

Construction de difféomorphismes minimaux

Antoine Crouzet & Cyrille Rossant

FIMFA 2006

Le but de ce travail est de montrer l'existence de difféomorphismes minimaux (ou transitifs) sur certaines variétés différentielles.

1 Généralités

1.1 Topologie sur l'ensemble des difféomorphismes

Soit M une variété différentielle \mathcal{C}^∞ réelle de dimension n compacte connexe. On note $\mathcal{D}(M)$ le groupe des difféomorphismes de M .

Définition. On appelle \mathcal{C}^∞ -topologie la topologie sur $\mathcal{D}(M)$ dont une prébase est l'ensemble des :

$$N_{f,(U,\phi),(V,\psi),K,\varepsilon} = \left\{ g \in \mathcal{D}(M) \mid g(K) \subset V, \text{ et } \forall k, \sup_{x \in \phi(K)} \left\| D^k(\psi f \phi^{-1})(x) - D^k(\psi g \phi^{-1})(x) \right\| < \varepsilon \right\},$$

où $f \in \mathcal{D}(M)$, (U, ϕ) et (V, ψ) sont des cartes locales de M , K un compact inclus dans U tel que $f(K) \subset V$, et $\varepsilon > 0$.

Muni de cette topologie, $\mathcal{D}(M)$ est un **groupe topologique métrisable et complet**.

1.2 Difféotopies

On aura besoin dans la suite de la notion de **difféotopie**.

Définition. On appelle **difféotopie** toute application $h :]a, b[\times M \rightarrow M$ (avec $[0, 1] \subset]a, b[$) qui est \mathcal{C}^∞ et telle que $\forall t \in [0, 1], h_t \in \mathcal{D}(M)$. On dit que f et $g \in \mathcal{D}(M)$ sont **difféotopes** s'il existe une difféotopie h telle que $h_0 = f$ et $h_1 = g$. La relation de difféotopie est une relation d'équivalence.

Proposition. Soit X un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur M et ϕ son flot global. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t est un difféomorphisme difféotope à l'identité.

Preuve. Le flot $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ est \mathcal{C}^∞ , pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\phi_s \in \mathcal{D}(M)$, et $\phi_0 = \text{Id}_M$. Donc ϕ est une difféotopie reliant l'identité à ϕ_t , pour tout $t \in \mathbb{R}$. \square

Le lemme suivant nous servira dans la preuve du théorème de FATHI et HERMAN. Il dit qu'une difféotopie provenant d'un champ de vecteurs et définie sur la base d'un revêtement, peut toujours se relever en une difféotopie définie sur l'espace total.

Lemme. Soit $p : M \rightarrow N$ un revêtement \mathcal{C}^∞ , et Y un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur N de flot global ψ . Alors, si $X = p^*Y$ et ϕ est son flot global, le diagramme suivant commute pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi_t} & M \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ N & \xrightarrow{\psi_t} & N \end{array}$$

Preuve. Posons $\gamma_t(x) = p \circ \phi_t(x)$, pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in M$. Alors on a :

$$\left. \frac{d\gamma_t(x)}{dt} \right|_{t=t_0} = T_{\phi_{t_0}(x)} p \left(\left. \frac{d\phi_t(x)}{dt} \right|_{t=t_0} \right) = T_{\phi_{t_0}(x)} p(X(\phi_{t_0}(x))).$$

Or, par définition de l'image réciproque d'un champ de vecteurs, on a :

$$X(x) = p^*Y(x) = (T_x p)^{-1}Y(p(x)),$$

d'où :

$$\left. \frac{d\gamma_t(x)}{dt} \right|_{t=t_0} = T_{\phi_{t_0}(x)} p \left((T_{\phi_{t_0}(x)} p)^{-1} Y(p(\phi_{t_0}(x))) \right) = Y(\gamma_{t_0}(x)).$$

De plus, on a $\gamma_0(x) = p(x)$. Par unicité du flot d'un champ de vecteurs, on a $\gamma_t(x) = \psi_t(p(x))$ donc $p \circ \phi_t = \psi_t \circ p$. \square

2 Difféomorphismes minimaux : définition et premiers exemples

Soit $f \in \mathcal{D}(M)$ un difféomorphisme de M . On considère l'action de \mathbb{Z} sur M définie par $n \cdot x = f^n(x)$.

Définition. Le difféomorphisme f est dit :

- **transitif** si cette action admet au moins une orbite dense,
- **minimal** si toutes les orbites sont denses.

Proposition. Soit $M = \mathbb{T}$ le cercle unité, et R_α la rotation d'angle $2\pi\alpha$.

- Si α est rationnel, les orbites sont finies.
- Si α est irrationnel, toutes les orbites sont denses dans M , et R_α est donc un difféomorphisme minimal.

Preuve. Constatons que $R_\alpha^p = R_{p\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{T}$, on note $O(x) = \{ R_\alpha^p(x) \mid p \in \mathbb{Z} \}$ l'orbite de x pour la rotation.

- Supposons α rationnel : $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) = 1$. On constate alors que $R_\alpha^q = Id_{\mathbb{T}}$ (car rotation d'angle multiple de 2π) donc pour tout $x \in \mathbb{T}$: $R_\alpha^q(x) = x$ d'où $O(x) = \{x, R_\alpha(x), \dots, R_\alpha^{q-1}(x)\}$. Ainsi l'orbite est bien finie et périodique.
- Supposons α irrationnel. Introduisons l'ensemble $S_\alpha = \{ 2\pi p\alpha + 2q\pi \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \}$. C'est un sous groupe additif de \mathbb{R} , donc S_α est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$, soit dense dans \mathbb{R} . Or, si $S_\alpha = a\mathbb{Z}$, puisque $2\pi \in S_\alpha$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $2\pi = ak$ et, puisque $2\pi\alpha \in S_\alpha$, il existe $k' \in \mathbb{Z}^*$ tel que $2\pi\alpha = ak'$. On en déduit alors que $ak' = ak\alpha$, ce qui est absurde car α est irrationnel.

Donc $O(x) = f(S_\alpha)x$ avec $f : t \mapsto e^{it}$ continue et surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{T} : on en déduit que $O(x)$ est dense dans \mathbb{T} . \square

3 Construction d'un homéomorphisme transitif de l'anneau

On note \mathcal{C} l'anneau compris entre les cercles de rayons $\frac{1}{2}$ et 1. On note d la distance euclidienne.

On note R_α la rotation de \mathcal{C} de centre 0 et d'angle $2\pi\alpha$.

Rappel : si $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) = 1$ alors l'orbite de tout point par R_α est q -périodique.

On va construire dans cette section un homéomorphisme de l'anneau transitif.

Dans ce qui suit, on note $f_0 = R_{\frac{1}{4}}$ la rotation d'un quart de tour, et C le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{3}{4}$: $C \subset \mathcal{C}$.

On dira qu'un ensemble G est ε -dense si tout point de l'anneau \mathcal{C} est à une distance $< \varepsilon$ d'un des éléments de G .

Lemme 1 Soit x_0 un élément de C . La rotation f_0 vérifie la propriété : l'orbite $O(x_0)$ est ε_0 -dense, avec $\varepsilon_0 = 2$.

Preuve. En effet, deux points de C sont à une distance maximum de 2 l'un de l'autre, en particulier, tout point de C est à une distance < 2 de $O(x_0) = \{x_0, f_0(x_0), f_0^2(x_0), f_0^3(x_0)\}$. \square

3.1 Lemme important

Lemme 2 Soit $\varepsilon > 0$, et $p \in \mathbb{N}$. Il existe un homéomorphisme h_ε^p de \mathcal{C} vérifiant les trois conditions suivantes :

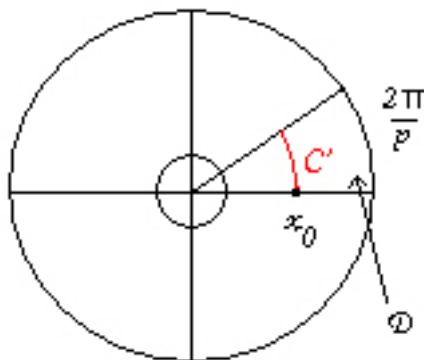
- h_ε^p est périodique de période $\frac{1}{p}$: $h_\varepsilon^p R_{\frac{1}{p}} (h_\varepsilon^p)^{-1} = R_{\frac{1}{p}}$,
- $h_\varepsilon^p(C)$ est ε -dense,
- $h_\varepsilon^p(x_0) = x_0$.

Preuve (Lemme 2). (voir dessin). h_ε^p va fixer les deux points x_0 et $R_{\frac{1}{p}}(x_0)$ et est définie sur la portion \mathcal{D} comprise entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{2\pi}{p}$. On complète ensuite par périodicité. On s'arrange pour que l'image de $C' = \mathcal{D} \cap C$ soit ε -dense dans \mathcal{D} et on conclura par périodicité.

Soit $T \in \mathbb{R}^+$ tel que $T > \frac{1}{\varepsilon}$ et T est de la forme kp où $k \in \mathbb{N}$. Introduisons $g(\theta) = (1 - \varepsilon) \cos(T\theta)$. On constate que $\{(g(\theta), \theta) \mid \theta \in [0, \frac{2\pi}{p}]\}$ est ε -dense dans \mathcal{D} , et que $g(\theta + \frac{2\pi}{p}) = g(\theta)$ pour tout θ . Définissons enfin h par :

$$h(r, \theta) = \begin{cases} (r, \theta) & \text{si } r = \frac{1}{2} \text{ ou } r = 1 \\ ((1 - a)g(\theta) + a, \theta) & \text{si } r = \frac{3}{4} + a \\ ((1 - a)g(\theta) - a, \theta) & \text{si } r = \frac{3}{4} - a \end{cases}$$

et on vérifie bien que h est bijective, continue à reciroque continue sur $[0, \frac{2\pi}{p}]$. On prolonge enfin h par $\frac{1}{p}$ périodicité.



\square

3.2 Construction d'une suite d'homéomorphismes

Dans la suite, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ et note $x_0 = \frac{3}{4}$.

Sur l'ensemble des homéomorphismes de \mathcal{C} , on choisit comme distance :

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathcal{C}} |f(x) - g(x)|$$

(bien définie car \mathcal{C} est compact).

Nous allons construire par récurrence une suite de fonction (f_n) vérifiant les points suivants :

- (1) Pour tout n , l'orbite de x_0 par f_n est ε_n -dense.
- (2) Pour tout n , $d(f_n, f_{n+1}) < \varepsilon_{n+1}$.

On pose $f_0 = R_{\frac{1}{4}}$. On constate que l'orbite de x_0 par f_0 est 1-dense.

3.2.1 Construction de f_1

D'après le lemme 2, il existe un homéomorphisme de \mathcal{C} , noté $h_1 = h_{\frac{1}{4}}^4$, $\frac{1}{4}$ périodique et telle que $h_1(\mathcal{C})$ est $\frac{1}{4}$ -dense.

On a donc $h_1 R_{\frac{1}{4}} h_1^{-1} = R_{\frac{1}{4}}$.

Posons alors $f_1^{(p,q)} = h_1 R_{\frac{p}{q}} h_1^{-1}$.

Lemme 3 *Il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall \frac{p}{q}, \left| \frac{1}{4} - \frac{p}{q} \right| < \alpha \implies d(f_1^{(p,q)}, f_0) < \frac{1}{2} = \varepsilon_1$$

Preuve. h_1 étant continue sur le compact \mathcal{C} , h_1 y est uniformément continue : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout :

$$x, y \in A, |x - y| < \alpha \implies |h_1(x) - h_1(y)| < \frac{1}{2}$$

On constate alors que :

$$\begin{aligned} d(f_1^{(p,q)}, f_0) &= d(h_1 R_{\frac{p}{q}} h_1^{-1}, h_1 R_{\frac{1}{4}} h_1^{-1}) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{C}} |h_1 R_{\frac{p}{q}} h_1^{-1}(x) - h_1 R_{\frac{1}{4}} h_1^{-1}(x)| \\ &= \sup_{y \in \mathcal{C}} |h_1(R_{\frac{p}{q}}(y) - R_{\frac{1}{4}}(y))| \end{aligned}$$

Or si $|\frac{1}{4} - \frac{p}{q}| < \frac{\alpha}{2\pi}$ alors $d(R_{\frac{p}{q}}, R_{\frac{1}{4}}) < \alpha$ d'où le résultat. □

Terminons la construction de la fonction f_1

Proposition. Il existe p_1 et q_1 vérifiant les deux hypothèses suivantes :

- $|\frac{1}{4} - \frac{p_1}{q_1}| < \frac{\alpha}{2\pi}$ où le α correspond au lemme précédent,
- L'orbite par $f_1^{(p_1, q_1)}$ de x_0 est $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ -dense.

Preuve. Par uniforme continuité de h_1 , il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{C}, |x - y| < \beta \implies |h_1(x) - h_1(y)| < \frac{1}{4}$$

Choisissons p_1 et q_1 $\neq 0$ tels que $|\frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{4}| < \frac{\alpha}{2\pi}$ et $\frac{p_1}{q_1} < \frac{\beta}{2\pi}$.

Montrons alors que $f_1^{(p_1, q_1)}$ est $\frac{1}{2}$ -dense. Soit $x \in \mathcal{C}$. Il existe, par $\frac{1}{4}$ -densité de $h_1(\mathcal{C})$, un élément y de \mathcal{C} tel que

$$|x - h_1(y)| < \frac{1}{4}$$

Par choix de p_1, q_1 , il existe un entier n tel que $|y - R_{\frac{p_1}{q_1}}^n(x_0)| < \beta$.

Mais alors : $|h_1(R_{\frac{p_1}{q_1}}^n(h_1^{-1}(x_0))) - x| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ d'où le résultat.

On pose alors $f_1 = f_1^{(p_1, q_1)}$ et on vérifie bien que f_1 satisfait les deux propriétés (1) et (2) pour $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$.

3.2.2 Construction de f_{n+1} à partir de f_n

On va construire exactement de la même manière f_{n+1} à partir de f_n .

Tout d'abord, on écrit $f_n = h_n R_{\frac{p_n}{q_n}} h_n^{-1}$.

D'après le lemme 2, il existe un homéomorphisme de \mathcal{C} , noté $h_{n+1} = h_{\frac{q_n}{2^{n+1}}}$, $\frac{1}{q_n}$ périodique et telle que $h_{n+1}(C)$ est $\frac{1}{2^{n+1}}$ -dense.

On a donc $h_{n+1} R_{\frac{p_n}{q_n}} h_{n+1}^{-1} = R_{\frac{p_n}{q_n}}$.

Posons alors $f_{n+1}^{(p, q)} = h_{n+1} R_{\frac{p}{q}} h_{n+1}^{-1}$.

Lemme 4 *Il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall \frac{p}{q}, \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q} \right| < \alpha \implies d(f_{n+1}^{(p, q)}, f_n) < \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon_{n+1}$$

Preuve. h_{n+1} étant continue sur le compact \mathcal{C} , h_{n+1} y est uniformément continue : il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in A, |x - y| < \alpha \implies |h_{n+1}(x) - h_{n+1}(y)| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

On constate alors que :

$$\begin{aligned} d(f_{n+1}^{(p, q)}, f_n) &= d(h_{n+1} R_{\frac{p}{q}} h_{n+1}^{-1}, h_{n+1} R_{\frac{p_n}{q_n}} h_{n+1}^{-1}) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{C}} |h_{n+1} R_{\frac{p}{q}} h_{n+1}^{-1}(x) - h_{n+1} R_{\frac{p_n}{q_n}} h_{n+1}^{-1}(x)| \\ &= \sup_{y \in \mathcal{C}} |h_{n+1}(R_{\frac{p}{q}}(y) - R_{\frac{p_n}{q_n}}(y))| \end{aligned}$$

Or si $|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}| < \frac{\alpha}{2\pi}$ alors $d(R_{\frac{p}{q}}, R_{\frac{p_n}{q_n}}) < \alpha$ d'où le résultat. \square

Terminons la construction de la fonction f_{n+1} :

Proposition. Il existe p_{n+1} et q_{n+1} vérifiant les deux hypothèses suivantes :

- $|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{\alpha}{2\pi}$ où le α correspond au lemme précédent,
- L'orbite par $f_{n+1}^{(p_{n+1}, q_{n+1})}$ de x_0 est $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$ -dense.

Preuve. Par uniforme continuité de h_{n+1} , il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in C, |x - y| < \beta \implies |h_{n+1}(x) - h_{n+1}(y)| < \frac{1}{2^{n+2}}$$

Choisissons p_{n+1} et $q_{n+1} > 0$ tels que $|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{\alpha}{2\pi}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{\beta}{2\pi}$.

Montrons alors que $f_{n+1}^{(p_{n+1}, q_{n+1})}$ est $\frac{1}{2^{n+1}}$ -dense. Soit $x \in \mathcal{C}$. Il existe, par $\frac{1}{2^{n+2}}$ -densité de $h_{n+1}(C)$, un élément y de C tel que

$$|x - h_{n+1}(y)| < \frac{1}{2^{n+2}}$$

Par choix de p_{n+1}, q_{n+1} , il existe un entier r tel que $|y - R_{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}}^r(x_0)| < \beta$.

Mais alors : $|h_{n+1}(R_{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}}^r(h_{n+1}^{-1}(x_0))) - x| < \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon_{n+1}$ d'où le résultat. \square

On pose alors $f_{n+1} = f_{n+1}^{(p_{n+1}, q_{n+1})}$ et on vérifie bien que f_{n+1} satisfait les deux propriétés (1) et (2) pour $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

3.2.3 Conclusion

Constatons alors que la suite (f_n) est de Cauchy. En effet :

$$d(f_n, f_{n+p}) \leq d(f_n, f_{n+1}) + \dots + d(f_{n+p-1}, f_{n+p}) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p+1}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

Il existe donc (l'espace étant complet) un homéomorphisme f_∞ de \mathcal{C} vérifiant pour tout n , f_∞ est ε_n -dense. Or

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

Ainsi, f_∞ est transitif.

4 Construction d'un difféomorphisme minimal

On démontre dans cette section le théorème suivant (dû à A. FATHI et M. R. HERMAN, qui se sont inspirés d'une méthode de D. V. ANOSOV et A. B. KATOK) :

Si M possède une **action \mathcal{C}^∞ libre de \mathbb{T}** , alors il existe un **difféomorphisme minimal** de M .

Pour $t \in \mathbb{T}$, on note ϕ_t le difféomorphisme de M associé à l'action du cercle : $\phi_t(x) = t.x$.

Proposition. Les orbites de cette action sont les trajectoires d'un flot global associé à un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ .

Preuve. On peut remplacer $\phi_t(x)$, où $t \in \mathbb{T}$, par $\phi_{\pi(t)(x)}$, où $t \in \mathbb{R}$ et avec $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ la projection canonique. Posons, pour $x \in M$, $X(x) = \left. \frac{d\phi_t(x)}{dt} \right|_{t=0}$. Alors X est un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ sur M . Montrons que ϕ est précisément le flot global de X .

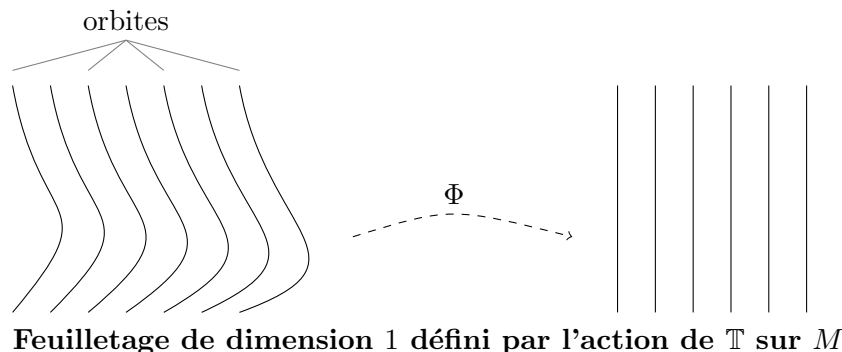
En effet, on a :

$$\left. \frac{d\phi_t(x)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d\phi_{t-t_0}(\phi_{t_0}(x))}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d\phi_t(\phi_{t_0}(x))}{dt} \right|_{t=0} = X(\phi_{t_0}(x)),$$

en utilisant que $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

De plus, $\phi_0(x) = x$. Par unicité, le flot global de X est ϕ , et donc les courbes intégrales de X sont exactement les orbites de l'action. \square

Ce champ de vecteurs X ne s'annule pas sur M . En effet, si $X(x) = 0$, alors la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto x$ vérifierait le système différentiel associé à X , ainsi que la condition initiale en x , et par unicité, on aurait que l'orbite de x par \mathbb{T} est réduite à un point, ce qui est absurde puisque l'action du cercle est libre. D'après le théorème de redressement des champs de vecteurs, on voit que les orbites de l'action définissent un **feuilletage de dimension 1 de M** .



La proposition suivante est le point de départ de la démonstration de ce théorème. Elle donne un moyen pratique de caractériser les difféomorphismes minimaux.

Proposition. Le difféomorphisme f est minimal si, et seulement si, pour tout ouvert non vide U de M , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$M = \bigcup_{k=0}^n f^k(U).$$

Preuve. Si f est minimal, soit U un ouvert non vide, et $x \in M$. Comme l'orbite de x est dense dans M , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f^k(x) \in U$, et $x \in f^{-k}(U)$. On conclut par compacité.

Réciproquement, soit $x \in M$, et U un ouvert non vide. On veut montrer que l'orbite de x rencontre U . Or, par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in f^k(U)$, donc $f^{-k}(x) \in U$, d'où le résultat. \square

On prend une base dénombrable d'ouverts $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de M , et pour tout ouvert non vide U de M , on pose :

$$\mathcal{M}_U = \left\{ f \in \mathcal{D}(M) \mid \exists n \in \mathbb{N} : M = \bigcup_{k=0}^n f^k(U) \right\}.$$

On note \mathcal{M} l'ensemble des difféomorphismes minimaux de M , et $\mathcal{F} = \overline{\{g\phi_t g^{-1} \mid g \in \mathcal{D}(M), t \in \mathbb{T}\}}$ l'adhérence dans $\mathcal{D}(M)$ de l'ensemble des conjugués des ϕ_t . C'est un sous-espace fermé (donc complet) non vide de $\mathcal{D}(M)$.

Dans toute la suite, U désignera un ouvert non vide quelconque de M . On va alors démontrer le résultat suivant :

$\mathcal{M}_U \cap \mathcal{F}$ est un ouvert dense dans \mathcal{F} , et :

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\mathcal{M}_{U_i} \cap \mathcal{F}).$$

On en déduira que $\mathcal{M} \cap \mathcal{F}$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans l'espace complet \mathcal{F} , donc est encore dense par le théorème de Baire, ce qui donnera bien l'existence de difféomorphismes minimaux sur M .

On montre ce résultat par étapes. L'égalité découle immédiatement de la proposition précédente et du fait que les (U_i) forment une base dénombrable d'ouverts de M .

On montre d'abord que \mathcal{M}_U est ouvert.

Lemme. Soit K un compact de M , et U un ouvert. Alors l'ensemble des f tels que $f^{-1}(K) \subset U$ est un ouvert de $\mathcal{D}(M)$.

Preuve. Cela découle directement de la définition de la C^∞ -topologie de $\mathcal{D}(M)$. \square

Lemme. Soit $(O_i)_{0 \leq i \leq n}$ un recouvrement ouvert fini de M . Alors il existe des compacts $K_i \subset O_i$ qui recouvrent encore M .

Preuve. On passe au complémentaire par commodité. Soient $(F_i)_{0 \leq i \leq n}$ des fermés d'intersection vide. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tels que les ouverts $O_{i,\varepsilon} \supset F_i$ soient encore d'intersection vide, avec $O_{i,\varepsilon} = \{x \in M \mid d(x, F_i) < \varepsilon\}$. En effet, dans le cas contraire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on aurait $x_p \in M$ avec $\forall i, d(x_p, F_i) < \frac{1}{p}$. Si x est une valeur d'adhérence, on voit alors que $\forall i, x_p \in F_i$, ce qui est absurde. \square

Proposition. \mathcal{M}_U est ouvert.

Preuve. Il suffit de montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{M}_{U,n} = \{ f \in \mathcal{D}(M) \mid M = \bigcup_{k=0}^n f^k(U) \}$ est ouvert. Si f est dans cet ensemble, soient $K_k \subset f^k(U)$ des compacts recouvrant M (qui existent d'après le lemme précédent). Alors l'ensemble des g vérifiant $K_k \subset g^k(U)$, pour tout $k \leq n$, est un ouvert de $\mathcal{M}_{U,n}$ contenant f . \square

Il s'agit maintenant de montrer la densité de $\mathcal{M}_U \cap \mathcal{F}$ dans \mathcal{F} .

1. **Première étape** : soit N une variété compacte connexe admettant une action libre du cercle, et U un ouvert non vide de N . On montre dans cette première étape qu'il existe un difféomorphisme H de N difféotope à l'identité, tel que $H^{-1}(U)$ coupe toutes les orbites de l'action du cercle sur N .
2. **Deuxième étape** : on utilise la première étape pour montrer que si $\frac{p}{q}$ est un rationnel du cercle, alors il existe un difféomorphisme H de M tel que $H\phi_{\frac{p}{q}}H^{-1} = \phi_{\frac{p}{q}}$, avec $H\phi_tH^{-1} \in \mathcal{M}_U$ pour tout t irrationnel du cercle.
3. **Troisième étape** : on montre dans cette dernière étape que la précédente permet de conclure.

4.1 Première étape

On appelle :

- **disque de N** toute image par un \mathcal{C}^∞ -plongement $i : \bar{D}_1 = \bar{B}_{n-1}(0, 1) \rightarrow N$ avec $\bar{B}_{n-1}(0, 1)$ la boule unité fermée de \mathbb{R}^{n-1} ,
- **disque ouvert voisinage d'un disque** $\bar{D} = i(\bar{D}_1)$ toute image par un \mathcal{C}^∞ -plongement $j : D_{1+\varepsilon} \rightarrow N$ telle que $j|_{\bar{D}_1} = i$.

On appelle intérieur d'un disque $\bar{D} = i(\bar{D}_1)$ le sous-ensemble $D = i(D_1) \subset \bar{D}$.

Les orbites N_x de l'action du cercle définissent un feuilletage de N de dimension 1 : les N_x sont des sous-variétés \mathcal{C}^∞ de N difféomorphes au cercle.

On dit qu'un disque \bar{D} est **transverse** à l'action s'il admet un disque ouvert voisinage D' tel que, pour tout point x de D' , l'espace tangent à D' en x soit supplémentaire à l'espace tangent à N_x en x .

On commence par **construire un nombre fini de disques transverses disjoints tels que la réunion de leurs intérieurs coupe chaque orbite.**

1. Soit $(V_i, \psi_i)_{i=1 \dots m}$ un atlas de cartes feuilletées de N , avec $\psi_i(V_i) = D_{1+\varepsilon} \times]-1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, et $K_i = \psi_i^{-1}(\bar{D}_1 \times [-1, 1]) \subset V_i$ des compacts recouvrant encore N .
2. On construit ces disques par récurrence.

On prend comme premier disque $\bar{D}^1 = \psi_1^{-1}(\bar{D}_{1+\frac{\varepsilon}{2}} \times [-1, 1])$.

Hypothèse de récurrence : supposons construits, pour $1 \leq l \leq j$, k_l disques $\bar{D}^{l,k}$ transverses disjoints, tels que la réunion de leurs intérieurs coupe chaque orbite passant par $\bigcup_{i=1}^l K_i$.

3. On pose :

$$L = K_{j+1} \cap \left(\bigcup_{l=1}^j \bigcup_{k=1}^{k_l} \bar{D}^{l,k} \right).$$

Ce compact se plonge par ψ_{j+1} dans $\bar{D}_1 \times [-1, 1]$: on note encore L par abus l'image de L par ce plongement. Pour $x \in \bar{D}_1$, on pose $L_x = L \cap (\{x\} \times [-1, 1])$. C'est un sous-ensemble fini de $\{x\} \times [-1, 1]$.

4. On remarque que si $(x, z) \notin L$, alors il existe un voisinage $V_x \times W_z$ ne rencontrant pas L . Dans ce cas, si $y \in V_x$, on a $L_y \cap (\{y\} \times W_z) = \emptyset$.

Soit $x \in \overline{D}_1$, et U_x un voisinage de L_x dans $\{x\} \times [-1, 1]$. On recouvre $\{x\} \times ([-1, 1] \setminus U_x)$ par un nombre fini d'ouverts W_{z_i} , et on pose $V_x = \bigcap_i W_{z_i}$. Pour $y \in V_x$, on a $L_y \subset \{y\} \times U_x$. Ainsi, il existe un voisinage V_x de x dans \overline{D}_1 tel que $L_y \subset \{y\} \times U_x$ lorsque $y \in V_x$.

5. On recouvre alors \overline{D}_1 par des disques ouverts B^i , $i = 1..m$, avec $\overline{B}^i \subset \overline{D}_{1+\varepsilon}$, et on construit des ouverts U_i de $[-1, 1]$ tels que $[-1, 1] \setminus U_i$ soit infini, et pour $y \in \overline{B}^i$, on ait $L_y \subset \{y\} \times U_i$.

Les disques de l'étape $j+1$ sont alors les disques $\overline{D}^{l,k}$ des étapes précédentes, auxquels on ajoute :

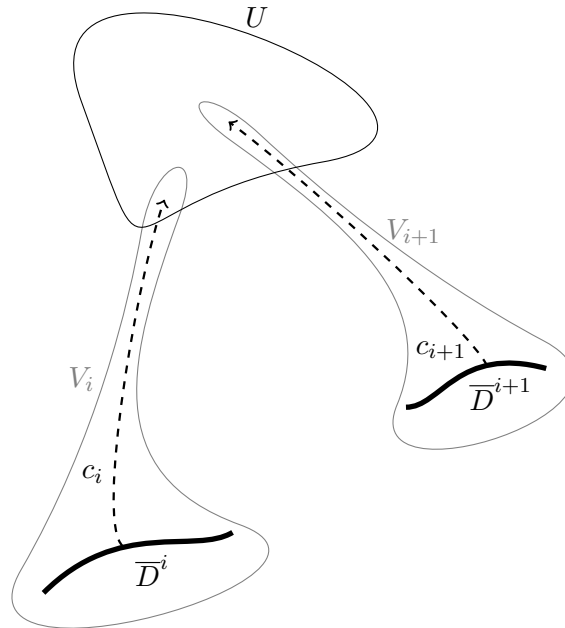
- $\overline{D}^{j+1,1} = \{z_1\} \times \overline{B}^1$ pour $z_1 \in [-1, 1] \setminus U_1$,
- \dots ,
- $\overline{D}^{j+1,m} = \{z_m\} \times \overline{B}^m$ avec $z_m \in [-1, 1] \setminus U_m$, et $z_m \notin \{z_1, \dots, z_{m-1}\}$.

6. On voit alors que la réunion des intérieurs de ces m disques, à savoir les $\{z_i\} \times B^i$, coupe chaque orbite passant par K_{j+1} (ces orbites n'étant autres que les $\{x\} \times [-1, 1]$ lorsque x parcourt \overline{D}_1), vu que les B^i recouvrent \overline{D}_1 . Ils sont deux à deux disjoints, et ne rencontrent aucun des disques précédents \overline{D}^i . En effet, les intersections des disques précédents avec K_{j+1} sont l'ensemble des L_y pour $y \in \overline{D}_1$, et on a toujours $L_y \subset \{y\} \times \bigcup_1^m U_i$. Or les disques que l'on vient de construire sont à une hauteur z_i avec $z_i \notin \bigcup_1^m U_i$.

Ce premier résultat est donc démontré.

On construit maintenant un difféomorphisme de N tel que $H^{-1}(U)$ coupe chaque orbite de l'action. Rappelons que le **support** d'un difféomorphisme de N est l'adhérence du complémentaire de l'ensemble des points fixes.

1. Pour chaque disque \overline{D}^i , on considère un arc c_i de classe \mathcal{C}^∞ (image par un plongement \mathcal{C}^∞ d'un intervalle compact de \mathbb{R}) joignant \overline{D}^i à U , et on prend un voisinage ouvert V_i de $\overline{D}^i \cup c_i$ difféomorphe à \mathbb{R}^n , de telle sorte que les V_i soient tous disjoints.
2. On construit alors (voir le lemme ci-dessous) des difféomorphismes $H_i : V_i \rightarrow V_i$ à supports compacts, difféotopes à l'identité, et tels que $H_i(\overline{D}^i) \subset V_i \cap U$.



Construction des difféomorphismes H_i

3. Comme les H_i sont à supports compacts dans V_i , et que les V_i sont deux à deux disjoints, on peut construire un difféomorphisme H de N qui coïncide avec H_i sur chaque V_i , et qui soit difféotope à l'identité. Alors $H(\bigcup_i \overline{D^i}) \subset U$. Donc $H^{-1}(U)$ coupe chaque orbite.

Lemme. Soit $\overline{B}(v, r)$ une boule fermée de rayon $r > 0$ de \mathbb{R}^n . Alors il existe un difféomorphisme h de \mathbb{R}^n à support compact, difféotope à l'identité, tel que $h(\overline{B}(0, 1)) \subset \overline{B}(v, r)$.

Preuve. **Cas où $r \geq 1$.** On va construire un difféomorphisme à support compact qui coïncide avec la translation de vecteur v sur un certain compact. Pour cela, on prend M assez grand pour que les deux boules soient incluses dans $B(0, M - 1)$.

On considère ensuite sur \mathbb{R}^n le champ de vecteurs constant égal à v , et, si ψ est une fonction plateau qui vaut 1 sur $\overline{B}(0, M)$, on pose $X(x) = \psi(x)v$. Ce champ de vecteurs C^∞ est à support compact, donc est complet. On note ϕ son flot global. Alors $h = \phi_1$ est un difféomorphisme à support compact tel que $h(\overline{B}(0, 1)) \subset \overline{B}_r$.

Cas où $r < 1$. On se ramène, quitte à composer avec le ϕ_1 du cas précédent, au cas où $v = 0$. On considère le champ de vecteur C^∞ sur \mathbb{R}^n radial, que l'on multiplie par une fonction plateau ψ comme dans le cas précédent : $X(x) = -\psi(x)x$. Si ϕ est le flot global, alors il existe t tel que $h = \phi_t$ soit un difféomorphisme à support compact, et $h(\overline{B}(0, 1)) = \overline{B}_r$ (il faut prendre $t = -\log r$).

Ces difféomorphismes sont bien **difféotopes à l'identité**, car ils sont construits à partir de flots globaux de champs de vecteurs. \square

4.2 Deuxième étape

Soit $\frac{p}{q}$ un rationnel du cercle. Comme on le verra dans la troisième étape, il suffira pour conclure de montrer que $\phi_{\frac{p}{q}}$ peut être approché par des difféomorphismes de la forme $f_t = h\phi_t h^{-1}$ qui vérifient la propriété de recouvrement de M par les $f_t^k(U)$. Pour cela, on va d'abord construire, dans cette deuxième étape, un difféomorphisme H vérifiant :

- $H\phi_{\frac{p}{q}}H^{-1} = \phi_{\frac{p}{q}}$,
 - $H^{-1}(U)$ coupe toutes les orbites de l'action de départ $t \mapsto \phi_t$.
1. Soit G le sous-groupe fini du cercle engendré par $\frac{p}{q}$ (qui se plonge dans $\mathcal{D}(M)$). Alors G agit librement sur M et, posant $N = M/G$, on a : $\pi : M \rightarrow N$ est un revêtement C^∞ fini. L'action passe alors au quotient en une action libre de \mathbb{T}/G sur $N = M/G$. Comme G est un sous-groupe fini de \mathbb{T} , le groupe \mathbb{T}/G est isomorphe à \mathbb{T} , donc on a bien une action C^∞ et libre de \mathbb{T} sur N .
 2. On applique alors l'étape précédente à N et à l'ouvert $U' = \pi(U)$: il existe un difféomorphisme H' de N difféotope à l'identité tel que $H'^{-1}(U')$ coupe toute orbite de l'action de \mathbb{T} sur N .
 3. On peut alors, d'après le lemme de la section sur les difféotopies, relever H' en un difféomorphisme H de M . Montrons qu'on a bien $H\phi_{\frac{p}{q}}H^{-1} = \phi_{\frac{p}{q}}$.

En effet, on a construit H' à partir du flot d'un champ de vecteurs. Donc, d'après le lemme, on peut relever chaque H'_t de la difféotopie en un H_t , difféomorphisme sur M . La commutation du diagramme signifie que $pH_t = H'_t p$. En posant $f_t = H_t \phi_{\frac{p}{q}} H_t^{-1}$, avec $t \in [0, 1]$, on en déduit que $p \circ f_t = p$.

Soit $x \in M$, on a $f_t(x) = g.x$ pour un certain $g \in G$. Posons alors $H_g = \{x \in M \mid f_t(x) = g.x\}$: ces ensembles forment une partition finie de M . Comme ils sont fermés, on obtient par connexité qu'il existe g tel que $f_t = \phi_g$, donc $f_t \in G$. Comme $f_0 = \phi_{\frac{p}{q}}$, que $t \mapsto f_t$ est continue de $[0, 1]$ dans G , et que G est discret, on obtient finalement que $H_t \phi_{\frac{p}{q}} H_t^{-1} = \phi_{\frac{p}{q}}$, pour tout $t \in [0, 1]$. On conclut en prenant $t = 1$.

4. On a bien que $H^{-1}(U)$ coupe toutes les orbites de l'action du cercle sur M .

En effet, $H^{-1}(U')$ coupe toute orbite de l'action de \mathbb{T} sur N . Donc, pour tout $x \in M$, il existe $t \in \mathbb{T}$ tel que $H'(t.\pi(x)) \in U'$. Donc $H' \circ \pi(t.x) = \pi \circ H(t.x) \in \pi(U)$, donc $H(t.x) = g.u$ avec $g \in G$ et $u \in U$. On en déduit que $g^{-1}.H(t.x) = H(g^{-1}t.x) \in U$, donc l'orbite de x coupe bien $H^{-1}(U)$.

Pour t irrationnel du cercle, d'après le lemme suivant appliqué à l'action conjuguée par H , on a $H\phi_t H^{-1} \in \mathcal{M}_U$. La deuxième étape est donc terminée.

Lemme. Si V est un ouvert de M qui coupe toutes les orbites de l'action, et t un irrationnel de \mathbb{T} , alors $\phi_t \in \mathcal{M}_V$.

Preuve. Soit $x \in M$. On note M_x son orbite dans M , et f_x la restriction de $f = \phi_t$ à M_x (f_x laisse stable M_x). Comme t est irrationnel, f_x est minimal sur M_x .

En effet, soit $y \in M_x$. Montrons que $\{f_x^n(y) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans M_x . On remarque que $f_x^n(y) = t^n.y$, et $\{t^n.y \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\psi_y(t^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, où $\psi_y : \mathbb{T} \rightarrow M_y = M_x$ est l'application orbitale associée à y . Comme ψ_y est continue surjective, et $\{t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans \mathbb{T} , on a bien que $\{f_x^n(y) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans M_x . Donc f_x est bien un difféomorphisme minimal sur M_x .

L'ouvert $V \cap M_x$ non vide de M_x vérifie donc :

$$M_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_x^n(V \cap M_x) \quad \text{d'où} \quad M = \bigcup_{x \in M, n \in \mathbb{N}} f_x^n(V \cap M_x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in M} f_x^n(V \cap M_x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(V),$$

et on conclut par compacité de M . □

4.3 Troisième étape

On veut montrer que $\mathcal{M}_U \cap \mathcal{F}$ est dense dans \mathcal{F} . Il suffit pour cela de montrer que, si $g\phi_t g^{-1}$ est un difféomorphisme de M , alors il est dans $\overline{\mathcal{M}_U}$.

On remarque que $g^{-1}\mathcal{M}_U g = \mathcal{M}_{g^{-1}(U)}$, donc $g^{-1}\overline{\mathcal{M}_U} g = \overline{\mathcal{M}_{g^{-1}(U)}}$. Il suffit donc de montrer que $\phi_t \in \overline{\mathcal{M}_U} \cap \mathcal{F}$, pour tout ouvert non vide U .

Or, l'ensemble des rationnels est dense dans \mathbb{T} , donc il suffit de montrer que $\phi_{\frac{p}{q}} \in \overline{\mathcal{M}_U} \cap \mathcal{F}$ pour un rationnel quelconque du cercle.

La seconde étape donne un difféomorphisme H de M tel que, si t_k est une suite d'irrationnels du cercle tendant vers t , alors $H\phi_{t_k} H^{-1} \in \mathcal{M}_U \cap \mathcal{F}$ tend vers $H\phi_{\frac{p}{q}} H^{-1} = \phi_{\frac{p}{q}}$.

Le théorème est bien démontré.

5 Application aux sphères de dimension impaire

On montre maintenant que le théorème précédent s'applique aux sphères de dimension impaire \mathbb{S}_{2n+1} .

Le cercle agit librement et de manière \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{S}_{2n+1} de la manière suivante : on identifie d'abord \mathbb{S}_{2n+1} avec $\left\{ (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1 \right\}$. C'est une variété \mathcal{C}^∞ réelle compacte connexe de dimension $2n + 1$. Le cercle des complexes de module 1 agit par $\lambda.(z_1, \dots, z_{n+1}) = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_{n+1})$. Cette action est visiblement \mathcal{C}^∞ et libre.

Donc le théorème de FATHI et HERMAN s'applique : \mathbb{S}_{2n+1} **admet un difféomorphisme minimal**.

Dans le cas $n = 1$, les orbites de \mathbb{S}_3 sous l'action de \mathbb{S}_1 peuvent se visualiser grâce à la **fibration de Hopf**.

Il y a plusieurs manières de définir cette fibration.

1. L'application :

$$\begin{cases} \Psi : \mathbb{S}_3 & \longrightarrow & SU(2) \\ (u, v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme. On note $G = SU(2)$ et H le sous-groupe de Lie image de $\mathbb{S}_1 = \{ (u, 0) \in \mathbb{S}_3 \mid u \in \mathbb{S}_1 \}$ par Ψ . Alors l'application $\pi : G \rightarrow G/H$ est une fibration de fibre type H , qui se transporte via Ψ^{-1} en une fibration $\pi' : \mathbb{S}_3 \rightarrow \mathbb{S}_3/\mathbb{S}_1$ de fibre type \mathbb{S}_1 . Les fibres sont alors précisément les orbites de l'action définie plus haut.

En effet, H agit sur G par translations à gauche : $\Psi(z, 0) \cdot \Psi(u, v) = \Psi(zu, zv)$ comme le montre un petit calcul. Par Ψ^{-1} , \mathbb{S}_1 agit sur \mathbb{S}_3 par $z \cdot (u, v) = (zu, zv)$. C'est précisément l'action définie plus haut.

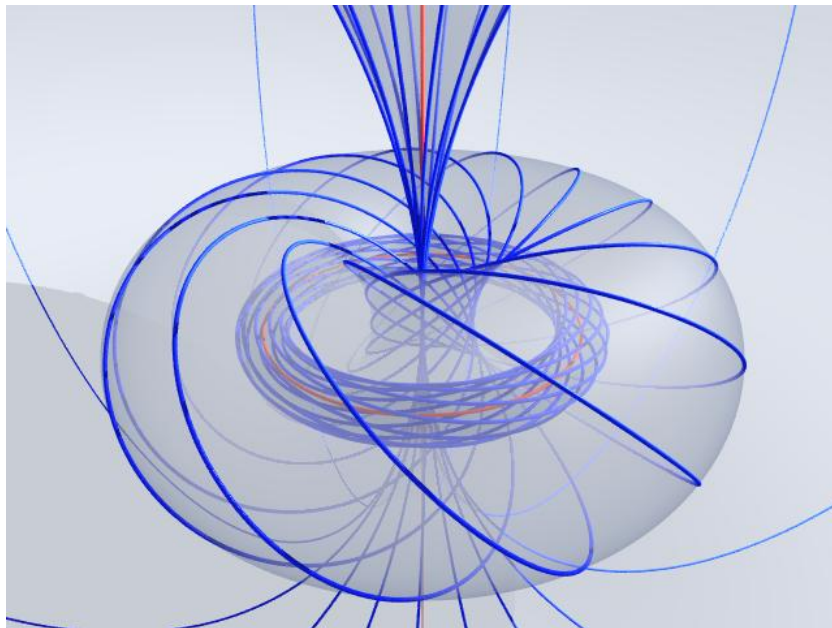
2. Soit $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}$ l'application canonique de la droite projective complexe, et h sa restriction à \mathbb{S}_3 . Alors h est une fibration par \mathbb{S}_1 , les fibres étant encore les orbites de l'action.

3. On identifie \mathbb{S}_2 à un sous-ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} : \mathbb{S}_2 = \{ (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1 \}$. Alors $\mathbb{P}\mathbb{C}$ s'identifie à $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ grâce à la projection stéréographique :

$$\begin{cases} p : \mathbb{S}_2 & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C} \\ (z, t) & \longmapsto & [z : 1 - t], \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q : \mathbb{P}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{S}_2 \\ [u : v] & \longmapsto & \left(\frac{2u\bar{v}}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + |v|^2} \right). \end{cases}$$

Alors la fibration de Hopf peut s'écrire :

$$\begin{cases} h : \mathbb{S}_3 & \longrightarrow & \mathbb{S}_2 \\ (u, v) & \longmapsto & (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2). \end{cases}$$



Les fibres dans \mathbb{S}_3 de la fibration de Hopf

(www.umpa.ens-lyon.fr/~bkloECKN/)

Références

- [1] Albert FATHI, Michael R. HERMAN, Existence de difféomorphismes minimaux, SMF 1977, pp. 37-59.

- [2] Morris W. HIRSCH, Differential Topology, Springer-Verlag 1976.
- [3] Benoît KLOECKNER, Page personnelle, www.umpa.ens-lyon.fr/~bkloeckn/
- [4] Jean-Yves MÉRINDOL, Nombres et algèbre, EDP Sciences 2006.
- [5] WIKIPEDIA, The Free Encyclopedia, en.wikipedia.org/wiki/Hopf_fibration

Tous nos remerciements à Frédéric LE ROUX pour son aide précieuse à la rédaction de ce mémoire.