 \equiv \{ \delta\omega \in \mathcal{E} : \exists \Lambda \subset \mathbb{Z}^d \text{ fini}, \forall y \notin \Lambda, h_y[\delta\omega] = 0 \}. \quad (33)$$

Par la suite, on notera  $\delta\omega$  un élément de  $\mathcal{E}_0$ .

**Définition 1** *Une mesure de Gibbs aléatoire  $\mu_\beta^{h[\omega]}$  est dite covariante si*

1. Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , et pour toute fonction continue  $f$

$$\mu_\beta^{h[\omega]}(\tau_{-x}f) = \mu_\beta^{h[\tau_x\omega]}(f), \quad \omega - p.s. \quad (34)$$

2. Pour tout  $\delta\omega \in \Omega_0$ , p.s. en  $\omega$  et pour toute fonction  $f$  continue bornée

$$\mu_\beta^{h[\omega+\delta\omega]}(f) = \frac{\mu_\beta^{h[\omega]}(f e^{-\beta(H[\omega+\delta\omega]-H[\omega])})}{\mu_\beta^{h[\omega]}(e^{-\beta(H[\omega+\delta\omega]-H[\omega])})}. \quad (35)$$

Ici, si  $\Lambda = \{x \in \mathbb{Z}^d : h_x[\delta\omega] \neq 0\}$ , alors

$$H[\omega + \delta\omega] - H[\omega] = \sum_{i \in \Lambda} (h_i[\omega] - h_i[\omega + \delta\omega]),$$

qui est une somme finie par définition de  $\delta\omega$ , l'égalité (35) est donc bien définie.

Comme dans la partie avec champ constant, nous allons définir une quantité appelée aimantation totale. Le lemme suivant établit l'existence de cette quantité.

**Lemme 3** *On rappelle que  $\mu_\beta^{h[\omega],+}$  (respectivement  $\mu_\beta^{h[\omega],-}$ ) est la mesure de Gibbs avec condition + (respectivement -) au bord. On définit l'aimantation par :*

$$m^\pm(\beta) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \mu_{\beta,\Lambda}^{h[\omega],\pm}(\sigma_i).$$

La limite existe et est indépendante de  $h[\omega]$ , pour presque tout  $\omega$ .

*Démonstration.* Comme la mesure  $\mu_{\beta,\Lambda}^{h[\omega],\pm}$  est covariante nous avons que  $\mu_{\beta,\Lambda}^{h[\omega],\pm}(\sigma_i) = \mu_{\beta,\Lambda}^{h[\tau_{-i}\omega],\pm}(\sigma_0)$  pour tout  $i \in \Lambda$ , d'où

$$\sum_{i \in \Lambda} \mu_{\beta,\Lambda}^{h[\omega],\pm}(\sigma_i) = \sum_{i \in \Lambda} \mu_{\beta,\Lambda}^{h[\tau_{-i}\omega],\pm}(\sigma_0). \quad (36)$$

Mais  $\mu_{\beta,\Lambda}^{h[\tau_{-i}\omega],\pm}(\sigma_0)$  est bornée et mesurable, il vient donc du théorème ergodique de Birkhoff<sup>3</sup> que la limite existe p.s. et

$$m^\pm(\beta) = \mathbb{E} \left( \mu_{\beta,\Lambda}^{h[\omega],\pm}(\sigma_0) \right), \quad (37)$$

où  $\mathbb{E}X = \int_{\mathcal{E}} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$ .  $\square$

Nous avons le lemme suivant :

<sup>3</sup>Pour l'énoncé précis et une démonstration, voir le livre de Leo Breiman [2].

**Lemme 4** Dans le modèle d'Ising en champ aléatoire,

$$m^+(\beta) - m^-(\beta) = 0 \iff \mu_\beta^{h[\omega],+} - \mu_\beta^{h[\omega],-} = 0, \quad \omega - p.s. \quad (38)$$

*Démonstration.* L'égalité (37) implique que, presque sûrement,

$$0 = m^+(\beta) - m^-(\beta) = \mathbb{E}[\mu_\beta^{h[\omega],+}(\sigma_i) - \mu_\beta^{h[\omega],-}(\sigma_i)]. \quad (39)$$

Comme  $\mu_\beta^{h[\omega],+}(\sigma_i) - \mu_\beta^{h[\omega],-}(\sigma_i) \geq 0$  et que le nombre de sites  $i$  est dénombrable, presque sûrement, pour tout  $i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\mu_\beta^{h[\omega],+}(\sigma_i) - \mu_\beta^{h[\omega],-}(\sigma_i) = 0$ . Les deux mesures sont donc égales sur chaque site, on peut, en utilisant les inégalités FKG<sup>4</sup> en déduire l'égalité des mesures, on admettra ce résultat.  $\square$

Nous allons maintenant introduire une *fonction génératrice*,

$$G_{\beta,\Lambda}^{h[\omega],\pm} := -\frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta^{h[\omega],\pm} \left( e^{-\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i} \right). \quad (40)$$

Or  $\mu_\beta^{h[\omega],\pm}$  est covariante, donc :

$$G_{\beta,\Lambda}^{h[\omega],\pm} = \frac{1}{\beta} \ln \mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm} \left( e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i} \right), \quad (41)$$

où  $\omega_\Lambda \in \Omega_0$  est défini tel que  $h_i[\omega_\Lambda] = h_i[\omega]$  si  $i \in \Lambda$ , et  $h_i[\omega_\Lambda] = 0$  sinon. Par conséquent, pour  $i \in \Lambda$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_i} G_{\beta,\Lambda}^{h[\omega],\pm} &= \frac{\frac{\partial}{\partial h_i} \mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm} \left( e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i} \right)}{\beta \mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm} \left( e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i} \right)} \\ &= \frac{\mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm} \left( \frac{\partial}{\partial h_i} e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i} \right)}{\beta \mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm} \left( e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i} \right)} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm} \left( \sigma_i e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i} \right)}{\mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm} \left( e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i} \right)} \\ &= \mu_\beta^{h[\omega],\pm}(\sigma_i), \end{aligned} \quad (43)$$

où l'égalité (42) provient du fait que  $\mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm}$  est  $\mathcal{B}_{\Lambda^c}$ -mesurable (donc indépendante de  $h_i[\omega]$ ), et la deuxième égalité provient du fait que  $\mu_\beta^{h[\omega-\omega_\Lambda],\pm}$

<sup>4</sup>Pour l'énoncé des inégalités FKG, voir [1].

est covariante.

En particulier, nous avons que

$$\mathbb{E} \left( \frac{\partial}{\partial h_i} G_{\beta, \Lambda}^{h[\omega], \pm} \right) = \mathbb{E} \left( \mu_{\beta}^{h[\omega], \pm}(\sigma_i) \right) = m^{\pm}(\beta). \quad (44)$$

Nous allons maintenant introduire la fonction :

$$F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} := \mathbb{E} \left[ G_{\beta, \Lambda}^{h[\omega], +} - G_{\beta, \Lambda}^{h[\omega], -} \mid \mathcal{B}_{\Lambda} \right], \quad (45)$$

où  $\mathcal{B}_{\Lambda}$  est la tribu engendrée par les  $\{h_i[\omega], i \in \Lambda\}$ . D'après (44),

$$\mathbb{E} \frac{\partial}{\partial h_0} F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} = m^+(\beta) - m^-(\beta), \quad (46)$$

notre but est de prouver que cette quantité est nulle. Pour cela, nous avons besoin des lemmes suivants :

**Lemme 5** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Lambda = [-n, n]^2$ . Pour toute valeur de  $\beta$ ,*

$$|F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]}| \leq 2|\partial\Lambda|. \quad (47)$$

**Lemme 6** *Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$\liminf_{\Lambda = [-n, n]^d, n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp(t F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} / \sqrt{|\Lambda|}) \geq \exp\left(\frac{t^2 b^2}{2}\right), \quad (48)$$

où  $b$  est une constante telle que,

$$b^2 \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} \mid \mathcal{B}_0]^2]. \quad (49)$$

Une fois ces deux lemmes établis, on obtient :

$$\begin{aligned} \liminf_{\Lambda = [-n, n]^d, n \rightarrow \infty} \exp(2t|\partial\Lambda|/\sqrt{|\Lambda|}) &\geq \liminf_{\Lambda = [-n, n]^d, n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp(t F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} / \sqrt{|\Lambda|}) \\ &\geq \exp\left(\frac{t^2 b^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (50)$$

Mais, pour tout  $n$ ,  $|\partial\Lambda|/\sqrt{|\Lambda|} = 4$ . Pour  $t$  suffisamment grand, on aboutit donc à une contradiction sauf si  $b = 0$ .

Nous allons maintenant noter  $g(h) = \mathbb{E}[F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} \mid \mathcal{B}_0]$  (où  $h$  est la variable réelle représentant le spin en 0). Le fait que  $b = 0$  implique que  $\mathbb{E}g^2 = 0$  et

donc  $g(h) = 0$ . Nous avons donc  $g'(h) = m^+(\beta) - m^-(\beta) = 0$ , mais par le lemme 4, cela implique l'unicité de la mesure de Gibbs.

Il nous reste donc à démontrer les lemmes 5 et 6. Auparavant, nous allons présenter un résultat important sur les mesures de Gibbs : les équations DLR (équation de Dobrushin-Lanford-Ruelle). Pour la démonstration voir [1].

**Théorème[Equations DLR]** *Pour tout  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ ,*

$$\int \mu_{\beta}^{h[\omega], \pm}(d\tilde{\sigma}) \int \mu_{\Lambda, \beta}^{h[\omega], \tilde{\sigma}}(d\sigma) f(\sigma_{\Lambda} \wedge \tilde{\sigma}) = \int \mu_{\beta}^{h[\omega], \pm}(d\tilde{\sigma}) f(\tilde{\sigma}), \quad (51)$$

où la configuration :

$$(\sigma_{\Lambda} \wedge \tilde{\sigma})_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } i \in \Lambda \\ \tilde{\sigma}_i & \text{si } i \in \Lambda^c. \end{cases}$$

*Démonstration du lemme 5.* La première étape est d'exprimer  $F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]}$  en terme de mesures qui ne dépendent pas du désordre dans  $\Lambda$ . Nous avons par (41) :

$$\begin{aligned} F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} &= \frac{1}{\beta} \mathbb{E} \left[ \ln \mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], +} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i}) - \ln \mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], -} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i}) \mid \mathcal{B}_{\Lambda} \right] \\ &= \frac{1}{\beta} \mathbb{E} \left[ \ln \frac{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], +} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i})}{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], -} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i})} \mid \mathcal{B}_{\Lambda} \right]. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les propriétés de symétrie du modèle, nous avons que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \ln \frac{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], +} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i})}{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], -} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i})} \mid \mathcal{B}_{\Lambda} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \ln \frac{\mu_{\beta}^{-h[\omega-\omega_{\Lambda}], -} (e^{-\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i})}{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], -} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i})} \mid \mathcal{B}_{\Lambda} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

$$= \mathbb{E} \left[ \ln \frac{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], -} e^{-\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i}}{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}], -} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i})} \mid \mathcal{B}_{\Lambda} \right], \quad (53)$$

où (52) provient de la symétrie par inversion de spin qui implique que

$$\mu_{\beta}^{h[\omega], +}(f(\sigma)) = \mu_{\beta}^{-h[\omega], -}(f(-\sigma)),$$

et (53) vient de la symétrie du champ :  $\mathbb{E}(g(h[\omega])) = \mathbb{E}(g(-h[\omega]))$  (ici  $f$  et  $g$  sont des fonctions mesurables, respectivement par rapport à la tribu borélienne de  $\Omega$  et  $\mathcal{E}$ , et bornées). Or, en utilisant les équations DLR, nous pouvons comparer le numérateur et le dénominateur de cette espérance :

$$\begin{aligned}
& \mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}],-} (e^{-\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \sigma_i}) \\
&= \int \mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}],-} (d\tilde{\sigma}) e^{-\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \tilde{\sigma}_i} \\
&= \int \mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}],-} (d\tilde{\sigma}) \mu_{\beta, \Lambda}^{\tilde{\sigma}} (e^{-\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i[\omega] \tilde{\sigma}_i}) \\
&= \int \frac{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}],-} (d\tilde{\sigma})}{Z_{\beta, \Lambda}^{\tilde{\sigma}}} \int \mu_{\beta, \Lambda}^{\tilde{\sigma}} (d\sigma) (e^{\beta(\sum_{i, j \in \Lambda, i \sim j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c, i \sim j} \sigma_i \tilde{\sigma}_j - \sum_{i \in \Lambda} h_i \sigma_i)}) \\
&= \int \frac{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}],-} (d\tilde{\sigma})}{Z_{\beta, \Lambda}^{\tilde{\sigma}}} \int \mu_{\beta, \Lambda}^{\tilde{\sigma}} (d\sigma) (e^{\beta(\sum_{i, j \in \Lambda, i \sim j} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c, i \sim j} \sigma_i \tilde{\sigma}_j + \sum_{i \in \Lambda} h_i \sigma_i)}) \\
&\leq e^{2\beta|\partial\Lambda|} \int \frac{\mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}],-} (d\tilde{\sigma})}{Z_{\beta, \Lambda}^{\tilde{\sigma}}} \int \mu_{\beta, \Lambda}^{\tilde{\sigma}} (d\sigma) (e^{\beta(\sum_{i, j \in \Lambda, i \sim j} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c, i \sim j} \sigma_i \tilde{\sigma}_j + \sum_{i \in \Lambda} h_i \sigma_i)}) \\
&= e^{2\beta|\partial\Lambda|} \mu_{\beta}^{h[\omega-\omega_{\Lambda}],-} (e^{\beta \sum_{i \in \Lambda} h_i \sigma_i}).
\end{aligned} \tag{54}$$

En insérant cette borne dans (52), nous obtenons le résultat.  $\square$

*Démonstration du lemme 6.* La preuve de ce lemme utilise une décomposition de  $F_{\Lambda}$  comme une somme télescopique d'espérances conditionnelles. Nous allons tout d'abord ordonner  $\Lambda$  et noter  $\mathcal{B}_{\Lambda, i}$  la tribu engendrée par les variables  $\{h_j[\omega]\}_{j \in \Lambda, j \leq i}$ . Ensuite nous avons que :

$$F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} = \sum_{i=1}^{|\Lambda|} (\mathbb{E}[F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} | \mathcal{B}_{\Lambda, i}] - \mathbb{E}[F_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]} | \mathcal{B}_{\Lambda, i-1}]) \equiv \sum_{i=1}^{|\Lambda|} Y_i, \tag{55}$$

Pout tout  $i$ ,  $Y_i$  est donc une fonction de  $\{h_j[\omega]\}_{j \in \Lambda, j \leq i}$ . En utilisant ceci, nous pouvons représenter la fonction caractéristique de  $F_{\Lambda}$  par :

$$\mathbb{E} e^{tF_{\beta, \Lambda}^{h[\omega]}} = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\dots \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{tY_{|\Lambda|}} | \mathcal{B}_{\Lambda, |\Lambda|-1}] e^{tY_{|\Lambda|-1}} | \mathcal{B}_{\Lambda, |\Lambda|-2}] \dots e^{tY_2} | \mathcal{B}_{\Lambda, 1}] e^{tY_1}]. \tag{56}$$

Maintenant, nous avons besoin d'une borne inférieure pour  $\mathbb{E}[e^{tY_i} | \mathcal{B}_{\Lambda, i-1}]$ . Pour avoir une telle borne, nous allons utiliser l'observation (voir [5], lemme A.2.2) qu'il existe une fonction continue  $g(a)$ , avec  $g(a) \downarrow 0$  quand  $a \downarrow 0$ , telle que, pour tout réel  $x$ , et tout  $a \geq 0$ ,  $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}(1 - g(a))x^2 \mathbb{1}_{|x| \leq a}$ . Puisque, de plus, pour tout  $|x| \leq a$ ,  $e^{x^2 e^{-a^2}/2} \leq 1 + x^2/2$ , on en déduit que,

si  $\mathbb{E}X = 0$ , alors, pour  $f(a) = 1 - (1 - g(a))e^{-a^2/2}$ ,

$$\mathbb{E}e^X \geq e^{\frac{1}{2}(1-f(a))\mathbb{E}[X^2\mathbb{1}_{|X|\leq a}]}. \quad (57)$$

En utilisant cette estimation, nous voyons que

$$\mathbb{E}[e^{tY_i}|\mathcal{B}_{\Lambda,i-1}] \geq \exp\left(\frac{t^2}{2}(1-f(a))\mathbb{E}[Y_i^2\mathbb{1}_{|Y_i|\leq a}|\mathcal{B}_{\Lambda,i-1}]\right). \quad (58)$$

Or cette quantité est  $\mathcal{B}_{\Lambda,i-1}$ -mesurable en tant que produit de deux fonctions  $\mathcal{B}_{\Lambda,i-1}$ -mesurables.

Cette inégalité nous permet donc de minorer (56). On obtient :

$$\mathbb{E}\left(e^{tF_{\beta,\Lambda}^{h[\omega]}/\sqrt{|\Lambda|} - \frac{t^2}{2|\Lambda|}(1-f(a))\sum_{i=1}^{|\Lambda|}\mathbb{E}[Y_i^2\mathbb{1}_{|Y_i|\leq a\sqrt{|\Lambda|}}|\mathcal{B}_{\Lambda,i-1}]}\right) \geq 1 \quad (59)$$

Il faut maintenant montrer que le terme :

$$V_{\Lambda}^{h[\omega]}(a) \equiv |\Lambda|^{-1} \sum_{i=1}^{|\Lambda|} \mathbb{E}[Y_i^2\mathbb{1}_{|Y_i|\leq a\sqrt{|\Lambda|}}|\mathcal{B}_{\Lambda,i-1}] \quad (60)$$

qui apparaît dans l'exponentielle de (59), converge en probabilité vers une constante  $C$  indépendante de  $a > 0$ . Ce qui nous permettra de montrer que :

$$\liminf_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \mathbb{E}\left(e^{tF_{\beta,\Lambda}^{h[\omega]}/\sqrt{|\Lambda|}}\right) \geq e^{t^2 C/2}. \quad (61)$$

Il nous reste donc à trouver la limite de  $V_{\Lambda}^{h[\omega]}(a)$ .

Pour cela, nous allons introduire une nouvelle tribu  $\mathcal{B}_i^{\leq}$ , générée par les variables aléatoires  $h_j$  avec  $j \leq i$ , où  $\leq$  fait référence à l'ordre lexicographique; contrairement à  $\mathcal{B}_{\Lambda,i}$  cette tribu dépend donc également du champ à l'extérieur de  $\Lambda$ , pour  $i$  assez grand. Nous définissons

$$W_i \equiv \mathbb{E}[G_{\Lambda}^{\mu^+} - G_{\Lambda}^{\mu^-} | \mathcal{B}_i^{\leq}] - \mathbb{E}[G_{\Lambda}^{\mu^+} - G_{\Lambda}^{\mu^-} | \mathcal{B}_{i-1}^{\leq}]. \quad (62)$$

En utilisant (43), on peut montrer que,  $\forall i \in \Lambda$ ,  $W_i$  est indépendant de  $\Lambda$ . D'un autre côté, nous avons :

$$Y_i = \mathbb{E}[W_i | \mathcal{B}_{\Lambda}]. \quad (63)$$

Nous utilisons l'indépendance de  $W_i$  pour montrer que la fonction indicatrice peut être enlevée dans l'espérance conditionnelle, i.e.  $\forall \epsilon > 0$ ,

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \mathbb{P}\left[|\Lambda|^{-1} \sum_{i=1}^{|\Lambda|} \mathbb{E}[Y_i^2\mathbb{1}_{|Y_i|>a\sqrt{|\Lambda|}}|\mathcal{B}_{\Lambda,i-1}] > \epsilon\right] = 0. \quad (64)$$

Pour le voir, on calcule l'espérance du terme de gauche et on utilise l'inégalité de Hölder. On obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \left| \Lambda \right|^{-1} \sum_{i=1}^{|\Lambda|} \mathbb{E}[Y_i^2 \mathbb{1}_{t|Y_i| > a\sqrt{|\Lambda|}} | \mathcal{B}_{\Lambda, i-1}] \right) \\ &= \left| \Lambda \right|^{-1} \sum_{i=1}^{|\Lambda|} \mathbb{E}[Y_i^2 \mathbb{1}_{t|Y_i| > a\sqrt{|\Lambda|}}] \end{aligned} \quad (65)$$

$$\leq \left| \Lambda \right|^{-1} \sum_{i=1}^{|\Lambda|} (\mathbb{E}Y_i^4)^{1/2} (\mathbb{P}[|Y_i| > a\sqrt{|\Lambda|}/t])^{1/2}. \quad (66)$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Jensen et (63) :

$$\mathbb{E}Y_i^4 = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[W_i | \mathcal{B}_\Lambda])^4] \leq \mathbb{E}W_i^4.$$

Toutefois, en utilisant (43), on peut voir que

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial h_i} &= \mathbb{E} \left[ \frac{\partial G_\Lambda^{\mu^+}}{\partial h_i} - \frac{\partial G_\Lambda^{\mu^-}}{\partial h_i} | \mathcal{B}_i^{\leq} \right] - \mathbb{E} \left[ \frac{\partial G_\Lambda^{\mu^+}}{\partial h_i} - \frac{\partial G_\Lambda^{\mu^-}}{\partial h_i} | \mathcal{B}_{i-1}^{\leq} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mu_\beta^{h[\omega],+}(\sigma_i) - \mu_\beta^{h[\omega],-}(\sigma_i) | \mathcal{B}_i^{\leq} \right] - \mathbb{E} \left[ \mu_\beta^{h[\omega],+}(\sigma_i) - \mu_\beta^{h[\omega],-}(\sigma_i) | \mathcal{B}_{i-1}^{\leq} \right], \end{aligned}$$

et cette quantité est bornée. On a donc que  $W_i$  est lipschitzienne comme fonction de  $h_i$ , i.e. il existe une constante  $C > 0$  telle que  $|W_i| \leq C|h_i|$ , ce qui nous donne  $\mathbb{E}Y_i^4 < \infty$ . En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev et le même argument que précédemment, nous pouvons conclure que

$$\mathbb{P}[|Y_i| > a\sqrt{|\Lambda|}/t] \leq \frac{t^2 \mathbb{E}W_0^2}{a^2 |\Lambda|}, \quad (67)$$

qui tends vers 0 quand  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2$ . Nous voyons que (66) tends vers 0 pour tout  $a > 0$ . Par l'inégalité de Markov, cela nous permet d'obtenir (64). Nous venons donc de montrer que

$$\left| \Lambda \right|^{-1} \sum_{i=1}^{|\Lambda|} \mathbb{E}[Y_i^2 \mathbb{1}_{t|Y_i| > a\sqrt{|\Lambda|}} | \mathcal{B}_{\Lambda, i-1}] \quad (68)$$

tend vers 0 en probabilité quand  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ .

Pour la suite, nous allons observer dans un premier temps que  $W_i$  est covariant, i.e.

$$W_i[\omega] = W_0[\tau_{-i}\omega], \quad (69)$$

ce qui nous permet d'utiliser le théorème ergodique de Birkhoff <sup>5</sup>, et voir que :

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} |\Lambda|^{-1} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{E}[W_i^2 | \mathcal{B}_i^{\leq}] = \mathbb{E}W_0^2, \text{ en probabilité.} \quad (70)$$

Maintenant, nous avons fini si nous pouvons montrer que

$$\mathbb{E}[Y_i^2 | \mathcal{B}_{\Lambda, i}] - \mathbb{E}[W_i^2 | \mathcal{B}_i^{\leq}] \quad (71)$$

tend vers 0 quand  $\Lambda$  tend vers  $\mathbb{Z}^2$ , en probabilité. En effet, en supposant (71), on obtient par (66) que

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} \mathbb{E}[Y_i^2 \mathbb{1}_{t|Y_i| \leq a\sqrt{|\Lambda|}} | \mathcal{B}_{\Lambda, i-1}] = \mathbb{E}[W_i^2 | \mathcal{B}_i^{\leq}], \text{ en probabilité,} \quad (72)$$

ce qui donne :

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} V_{\Lambda}^{h[\omega]}(a) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} |\Lambda|^{-1} \sum_{i \in \Lambda} \mathbb{E}[W_i^2 | \mathcal{B}_i^{\leq}], \text{ en probabilité.} \quad (73)$$

Et donc par (70) :

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2} V_{\Lambda}^{h[\omega]}(a) = \mathbb{E}W_0^2, \text{ en probabilité.} \quad (74)$$

Ensuite nous avons :

$$\mathbb{E}W_0^2 = \mathbb{E}[(\mathbb{E}[W_0^2 | \mathcal{B}_0])] \geq \mathbb{E}[(\mathbb{E}[W_0 | \mathcal{B}_0])^2] \quad (75)$$

par Jensen (ici  $\mathcal{B}_0$  est la tribu générée par  $h_0$ ), et  $\mathbb{E}[W_0 | \mathcal{B}_0] = \mathbb{E}[F_{\Lambda} | \mathcal{B}_0]$ .

Pour montrer que (71) tend vers 0, on peut estimer l'espérance de son carré, et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que pour tout fonction de carré intégrable  $f$ ,  $\mathbb{E}[(f - \mathbb{E}[f | \mathcal{B}_{\Lambda}])^2]$  tends vers 0 quand  $\Lambda$  tend vers  $\mathbb{Z}^2$ .  $\square$

$\square$ .

---

<sup>5</sup>voir [2]

## 4 Simulations du modèle par une méthode Monte Carlo

La simulation que nous présentons se base sur le théorème de convergence des chaînes de Markov. Dans un premier temps nous allons présenter le modèle, ensuite nous verrons les résultats des simulations.

### 4.1 Le modèle d'Ising vu comme une chaîne de Markov

Soit  $\Lambda$  un carré de  $\mathbb{Z}^2$ , le but de cette partie est de créer une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\mu_{\beta, \Lambda}^{h[\omega], +}$ . Par le théorème de convergence des chaînes de Markov, il suffit donc que  $\mu_{\beta, \Lambda}^{h[\omega], +}$  soit une probabilité invariante, et que la chaîne soit irréductible et apériodique. Nous avons déjà l'espace d'états de notre chaîne :  $\Omega_\Lambda = \{1, -1\}^\Lambda$ , il ne reste donc plus qu'à définir une fonction de transition.

La chaîne de Markov passe d'un état à un autre en changeant la valeur d'un seul spin. A chaque étape, soit la chaîne ne change pas, soit un spin est inversé.

Soit  $\sigma \in \Omega_\Lambda$  et  $l \in \Lambda$ , on définit la configuration  $\sigma^l$  de la façon suivante :

$$\sigma_i^l = \begin{cases} -\sigma_i & \text{si } i = l \\ \sigma_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons :  $H_\Lambda^{h[\omega]}(\sigma^l) = H_\Lambda^{h[\omega]}(\sigma) + 2 \sum_{i \in \Lambda, i \sim l} \sigma_i \sigma_l + 2h[\omega] \sigma_l$ , où  $i \sim l$  signifie  $i$  est voisin de  $l$ , car le fait d'inverser un seul spin n'a d'influence que sur les spins voisins. Donc

$$\mu_{\Lambda, \beta}^{h[\omega], +}(\sigma^l) = e^{-2\beta(\sum_{i \in \Lambda, i \sim l} \sigma_i \sigma_l + h[\omega] \sigma_l)} \mu_{\Lambda, \beta}^{h[\omega], +}(\sigma). \quad (76)$$

A chaque étape de l'algorithme, nous allons choisir un site au hasard sur  $\Lambda$  avec probabilité  $\frac{1}{|\Lambda|}$  et nous allons décider avec une certaine probabilité, que nous allons appeler taux d'acceptation et noter  $A(\sigma, \sigma^l)$ , si le spin choisi est échangé ou non. Nous avons donc :

$$\mathcal{P}(X_{n+1} = \sigma^l | X_n = \sigma) = \frac{1}{|\Lambda|} \times A(\sigma, \sigma^l). \quad (77)$$

D'après (77) pour que la mesure  $\mu_{\Lambda,\beta}^{h[\omega],+}$  soit réversible, il faut que :

$$\mu_{\Lambda,\beta}^{h[\omega],+}(\sigma)A(\sigma, \sigma^l) = A(\sigma^l, \sigma)\mu_{\Lambda,\beta}^{h[\omega],+}(\sigma^l) \quad (78)$$

Par (76), on obtient :

$$\frac{A(\sigma^l, \sigma)}{A(\sigma, \sigma^l)} = \frac{\mu_{\Lambda,\beta}^{h[\omega],+}(\sigma^l)}{\mu_{\Lambda,\beta}^{h[\omega],+}(\sigma)} = e^{-2\beta(\sum_{i \in \Lambda, i \sim l} \sigma_i \sigma_l + h \sigma_l)} \quad (79)$$

Nous avons maintenant la liberté de choisir notre taux d'acceptation sous deux conditions : d'une part le respect de l'équation (79), d'autre part le fait que  $A(\sigma, \sigma') \leq 1$  pour tout  $\sigma, \sigma' \in S$ .

Nous allons donc chercher à maximiser ce taux, car plus il est grand, plus la chaîne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  va changer d'état souvent et donc converger plus rapidement vers l'équilibre. Le meilleur choix est donc de poser :

$$A(\sigma, \sigma') = \begin{cases} e^{-2\beta(\sum_{i \in \Lambda, i \sim l} \sigma_i \sigma_l + h \sigma_l)} & \text{si } \sum_{i \in \Lambda, i \sim l} \sigma_i \sigma_l + h \sigma_l > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (80)$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer la convergence de la chaîne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En changeant les spins un par un, on peut passer d'un état quelconque à un autre avec probabilité positive : la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc irréductible. Elle est également apériodique et récurrente positive car l'espace d'états,  $\{-1, 1\}^\Lambda$ , est fini. Elle est également réversible par l'équation (78). D'après le théorème de convergence des chaînes de Markov,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc en loi vers sa mesure invariante  $\mu_{\Lambda,\beta}^{h[\omega],+}$ .

## 4.2 Résultats de l'algorithme de Monte Carlo

Nous n'allons pas exposer ici les détails de l'implémentation qui sont présentés dans [4], seulement les résultats de façon à illustrer nos propos :

### 4.2.1 Simulation en champ nul

La figure 2 a été obtenue à l'aide de l'algorithme présenté dans la partie précédente, en champ nul avec  $|\Lambda| = 2500$ , les spins étant tous initialisés à  $+1$ . Elle représente l'évolution de l'aimantation au bout de  $10^7$  itérations en fonction de la température inverse  $\beta$ . La valeur théorique de  $\beta_c$  a été calculée par Onsager, elle se situe autour de 0.44, ce que semble confirmer la figure 2.

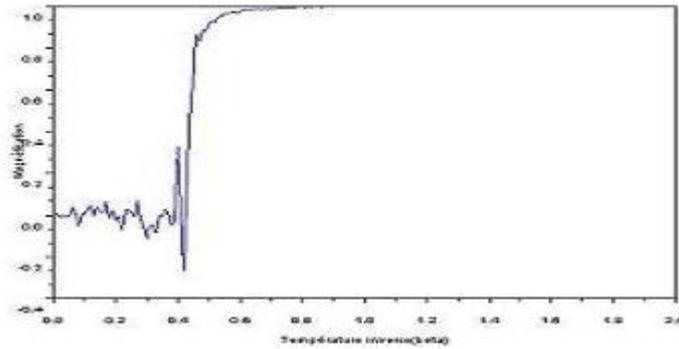
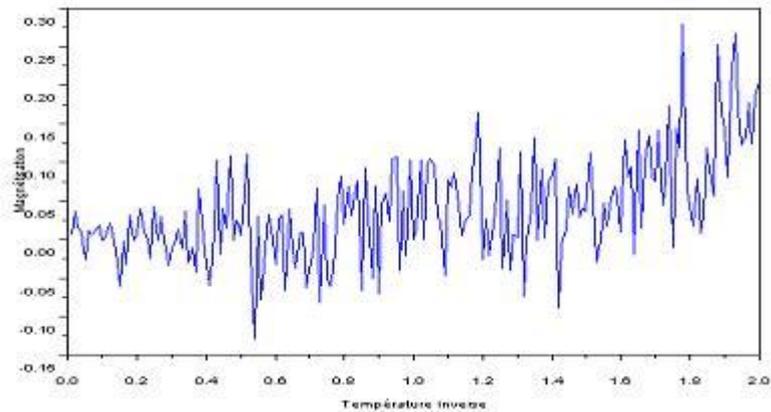


FIG. 2 – Transition de phase en dimension 2

FIG. 3 – Pas de transition de phase en champ aléatoire en dimension  $d=2$ 

#### 4.2.2 Simulation en champ aléatoire

La figure 3 a été obtenue dans les mêmes conditions que la figure précédente, en rajoutant un champ aléatoire :  $\forall i \in \Lambda$ ,  $h_i$  suit une loi gaussienne centrée de variance 2. La simulation semble confirmer qu'il n'y a pas de transition de phase.

## 5 Annexe

Dans cette annexe, nous allons démontrer un théorème de concentration de la mesure.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Nous nous donnons une filtration :

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_N = \mathcal{A}.$$

Soit  $f \in \mathbb{L}^1 = \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , nous allons poser,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$d_i = \mathbb{E}[f|\mathcal{A}_i] - \mathbb{E}[f|\mathcal{A}_{i-1}].$$

Nous avons donc :  $f - \mathbb{E}f = \sum_{i=1}^N d_i$  et  $\mathbb{E}[d_i|\mathcal{A}_{i-1}] = 0$  pour tout  $i \leq N$ .

**Théorème 6** Soit  $f \in \mathbb{L}^1$  telle que  $f - \mathbb{E}f = \sum_{i=1}^N d_i$  où les  $d_i$  ont été définis plus haut.

Nous supposons que  $\|d_i\|_\infty < \infty$  et nous poserons :  $a = \left(\sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2\right)^{1/2}$ .  
Alors, pour tout  $t > 0$ ,

$$\mathbb{P}[|f - \mathbb{E}f| > t] \leq 2 \exp(-t^2/2a^2). \quad (81)$$

*Démonstration.* Si  $\varphi$  est une variable aléatoire telle que  $|\varphi| \leq 1$  presque sûrement et  $\mathbb{E}[\varphi] = 0$ , alors pour tout réel  $\lambda$ ,  $\mathbb{E}[\exp(\lambda\varphi)] \leq \exp(\lambda^2/2)$ .

En effet, la fonction  $x \rightarrow \exp(\lambda x)$  est convexe et  $\lambda x = \lambda(1+x)/2 - \lambda(1-x)/2$  d'où, pour tout  $|x| \leq 1$ ,

$$\exp(\lambda x) \leq \cosh \lambda + x \sinh \lambda \leq \exp(\lambda^2/2) + x \sinh \lambda.$$

En intégrant les deux côtés de cette inégalité, on obtient le résultat voulu. Ceci implique clairement que, pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda d_i)|\mathcal{A}_{i+1}] \leq \exp(\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2/2). \quad (82)$$

En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(\lambda(f - \mathbb{E}f))] &= \mathbb{E} \exp \left( \lambda \sum_{i=1}^N d_i \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \exp \left( \lambda \sum_{i=1}^{N-1} d_i \right) \mathbb{E}[\exp(\lambda d_N)|\mathcal{A}_{N-1}] \right) \\ &\leq \mathbb{E} \exp \left( \lambda \sum_{i=1}^{N-1} d_i \right) \exp(\lambda^2 \|d_N\|_\infty^2) \\ &\leq \exp(\lambda^2 a^2/2) \end{aligned}$$

Où la dernière inégalité est obtenue par récurrence en utilisant l'inégalité (82). En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, nous avons, pour tout  $t > 0$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[f - \mathbb{E} > t] &\leq \exp(-\lambda t + \lambda^2 a^2 / 2) \\ &\leq \exp(-t^2 / 2a^2)\end{aligned}$$

pour le choix optimal :  $\lambda = t/a^2$ . En appliquant cette inégalité à  $-f$ , nous obtenons l'inégalité recherchée.  $\square$

## Références

- [1] Anton Bovier. *Statistical Mechanics of Disordered Systems A mathematical perspective*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] Leo Breiman. *Probability*. SIAM, 1992.
- [3] R.S. Ellis. *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, 1985.
- [4] M.E.J. Newman et G.T. Barkema. *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. Oxford University Press, 2001.
- [5] M.Aizenman et J.Wehr. Rounding effects of quenched randomness on first-order phase transitions. *Comm. Math. Phys*, 130(3)(1) :486–528, 1990.

Pour conclure, nous tenons à remercier M. Thierry Bodineau pour ses conseils très précieux, sa patience exceptionnelle, ses lectures attentives de notre rapport et surtout pour les bons moments qu’il a passé à nous expliquer de manière ludique les notions difficiles du sujet.