

# Différents types de solutions à l'équation de Hamilton-Jacobi

Valentine Roos

11 octobre 2012

**Encadrant : Patrick Bernard**

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Solution classique</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Solution de viscosité</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Solution variationnelle</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Liens entre solution variationnelle et solution de viscosité</b>	<b>8</b>

# Introduction

À un hamiltonien  $\mathcal{C}^2$

$$\begin{aligned} H : \Pi^d \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\mapsto H(q, p) \end{aligned}$$

sont naturellement associés un système hamiltonien d'équations régissant le mouvement :

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \partial_p H(q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\partial_q H(q(t), p(t)) \end{cases}$$

et une équation de Hamilton-Jacobi qui a pour inconnue une fonction  $u : \mathbb{R} \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\partial_t u(t, q) + H(q, \partial_q u(t, q)) = 0.$$

On s'arrange pour que le flot hamiltonien associé au système hamiltonien soit complet. Pour cela, il suffit que la quantité  $\|\partial_{q,p}^2 H\|$  soit bornée : on suppose alors que notre hamiltonien vérifie cette condition. Si  $(q(\cdot), p(\cdot))$  est la solution du système hamiltonien vérifiant  $(q(0), p(0)) = (q, p)$ , on note  $\phi_t(q, p) = (q(t), p(t))$  le flot hamiltonien pris au temps  $t$ .

Par la suite, on s'intéresse à la résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, q) + H(q, \partial_q u(t, q)) = 0 \\ u(0, q) = u_0(q) \end{cases}$$

Pour des raisons qui s'éclairciront plus tard, on appelle *solution géométrique* associée à une donnée initiale dérivable  $u_0$  l'évolution par le flot hamiltonien du graphe de la différentielle de  $d_q u_0$ . Au temps  $t$ , la solution géométrique s'écrit :

$$\Gamma_t = \phi_t(\Gamma_0) = \phi_t(\{(q, d_q u_0) | q \in \Pi^d\}).$$

L'ensemble  $\Gamma_0$  est un graphe mais il peut être envoyé par le flot hamiltonien sur un ensemble qui ne se projette plus de manière bijective sur  $\Pi^d$ , comme illustré dans la figure (1) ci-dessous.

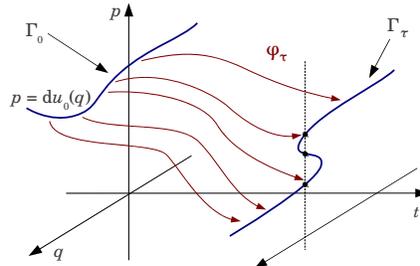


FIGURE 1 – Dans la fibre de temps  $t$

Dans cette étude, on s'intéresse aux différentes solutions du problème de Cauchy. On va voir dans un premier temps que même pour des données initiales lisses, l'existence de solutions classiques n'est pas établie pour des grands temps ; il faut alors se contenter de solutions faibles. On présentera deux types de solutions faibles : les solutions de viscosité, dont le point fort est l'unicité, et les solutions variationnelles, qui ont pour avantage d'être fortement liées à la solution géométrique. On cherche ensuite à mieux comprendre les liens éventuels entre ces deux types de solutions.

# 1 Solution classique

Pour une donnée initiale  $u_0$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et à dérivée seconde bornée, le théorème suivant nous donne l'existence et l'unicité de solutions au problème de Cauchy pour des temps petits.

**Théorème 1.** *Soit  $H$  un hamiltonien  $\mathcal{C}^2$  avec  $\|\partial_{q,p}^2 H\|$  borné, et  $u_0$  une donnée initiale  $\mathcal{C}^2$  avec  $\|d_q^2 u_0\|$  borné. Alors il existe un petit temps  $\delta > 0$  et une application  $\mathcal{C}^2$   $u : ] - \delta, \delta[ \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :*

$$\begin{cases} \partial_t u(t, q) + H(q, \partial_q u(t, q)) = 0 \text{ pour tout } (t, q) \in ] - \delta, \delta[ \times \Pi^d, \\ u(0, q) = u_0(q) \text{ pour tout } q \in \Pi^d. \end{cases}$$

De plus, si  $u$  et  $\tilde{u}$  sont deux solutions définies au voisinage de l'instant 0, alors elles coïncident sur leur intervalle de définition commun.

C'est en étudiant de plus près le cas des solutions  $\mathcal{C}^2$  qu'on comprend un lien fort avec la solution géométrique. En effet, on peut démontrer le lemme suivant :

*Lemme :* Si  $u : ] - \delta, \delta[ \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution  $\mathcal{C}^2$  à l'équation de Hamilton-Jacobi, et si on choisit  $u_0(q) = u(0, q)$ , alors, si  $|t| < \delta$ , le graphe de  $d_q u_t$  est égal à la solution géométrique  $\Gamma_t$  associée à  $u_0$  :

$$\{(q, d_q u_t)\} = \phi_t \{(q, d_q u_0)\} = \Gamma_t.$$

Ceci s'exprime encore sous la forme suivante : pour tous  $s$  et  $t$  dans  $] - \delta, \delta[$ , l'image par  $\phi_{t-s}$  du graphe de  $d_q u_s$  est le graphe de  $d_q u_t$ .

*Remarque :* si  $H$  et  $u_0$  sont tels que la solution géométrique n'est plus un graphe pour un certain temps  $t$ , comme par exemple dans la figure (1), le lemme nous indique qu'on ne peut pas trouver de solution  $\mathcal{C}^2$  définie sur  $[0, t] \times \mathbb{R}^d$ . L'existence de solutions  $\mathcal{C}^2$  n'est donc a priori possible qu'en temps fini, d'où l'introduction des notions de solutions faibles dans la suite de cette étude.

## Unicité

Elle découle du lemme. Si deux applications vérifient le problème de Cauchy sur  $] - \delta, \delta[ \times \Pi^d$ , le lemme précédent donne que leurs dérivées partielles par rapport à  $q$  sont égales, et par l'équation de Hamilton-Jacobi, il en est de même pour les dérivées partielles par rapport à  $t$ . L'égalité des deux solutions en  $t = 0$  donne alors l'égalité sur tout  $] - \delta, \delta[ \times \Pi^d$ .

## Existence

On a vu que lorsque la solution géométrique n'est plus un graphe, on ne peut plus avoir de solution  $\mathcal{C}^2$  au problème de Cauchy. En fait, réciproquement, si  $\Gamma_t$  est un graphe pour tout  $t$  dans  $] - \delta, \delta[$ , on peut construire une solution  $\mathcal{C}^2$  sur  $] - \delta, \delta[ \times \Pi^d$ . Intuitivement, cela revient à choisir pour chaque  $t$   $u_t$  comme une primitive de l'application dont  $\Gamma_t$  est le graphe. Il faut cependant travailler un peu plus finement pour construire la solution  $u$  dont les dérivées temporelles conviennent.

Alors, on déduit l'existence de la solution  $\mathcal{C}^2$  en petit temps du fait que la solution géométrique  $\Gamma_t$  reste un graphe pour  $t$  suffisamment petit. On montre cela, dans nos hypothèses, en trouvant un  $\delta > 0$  pour lequel l'application  $F : (t, q) \mapsto (t, Q^t(q, d_q u_0))$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $] - \delta, \delta[ \times \mathbb{R}^d$  dans lui-même, où  $Q^t$  désigne la première composante de  $\phi^t$ .

## 2 Solution de viscosité

Pour définir des solutions faibles à l'équation de Hamilton-Jacobi, on pense d'abord aux solutions vérifiant l'équation presque partout. Mais on peut trouver des cas simples pour lesquelles ces solutions sont bien trop nombreuses.

*Exemple* : en dimension 1, on choisit le hamiltonien  $H(p) = p^2 - 1$ . Alors, toute application  $u(t, q) = f(q)$ , où  $f$  est une application dérivable presque partout, de dérivée égale à  $\pm 1$ , vérifie  $\partial_t u(t, q) = 0 = -H(\partial_q u(t, q))$ .

En particulier, on n'a pas l'unicité, et donc peu de chances qu'une solution de cette sorte corresponde à quelque chose de physique. C'est pour atteindre l'unicité que Lions et Crandall ont introduit la notion de *solution de viscosité* dans les années 80. Une solution de viscosité est une application continue  $u : \mathbb{R} \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$ , pas nécessairement dérivable. On utilise des fonctions tests dérivables à souhait pour estimer  $u$  dans l'équation différentielle malgré sa non-dérivabilité :

### Définition 1.

- L'application continue  $u$  est une sous-solution de viscosité à l'équation de Hamilton-Jacobi si et seulement si pour toute fonction  $\phi : \mathbb{R} \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant  $\phi(t, x) \geq u(t, x)$  au voisinage d'un point  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Pi^d$  et  $\phi(t_0, x_0) = u(t_0, x_0)$ ,  $\partial_t \phi(t_0, x_0) + H(x_0, \partial_x \phi(t_0, x_0)) \leq 0$ .
- L'application continue  $u$  est une sur-solution de viscosité à l'équation de Hamilton-Jacobi si et seulement si pour toute fonction  $\phi : \mathbb{R} \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant  $\phi(t, x) \leq u(t, x)$  au voisinage d'un point  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Pi^d$  et  $\phi(t_0, x_0) = u(t_0, x_0)$ ,  $\partial_t \phi(t_0, x_0) + H(x_0, \partial_x \phi(t_0, x_0)) \geq 0$ .
- Une solution de viscosité est une application continue qui est à la fois sur-solution et sous-solution de viscosité.

Autrement dit, montrer que  $u$  est une sous-solution de viscosité revient à vérifier que si l'on peut "poser" le graphe d'une fonction dérivable  $\phi$  sur celui de  $u$  en un point  $(t_0, x_0)$ , la différentielle  $(s, p) = (\partial_t \phi(t_0, x_0), \partial_x \phi(t_0, x_0))$  vérifie  $s + H(x_0, p) \leq 0$ .

*Remarque* : si  $u$  est une solution de viscosité, alors  $u$  vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi en tout point de dérivabilité. Ceci nous indique qu'une solution de viscosité lipschitzienne vérifie l'équation presque partout.

L'existence et l'unicité des solutions de viscosité a été prouvée par Lions et Grandall dans [4] pour des données initiales continues. L'opérateur de viscosité  $T^t : \mathcal{C}(\Pi^d, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\Pi^d, \mathbb{R})$ , qui associe à une donnée initiale  $u_0$  la solution de viscosité prise au temps  $t$   $u_t$ , vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. Compatibilité avec l'équation de Hamilton-Jacobi : si  $u : \mathbb{R} \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution  $\mathcal{C}^2$  à l'équation de Hamilton-Jacobi, alors  $T^{t-s} u_s = u_t$ ,
2. Monotonie : si  $u \leq v$  sur  $\Pi^d$ , alors  $T^t u \leq T^t v$  pour tout  $t \geq 0$ ,
3. Invariance par translation : si  $c \in \mathbb{R}$ ,  $T^t(c + u) = c + T^t u$ ,
4. Markov :  $T^{t+t'} = T^t \circ T^{t'}$

### 3 Solution variationnelle

On cherche à construire à partir de la solution géométrique  $\Gamma_t = \phi_t(\{q, d_q u_0\})$  une famille d'opérateurs vérifiant les propriétés citées plus haut. Puisque  $\Gamma_t$  n'est pas nécessairement un graphe quand  $t$  est grand, le but est de "sélectionner" une partie de  $\Gamma_t$  qui puisse s'écrire comme un graphe par morceaux. Ceci est illustré dans la figure 2.

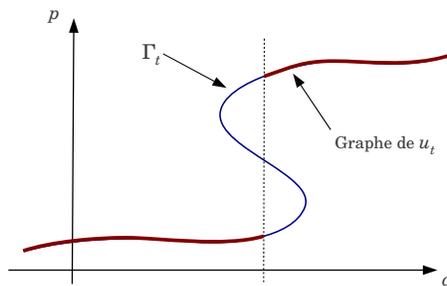


FIGURE 2 – Dans la fibre de temps  $t$

#### Famille génératrice

Grâce au travail de Marc Chaperon (voir par exemple [3]), on sait décrire de manière maniable la solution géométrique  $\Gamma_t$  par une famille génératrice  $S^t u_0 : \Pi^d \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\Gamma_t = \{(q, \partial_q S^t u_0(q, \xi)) \mid \partial_\xi S^t u_0(q, \xi) = 0\},$$

où  $\Xi$  est un espace de paramètres de dimension finie. Dans la fibre de temps  $t$ , et au-dessus du point  $q$ , on sait que les points  $(q, p)$  appartenant à la solution géométrique  $\Gamma_t$  correspondent à des points critiques de l'application  $\xi \mapsto S^t u_0(q, \xi)$ .

#### Minmax

Sélectionner un unique point au-dessus de chaque  $q$  revient à choisir un point critique de  $\xi \mapsto S^t u_0(q, \xi)$ . On construit pour cela un objet appelé *minmax* : il associe à toute application  $f$  proche d'une application  $g$  à l'infini, une de ses valeurs critiques, notée  $\gamma(f)$ , et ce continûment par rapport à la fonction  $f$  pour la norme uniforme (on a  $|\gamma(f) - \gamma(g)| \leq \|f - g\|_\infty$  pour toutes les applications  $f$  et  $g$  dont la différence est uniformément bornée).

#### Construction de la solution variationnelle

Si l'on suppose que le hamiltonien est une forme quadratique non dégénérée en  $p$  lorsque  $p$  est grand, on peut montrer que la famille génératrice est *proche* d'une forme quadratique non dégénérée.

On peut alors définir un opérateur  $R^t$  de la manière suivante :

$$R^t u_0(q) = \gamma(S^t u_0(q, \cdot))$$

et on arrive à montrer qu'il existe une application  $\xi_t : \Pi^d \rightarrow \Xi$  dérivable presque partout par rapport à  $t$  et à sa variable  $q$ , telle que  $\xi_t(q)$  est le point critique de  $\xi \mapsto S^t(q, \xi)$  pour lequel le minmax est atteint :

$$R^t u_0(q) = S^t u_0(q, \xi_t(q)).$$

On démontre alors facilement que  $(t, q) \mapsto R^t u_0(q)$  est une solution presque partout à l'équation de Hamilton-Jacobi. Comme  $\xi_t(q)$  est un point critique, les dérivées de  $R$  sont faciles à calculer sur le domaine de dérivabilité de  $\xi$  :

$$\begin{aligned} \partial_q R^t u_0(q) &= \partial_q S^t u_0(q, \xi_t(q)) + \underbrace{\partial_\xi S^t u_0(q, \xi_t(q))}_{=0} \cdot d_q \xi_t, \\ \partial_t R^t u_0(q) &= \partial_t S^t u_0(q, \xi_t(q)) + \underbrace{\partial_\xi S^t u_0(q, \xi_t(q))}_{=0} \cdot \partial_t(\xi_t(q)). \end{aligned}$$

Or, on montre par le calcul que  $\partial_t S^t u_0(q, \xi_t(q)) = -H_t(q, \partial_q S^t u_0(q, \xi_t(q)))$ . On obtient alors :

$$\partial_t R^t u_0(q) = -H_t(q, \partial_q R^t u_0(q)).$$

L'application  $u(t, q) = R^t u_0(q)$  est donc solution presque partout à l'équation de Hamilton-Jacobi, et vérifie la condition initiale  $u(0, q) = u_0(q)$  sur  $\Pi^d$ .

Ce type de solution est ce qu'on appelle une *solution variationnelle* à l'équation de Hamilton-Jacobi. Le terme variationnel s'explique par la construction du minmax.

Sans rentrer dans les détails techniques de cette construction, on peut mentionner qu'elle s'apparente à la méthode du *lemme du col* présentée par exemple par Bethuel dans son cours [2] : un randonneur sur le graphe d'une application cherche un chemin liant une cuvette à une vallée très basse, tout en évitant au maximum les points d'*altitude* élevée, c'est-à-dire les points pour lesquels l'application est grande. Il choisit alors ce qu'on appelle géographiquement le col entre la cuvette et la vallée ; le lemme du col montre que dans ce contexte et à une hypothèse près, l'altitude du col est une valeur critique de l'application considérée.

On peut montrer que l'opérateur de viscosité vérifie un certain nombre de propriétés qu'on a énoncées pour l'opérateur de viscosité :

1. Compatibilité avec l'équation de Hamilton-Jacobi : si  $u : \mathbb{R} \times \Pi^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution  $\mathcal{C}^2$  à l'équation de Hamilton-Jacobi, alors  $R^{t-s} u_s = u_t$ ,
2. Monotonie : si  $u \leq v$  sur  $\Pi^d$ , alors  $R^t u \leq R^t v$  pour tout  $t \geq 0$ ,
3. Invariance par translation : si  $c \in \mathbb{R}$ ,  $R^t(c + u) = c + R^t u$ .

Par contre, on n'a pas la propriété de Markov dans le cas général (un contre-exemple est construit par Viterbo dans [9]).

*Remarque* : on vérifie facilement qu'on a construit l'opérateur  $R^t$  de sorte à ce que le graphe de  $du_t$  soit toujours inclus dans  $\Gamma_t$  : en effet, là où  $u_t$  est dérivable (c'est-à-dire presque partout), on a  $d_q u_t = d_q R^t u_0 = \partial_q S^t u_0(q, \xi_t(q))$ , donc par définition de la famille génératrice,  $(q, d_q u_t)$  est dans  $\Gamma_t$ .

La famille d'opérateurs  $R$  ne vérifie pas la propriété de Markov comme pour les solutions de viscosité, mais son lien avec la solution géométrique est plus palpable. On cherche alors à étudier dans quel cadre on peut rapprocher ces deux types de solutions.

## 4 Liens entre solution variationnelle et solution de viscosité

### Hamiltonien convexe

Dans sa thèse [6], Joukovskaia a montré au début des années 90 que pour un hamiltonien convexe par rapport à sa variable  $p$ , la solution variationnelle qu'on a construite ici coïncide avec la solution de viscosité.

Comme le hamiltonien est convexe, on peut lui associer un lagrangien qui donne une action lagrangienne sur les trajectoires dans  $\Pi^d$ . C'est à partir de constructions propres au contexte lagrangien qu'on parvient à faire le lien entre solution variationnelle et solution de viscosité.

### Hamiltonien quadratique non dégénéré à l'infini

Sous la direction de Patrick Bernard, j'ai construit à partir de l'opérateur  $R$  un opérateur limite  $\bar{R}$  définissant les solutions de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi.

L'intuition est de considérer l'itéré  $N$ -ème  $R_N^t = (R^{\frac{t}{N}})^N$  est de constater qu'il existe une suite  $N_k$  telle que la suite d'opérateurs  $\{R_{N_k}^t\}_k$  converge vers un opérateur limite  $\bar{R}^t$ .

On arrive à montrer, après quelque tracas techniques, que la famille d'opérateurs  $\bar{R}$  vérifie la propriété de Markov, en plus des propriétés 1), 2) et 3) énoncées précédemment. Un théorème de P. Bernard, démontré récemment dans [1], donne que  $u(t, q) = \bar{R}^t u_0(q)$  est alors une solution de viscosité à l'équation de Hamilton-Jacobi.

### Questions

Il reste des points à éclaircir dans cette relation entre solutions de viscosité et solutions variationnelles : au cours de ma thèse, j'essaierai de comprendre, pour des exemples simples - mais non convexes - de hamiltoniens, où se joue le caractère non-Markov de la solution variationnelle.

On peut également s'interroger sur les différentes solutions variationnelles obtenues pour des objets variationnels de type *minmax* différents ; en effet, si la thèse de Joukovskaia montre que le choix du minmax est adapté pour un hamiltonien convexe, il se pourrait que pour un hamiltonien concave, ce soit une autre construction variationnelle qui donne les solutions de viscosité.

## Références

- [1] P. Bernard, *The Lax-Oleinik semi-group : a Hamiltonian point of view*, arXiv : 1203.3569, 2011
- [2] F. Bethuel, *Equations elliptiques*, chapitre 10, disponible sur la page <http://www.ljll.math.upmc.fr/MathModel/polycopies.php>
- [3] M. Chaperon, *Familles génératrices*, École d'été de Samos, 1990
- [4] M.G. Crandall et P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society 277, p.1-42, 1983
- [5] A. Fathi, *Weak KAM from a PDE point of view : viscosity solutions of the Hamilton-Jacobi equation and Aubry set*, Course CANPDE, 2011
- [6] T. Joukovskaia, *Singularités de Minimax et Solutions Faibles d'Équations aux Dérivées Partielles*, Thèse de Doctorat, Université de Paris VII, Denis Diderot, 1993.
- [7] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963
- [8] W. Qiaoling, *Subtleties of the minmax selector*, arXiv : 1112.5272, 2011
- [9] C. Viterbo, *Solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi et géométrie symplectique*, Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique, 1995-1996