Effaçabilité, capacité analytique, et théorèmes-$T(b)$.

Eddy Routin, sous la direction de Guy David.

Septembre 2007

Table des matières

Introduction **1**

1 Notions de base **2**

1.1 Cadre de l'étude 2

1.2 Opérateurs d'intégrale singulière 3

2 Théorèmes $T(b)$ **4**

2.1 Les théorèmes classiques 4

2.2 Une version locale plus souple 6

Bibliographie **10**

Introduction

Le point de départ de mon travail était un vieux problème d'analyse complexe, le problème de Painlevé. Cela consiste à tenter de déterminer de manière géometrique quels ensembles du plan complexe sont effaçables, au sens où toute fonction analytique bornée sur le complémentaire d'un tel ensemble admet un prolongement analytique au plan complexe tout entier. Un point est ainsi effaçable, alors qu'un disque non trivial ne l'est pas. Il peut paraître naturel de penser que les "petits" ensembles sont effaçables, alors que les "gros" ne le sont pas. Il existe certains indicateurs de taille très importants dans le cadre de ce problème tels que la dimension de Hausdorff, et, surtout, la capacité analytique, mais nous n'aurons pas le loisir de détailler cela ici.

Le point central est que la notion d'ensemble effaçable est finalement étroitement liée à la continuité L^2 de certains opérateurs d'intégrale singulière comme la transformée de Cauchy. C'est sur ce point précis que j'ai choisi de développer mon exposé étant donné que cela constituera mon domaine de recherche. Je commencerai donc par définir les notions de base, puis j'énoncerai les principaux résultats de continuité connus des opérateurs d'intégrale singulière, les théorèmes dits "théorèmes $T(b)$", et enfin je terminerai en présentant une version locale plus souple de ces théorèmes due à M. Christ.

1 Notions de base

Dans cette partie, nous ne pouvons évidemment pas donner toutes les définitions ou propriétés des objets utilisés. Nous ne définirons donc que les notions importantes qui nous serviront par la suite.

1.1 Cadre de l'étude

Définition 1.1. Soit E un espace localement compact séparable, d une distance sur E et μ une mesure borélienne positive localement finie sur E. Le triplet (E, d, μ) est appelé *espace de type homogène* s'il existe $C < \infty$ telle que pour tout $x \in E$, pour tout $r \geq 0$

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)).$$

Le mesure μ est alors dite *doublante*.

L'exemple fondamental d'un tel espace est évidemment $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue et de la distance euclidienne. Ces espaces sont fréquemment utilisés en analyse harmonique et ils constituent le bon cadre d'étude des opérateurs d'intégrale singulière. On se fixe donc un espace de type homogène (E, d, μ) pour toute la suite. Ces espaces ont des propriétés remarquables, au premier rang desquelles le fait qu'ils admettent une famille de cubes dyadiques, comme l'illustre le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Il existe une collection d'ensembles ouverts $\{Q_\alpha^k \subset E : k \in \mathbb{Z}, \alpha \in I_k\}$, où I_k est un ensemble dénombrable d'indices, et des constantes $0 < \delta < 1$, $a_0 > 0$, $\eta > 0$, et $C_1, C_2 < +\infty$ telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

(i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mu(E \backslash \bigcup_{\alpha \in I_k} Q_\alpha^k) = 0$.

(ii) Si $l \geq k$ alors ou bien $Q_\beta^l \subset Q_\alpha^k$, ou bien $Q_\beta^l \cap Q_\alpha^k = \emptyset$.

(iii) Pour chaque (k, α) et chaque $l < k$ il existe un unique β tel que $Q_\alpha^k \subset Q_\beta^l$.

(iv) Pour chaque (k, α), on a $\operatorname{diam}(Q_\alpha^k) \leq C_1 \delta^k$.

(v) Chaque Q_α^k contient une boule $B(z_\alpha^k, a_0 \delta^k)$.

(vi) Condition de "petite frontière" :

$$\mu\left(\left\{x \in Q_\alpha^k : d(x, E \backslash Q_\alpha^k) \leq t\delta^k\right\}\right) \leq C_2 t^\eta \mu(Q_\alpha^k) \quad \forall k, \alpha, \quad \forall t > 0.$$

Remarque. La condition (ii) signifie que si Q est un cube de génération k, Q' un cube de génération l, avec $k \leq l$ alors $Q' \subset Q$ dès que $Q \cap Q' \neq \emptyset$. Les conditions (iv) et (v) signifient que tous les cubes de la même génération ont une mesure comparable, et que tout cube d'une génération donnée contient au plus C cubes de la génération suivante (C étant une constante dimensionnelle). Enfin la condition (vi) signifie que la masse ne se concentre jamais à la frontière d'un cube.

La construction d'un tel système de cubes ne présente pas de difficulté particulière mais est néanmoins assez fastidieuse et ne sera pas détaillée ici. Ces cubes généralisent naturellement les cubes dyadiques classiques de $\mathbb{R}^d$. On les utilisera constamment dans la suite.

Avant de continuer, donnons également la définition d'un autre type d'espaces qui jouent un rôle important dans cette étude, les espaces BMO.

Définition 1.2. Soit f une fonction localement intégrable définie sur E à valeurs complexes. Pour Q un cube dyadique de E, notons f_Q la moyenne de f sur Q. Ainsi, $f_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu$. On dira que f est dans l'espace $BMO(E)$ si

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{Q \text{ cube}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(x) - f_Q| d\mu(x) < +\infty.$$

Remarques. (i) BMO réfère à "Bounded mean Oscillation", *i.e.* oscillation moyenne bornée.

(ii) L'espace $L^\infty(E)$ est strictement inclus dans $BMO(E)$.

(iii) L'espace $BMO(E)$ est semi-normé par $\|.\|_{BMO}$: $\|.\|_{BMO}$ est homogène et vérifie l'inégalité triangulaire, mais n'est pas définie puisque

$$\|f\|_{BMO} = 0 \Leftrightarrow f = \text{cste}\, \mu \,\text{p.p.}$$

Cependant, si l'on quotiente l'espace BMO par la relation d'équivalence d'égalité à une constante près, on obtient quand même un espace de Banach.

1.2 Opérateurs d'intégrale singulière

Commençons par donner une définition préalable, celle de noyau standard.

Définition 1.3. Posons $\lambda(x,y) = \mu(B(x,d(x,y)))$. Un *noyau standard* est une fonction K définie sur $E \times E \setminus \{(x,y) \mid x = y\}$, telle qu'il existe des constantes $C > 0$, $0 < \delta < 1$ telles que :

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{\lambda(x,y)} \tag{1}$$

et

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq C \left(\frac{d(x,x')}{d(x,y)}\right)^{\delta} \frac{1}{\lambda(x,y)} \tag{2}$$

dès que $d(x,x') \leq \frac{1}{2} d(x,y)$.

On considère maintenant l'espace Λ_α des fonctions bornées hölderiennes d'ordre $\alpha \in]0,1]$, qui, muni de la norme

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^\alpha}$$

est un espace de Banach. On appelle $\mathcal{D}_\alpha$ le sous-espace de Λ_α des fonctions à support compact. Tout comme l'espace $\mathcal{D}'$ est défini pour un espace euclidien, on introduit ici l'espace $\mathcal{D}'_\alpha$ des formes linéaires ℓ de $\mathcal{D}_\alpha$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété de continuité : pour tout $X \subset E$ borné, il existe $C_X < \infty$ telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}_\alpha$ de support inclus dans X, $|\ell(f)| \leq C_X \|f\|_{\Lambda_\alpha}$. On note naturellement, pour $f \in \mathcal{D}_\alpha$, et $g \in \mathcal{D}'_\alpha$, $\langle g, f\rangle = g(f)$. On peut alors définir la notion d'opérateur d'intégrale singulière sur E.

Définition 1.4. Soit $\alpha \in]0,1]$, soient b_1, b_2 des fonctions bornées non nulles μ p.p. Un *opérateur d'intégrale singulière* T associé au couple (b_1, b_2) est un opérateur linéaire borné, défini sur l'espace $b_1\mathcal{D}_\alpha$, à valeurs dans le dual $(b_2\mathcal{D}_\alpha)'$, et tel qu'il existe un noyau standard K pour lequel

$$\langle T(b_1 f), b_2 g\rangle = \iint K(x,y) b_1(y) f(y) b_2(x) g(x) d\mu(y) d\mu(x)$$

pour f et g dans $\mathcal{D}_\alpha$ à supports disjoints.

Remarques. (i) De manière équivalente à la formule ci-dessus, on aurait pu demander à $T(b_1 f)(x)$ d'être défini, pour x en dehors du support de f, par

$$T(b_1 f)(x) = \int K(x,y) b_1(y) f(y) d\mu(y)$$

(ii) Supposons ici, pour simplifier l'écriture, que $b_1 = b_2 = 1$ p.p. On a défini l'action d'un opérateur d'intégrale singulière T sur les éléments de $\mathcal{D}_\alpha$. On peut facilement étendre la définition de T à toutes les fonctions ϕ de Λ_α. En effet, la distribution $T(\phi)$ sera connue modulo une constante additive, c'est-à-dire que ce sera une forme linéaire continue définie sur l'ensemble des fonctions g de $\mathcal{D}_\alpha$ d'intégrale nulle. Soit g une telle fonction, écrivons $\phi = \phi_1 + \phi_2$ avec $\phi_1 \in \mathcal{D}_\alpha$ et ϕ_2 nulle sur un voisinage du support de g. On définit alors $\langle T(\phi), g\rangle$ par

$$\langle T(\phi), g\rangle = \langle T(\phi_1), g\rangle + \iint K(x,y) \phi_2(y) g(x) d\mu(y) d\mu(x).$$

Le fait que cette intégrale soit bien définie est une conséquence directe de (2), puisque, pour tout point x_0 dans le support de g, on a

$$\iint K(x,y)\phi_2(y)g(x)d\mu(y)d\mu(x) = \iint [K(x,y) - K(x_0,y)]\phi_2(y)g(x)d\mu(y)d\mu(x),$$

et cette dernière intégrale est absolument convergente. Il est facile ensuite de vérifier que cette définition ne dépend pas de la décomposition $\phi = \phi_1 + \phi_2$ choisie, que $T(\phi)$ est une fonction linéaire de ϕ, et enfin que, lorsque $\phi \in \mathcal{D}_\alpha$, on obtient bien la même définition.

(iii) Si T est un opérateur d'intégrale singulière, son transposée T^t est l'opérateur d'intégrale singulière défini par $\langle T^t f, g\rangle = \langle Tg, f\rangle$.

(iv) Enfin, lorsqu'un opérateur d'intégrale singulière T admettra une extension bornée à $L^2(E)$, on dira que T est un opérateur de Calderón-Zygmund.

Exemple. Donnons un exemple en rapport direct avec notre point de départ, le problème de Painlevé. On définit l'opérateur intégral de Cauchy $\mathcal{C}$ sur $(\mathbb{R}, d, \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et d la distance euclidienne, par : pour f et g dans $\mathcal{D}$ à supports disjoints,

$$\langle \mathcal{C}f, g\rangle = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{f(y)g(x)}{y-x} d\lambda(y)d\lambda(x).$$

Ceci définit un opérateur d'intégrale singulière sur E.

Donnons tout de suite un premier résultat d'interpolation important, dû à Calderón et Zygmund, dont la preuve est malheureusement trop longue pour être donnée ici (voir par exemple [15]).

Proposition 1.2. Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund. Alors T admet une extension bornée à $L^p(E)$ pour $1 < p < +\infty$.

Ce résultat montre qu'il suffit de s'intéresser à la bornitude L^2 des opérateurs d'intégrale singulière pour avoir la bornitude L^p. C'est donc naturellement la bornitude L^2 de ces opérateurs qui sera l'objet des prochains théorèmes que nous verrons.

Maintenant que les principales définitions et propriétés concernant les opérateurs d'intégrale singulière ont été données, nous pouvons passer à la suite et commencer notre seconde partie, consacrée aux théorèmes dits "théorèmes $T(b)$".

2 Théorèmes $T(b)$

2.1 Les théorèmes classiques

Ces théorèmes ont pour objet de donner des conditions nécessaires et suffisantes de continuité L^2 des opérateurs d'intégrale singulière. Pour énoncer ces théorèmes, nous avons encore besoin de deux dernières définitions.

Définition 2.1. Para-accrétivité

Une fonction $b \in L^\infty(E)$ est dite (dyadique) para-accrétive s'il existe $N < \infty$, $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout cube Q^k_α, il existe un cube $Q^l_\beta \subset Q^k_\alpha$ avec $l \leq k + N$ et tel que

$$\left| \int_{Q^l_\beta} b(y)d\mu(y) \right| \geq \varepsilon\mu(Q^l_\beta).$$

Remarque. Ainsi une fonction para-accrétive n'est nulle part uniformément nulle, on peut trouver partout un cube sur lequel sa moyenne est minorée. En particulier, une fonction para-accrétive est non nulle μ p.p.

Définition 2.2. Faible bornitude

Pour $\alpha \in]0,1]$, $x_0 \in E$ et $r > 0$, notons $B_{\alpha,x_0,r}$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{D}_\alpha$ dont le support est inclus dans $B(x_0,r)$, tels que $\|f\|_{L^\infty} \leq 1$, et tels que

$$|f(x) - f(y)| \leq r^{-\alpha} d(x,y)^\alpha.$$

Soit T un opérateur linéaire continu défini sur $b_1\mathcal{D}_\alpha$, à valeurs $(b_2\mathcal{D}_\alpha)'$. L'opérateur T est dit faiblement borné (par rapport à b_1 et b_2) s'il existe $C < \infty$ telle que pour tout $x_0 \in E$, $r > 0$ et pour toutes fonctions $\phi_1, \phi_2 \in B_{\alpha,x_0,r}$, on ait

$$|\langle T(b_1\phi_1), b_2\phi_2\rangle| \leq C\mu(B(x_0,r)).$$

Remarque. Remarquons déjà que si T est borné sur L^2, alors T est faiblement borné. En effet, on aurait alors

$$\begin{aligned} |\langle T(b_1\phi_1), b_2\phi_2\rangle| &\leq \|T\|_{\mathcal{L}_c(L^2)}.\|\phi_1\|_{L^2}.\|\phi_2\|_{L^2}.\|b_1\|_{L^\infty}.\|b_2\|_{L^\infty} \\ &\leq C\|T\|_{\mathcal{L}_c(L^2)}\mu(B(x_0,r))^{1/2}\mu(B(x_0,r))^{1/2} \\ &\leq C\|T\|_{\mathcal{L}_c(L^2)}\mu(B(x_0,r)). \end{aligned}$$

Ceci nous amène au premier théorème de continuité d'intégrale singulière, le théorème $T(\mathbf{1})$

Théorème 2.1. *David, Journé [8]*

Soit $\alpha \in]0,1]$, soit T un opérateur d'intégrale singulière sur E. Supposons que

(i) T est faiblement borné de $\mathcal{D}_\alpha$ dans $\mathcal{D}'_\alpha$.

(ii) $T(\mathbf{1}) \in BMO(E)$.

(iii) $T^t(\mathbf{1}) \in BMO(E)$.

Alors T admet une extension bornée à $L^2(E,\mu)$

C'est le premier théorème de ce type qui a été démontré. Énonçons maintenant le théorème $T(b)$ de David, Journé et Semmes, plus fort que le précédent.

Théorème 2.2. *David, Journé, Semmes [8]*

Soient b_1 et b_2 deux fonctions para-accrétives, soit $\alpha \in]0,1]$, et soit T un opérateur d'intégrale singulière sur E. Supposons que

(i) T est faiblement borné de $b_1\mathcal{D}_\alpha$ dans $(b_2\mathcal{D}_\alpha)'$.

(ii) $T(b_1) \in BMO(E)$.

(iii) $T^t(b_2) \in BMO(E)$.

Alors T admet une extension bornée à $L^2(E,\mu)$

Remarque. Pour les deux théorèmes $T(1)$ et $T(b)$ énoncés, on obtient en plus au travers de la preuve un contrôle de la norme L^2 de l'opérateur T de la forme :

$$\|T\|_{\mathcal{L}_c(L^2(E))} \leq k\,\left(\|Tb_1\|_{BMO(E)} + \|T^t b_2\|_{BMO(E)} + C_0 + C_1\right).$$

où C_0 et C_1 sont les constantes issues de la propriété de noyau standard de $K(x,y)$ et de la faible bornitude de T.

L'idée de la preuve de ce théorème consiste à construire une base de Riesz de $L^2(E)$ adaptée, dans laquelle la matrice de T aura pour propriété que ses coefficients décroissent suffisamment rapidement loin de la diagonale, de sorte qu'on pourra appliquer un argument de type "lemme de Shur". Cette preuve est cependant trop longue et trop technique pour être détaillée ici. Ce théorème est un théorème très important, qui a de nombreuses applications dans l'étude des opérateurs d'intégrale singulière. On va cependant voir dans la partie qui suit une version plus locale de ce théorème, qui aura le gros avantage d'offrir une plus grande souplesse dans certaines situations.

2.2 Une version locale plus souple

L'idée que je vais présenter ici, due à Michael Christ, est de considérer non plus une fonction b para-accrétive fixée sur l'espace E tout entier, mais un système de fonctions b_B fixées sur chaque boule B de l'espace. Cela motive la définition suivante.

Définition 2.3. Système pseudo-accrétif
Un *système pseudo-accrétif* est une collection de fonctions bornées b_B, définies sur chaque boule $B = B(x,r)$ de E, et telles qu'il existe $C < \infty$, $\delta > 0$ tels que, pour toute boule B, on ait :

$$\|b_B\|_{L^\infty} \leq C.$$

$$\left| \int_B b_B d\mu \right| \geq \delta\mu(B).$$

Si T est un opérateur d'intégrale singulière, et K le noyau standard associé, on note T^ε l'opérateur dit *tronqué* de T, défini de $\mathcal{D}_\alpha$ dans $\mathcal{D}'_\alpha$ par

$$T^\varepsilon f(x) = \int_{d(x,y)>\varepsilon} K(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Bien que T ne soit pas forcément la limite des T^ε lorsque ε tend vers 0 (encore faudrait-il donner un sens à cette limite), on peut souvent conclure quant à la bornitude L^2 de T si l'on sait que les T^ε sont uniformément bornés L^2 lorsque ε tend vers 0. C'est en particulier vrai lorsque le noyau standard K est anti-symétrique. Le résultat principal de cette partie est le suivant.

Théorème 2.3. *M. Christ [4]*
Soit T un opérateur d'intégrale singulière sur E. Soit $\varepsilon > 0$, et soit T^ε une troncature de T. Supposons qu'il existe $C < \infty$ et deux systèmes pseudo-accrétifs $\{b_B^1\}_{B\subset E}$ et $\{b_B^2\}_{B\subset E}$ sur E tels que, pour toute boule B, on ait

$$\|T^\varepsilon(b_B^1)\|_{L^\infty} \leq C \quad , \quad \|(T^\varepsilon)^t(b_B^2)\|_{L^\infty} \leq C.$$

Alors T^ε admet une extension bornée à $L^2(E,\mu)$, et on a un contrôle sur la norme L^2 de T^ε ne dépendant que des constantes de doublement, de noyau standard de K, de systèmes pseudo-accrétifs des $\{b_B^j\}_{B\subset E}$, de C, mais en aucun cas de ε.

Remarques.
- En particulier, le théorème assure que, pour un noyau standard fixé, la norme L^2 de l'opérateur tronqué est bornée par une quantité indépendante du rayon de troncation ε. Cette hypothèse d'opérateur d'intégrale singulière tronqué n'est présente dans le théorème que pour des raisons techniques, notamment pour assurer l'existence de $T(f)$ pour différentes fonctions f qui apparaissent au cours de la preuve. Dans le cas d'un opérateur d'intégrale singulière de noyau anti-symétrique, on obtient donc une majoration de la norme L^2 de ses troncations par une quantité indépendante du rayon de troncation, ce qui permet de conclure que l'opérateur admet une extension bornée à $L^2(E,\mu)$ comme dit plus haut.
- Ce théorème est, d'une certaine manière, plus flexible que le théorème $T(b)$, car il permet de prendre un système pseudo-accrétif $\{b_B\}$ variant sur les différentes boules de l'espace plutôt qu'une fonction para-accrétive b fixée sur l'espace tout entier. Il a aussi l'avantage de ne pas nécessiter l'hypothèse de faible bornitude du théorème $T(b)$. Cependant, on a ici besoin d'avoir $T(b_B) \in L^\infty(E)$ pour toute boule B, uniformément par rapport à B, et non pas seulement $T(b_B) \in BMO(E)$, ce qui est beaucoup plus contraignant. On gagne donc en souplesse pour appliquer ce théorème, mais on a besoin de vérifier une hypothèse beaucoup plus forte.

L'idée de la preuve est de se ramener au théorème $T(b)$, c'est-à-dire de construire deux fonctions para-accrétives vérifiant les hypothèses du théorème 2.2 à partir des deux systèmes pseudo-accrétifs $\{b_B^1\}_{B\subset E}$ et $\{b_B^2\}_{B\subset E}$. On veut donc démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.4. Sous les hypothèses du théorème 2.3, et en supposant que l'espace E fait lui-même partie du système de cubes dyadiques utilisé, il existe deux fonctions b^1, b^2 para-accrétives sur E telles que :

(i) $T(b^1) \in BMO(E)$

(ii) $T^t(b^2) \in BMO(E)$

(iii) $T : b^1\mathcal{D}_\alpha \to (b^2\mathcal{D}_\alpha)'$ est faiblement borné pour tout $\alpha > 0$.

De plus, les normes L^∞ de b^1, b^2, les normes BMO de $T(b^1)$, $T^t(b^2)$, et la constante de faible bornitude de T sont contrôlées par une quantité qui ne dépend que des constantes de doublement, de noyau standard de K, de systèmes pseudo-accrétifs des $\{b_B^j\}_{B\subset E}$, et de $\sup_B \|T(b_B^1)\|_\infty + \sup_B \|T^t(b_B^2)\|_\infty$.

La preuve de cette proposition repose sur un ingénieux argument de temps d'arrêt qu'on va s'attacher à décrire ci-dessous. A partir de cette proposition, le théorème 2.3 est immédiat si l'espace E est lui-même l'un des cubes dyadiques. Si ce n'est pas le cas, on conclut par un petit argument de passage à la limite. Démontrons donc maintenant la proposition 2.4.

Démonstration. Pour chaque $Q = Q_\alpha^k$, on pose, pour $j = 1, 2$, $b_Q^j = b_B^j$ avec $B = B(z_\alpha^k, a_0\delta^k)$ en reprenant les notations du théorème 1.1. Alors b_Q^j est supportée sur Q, et il existe $\delta' > 0$ tel que $\left|\int b_Q^j\right| \geq \delta'\mu(Q)$ pour tout cube Q. Quitte à renormaliser tous les b_Q^j, on peut supposer qu'on a, pour tout cube Q,

$$\|b_Q^j\|_\infty \leq A, \quad \text{et} \quad \int b_Q^j d\mu = \mu(Q).$$

Pour $j = 1, 2$, $\{b_Q^j\}_Q$ forme un système pseudo-accrétif dit dyadique, et c'est avec ces deux systèmes que l'on va maintenant travailler, plutôt qu'avec les $\{b_B^j\}_B$.

La présence d'atomes pour la mesure μ, c'est-à-dire de points $x \in E$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$, donne lieu à quelques difficultés techniques au cours de l'argument de temps d'arrêt qu'on va exposer ci-dessous. Cependant, il n'est pas très difficile d'y remédier, comme l'explique M. Christ dans [4] et on ne tiendra donc pas compte de ces éventuels atomes ici.

La preuve de la proposition 2.4 repose sur l'itération de l'algorithme suivant. Soit Q un cube dyadique, et soit ψ une fonction donnée vérifiant $\|\psi\|_\infty \leq A$ et $\left|\int_Q \psi d\mu\right| \geq \varepsilon_0\mu(Q)$, où ε_0 est une constante positive telle que $\varepsilon_0 \leq \min(1, A)$, et vérifiant une condition à imposer plus tard. Considérons tous les cubes R qui sont fils de Q. Soit $\varepsilon \ll \varepsilon_0$ une autre constante encore plus petite. Si un cube R vérifie

$$\left|\int_R \psi d\mu\right| < \varepsilon\mu(R), \tag{3}$$

on l'appelle "cube d'arrêt" et on le met de côté. On peut toujours supposer que R a plus d'un fils, car sinon il suffirait de retenir à la place de R le premier cube descendant de R ayant plus d'un fils (un tel cube existe en l'absence d'atomes). Pour les cubes R pour lesquels (3) n'est pas vérifiée, on considère à leur tour tous les fils S de R, et on regarde à nouveau si (3) est vérifiée, mettant de côté les cubes d'arrêt S pour lesquels c'est le cas, et ainsi de suite... On continue indéfiniment de la sorte. Après une infinité d'étapes, on obtient une collection $\{P_\gamma\}$ de cubes d'arrêt deux à deux disjoints, contenus dans Q. Pour chacun de ces cubes, on a

$$\left|\int_{P_\gamma} \psi d\mu\right| < \varepsilon\mu(P_\gamma).$$

Comme $\|\psi\|_\infty \leq A$ et $\left|\int_Q \psi d\mu\right| \geq \varepsilon_0\mu(Q)$ par hypothèse, si ε est choisi suffisamment petit par rapport à ε_0, il existe $\eta > 0$, ne dépendant que de la constante de doublement, tel que

$$\sum_\gamma \mu(P_\gamma) \leq (1-\eta)\mu(Q). \tag{4}$$

En effet, on a

$$\int_Q \psi d\mu = \int_{\cup(P_\gamma)} \psi d\mu + \int_{Q\setminus\cup(P_\gamma)} \psi d\mu,$$

donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0\mu(Q) \le \left|\int_Q \psi d\mu\right| &\le \left|\int_{\cup(P_\gamma)} \psi d\mu\right| + \left|\int_{Q\setminus\cup(P_\gamma)} \psi d\mu\right| \\
&\le \varepsilon \sum_\gamma \mu(P_\gamma) + A[\mu(Q) - \sum_\gamma \mu(P_\gamma)] \\
&\le (\varepsilon - A)\sum_\gamma \mu(P_\gamma) + A\mu(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\sum_\gamma \mu(P_\gamma) \le \frac{A-\varepsilon_0}{A-\varepsilon}\mu(Q),$$

et si ε est choisi suffisamment petit par rapport à ε_0 (on impose préalablement $\varepsilon_0 < A$), on obtient bien (4) pour un $\eta > 0$ fixé.

On va maintenant modifier ψ sur les cubes d'arrêt. Fixons γ, et notons $\{R_\beta\}_{\beta\in B}$ les fils de P_γ. Soient $(c_\beta)_{\beta\in B}$ des constantes de module compris entre ε_0 et 1, à préciser. Définissons

$$\psi^1 = \sum_{\beta\in B} c_\beta b^1_{R_\beta} \quad \text{sur} \quad \bigcup_{\beta\in B} R_\beta = P_\gamma,$$

où $\{b^1_S : S\,\text{cube}\}$ est le système dyadique pseudo-accrétif évoqué plus haut. On a donc

$$\int_{P_\gamma} \psi^1 d\mu = \sum_{\beta\in B} c_\beta \mu(R_\beta).$$

Le fait important est que, si ε_0 est assez petit, et si les c_β sont bien choisis, il est possible d'avoir

$$\int_{P_\gamma} \psi^1 d\mu = \int_{P_\gamma} \psi d\mu.$$

Pour les détails de ce fait, on renvoie encore à [4]. On fixe donc un tel ε_0, et on fixe ensuite ε de la condition (3) en conséquence. Rappelons que le but de l'algorithme est de construire une fonction para-accrétive. Les cubes d'arrêt P_γ sont les cubes pour lesquels la condition de para-accrétivité n'est pas vérifiée, et ce pour la première fois. La fonction ψ^1, bien qu'ayant la même moyenne que ψ sur P_γ, a l'avantage d'avoir une moyenne correctement minorée sur tous les fils R_β des P_γ. Donc, assurément, ψ^1 satisfait la condition de para-accrétivité pour P_γ. On définit donc ψ^1 de la sorte sur chaque cube d'arrêt, et on pose $\psi^1 = \psi$ sur $Q\setminus \cup_\gamma P_\gamma$, de telle sorte que ψ^1 soit définie sur Q tout entier.

L'algorithme que nous venons de décrire a donc pour entrée un couple (Q,ψ), où Q est un cube, et ψ une fonction vérifiant $\|\psi\|_\infty \le A$ et $\left|\int_Q \psi d\mu\right| \ge \varepsilon_0\mu(Q)$. Il en ressort une fonction ψ^1, et une collection $\{R_\beta\}$ de sous-cubes dyadiques de Q deux à deux disjoints, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\|\psi^1\|_\infty \le A \tag{5}$$

$$\int_S \psi^1 d\mu = \int_S \psi d\mu \tag{6}$$

pour tout cube S qui n'est pas un sous-cube d'un R_β,

$$\left|\int_S \psi^1 d\mu\right| \ge \varepsilon\mu(S) \tag{7}$$

pour tout cube S qui n'est ni un sous-cube, ni le père d'un R_β,

$$\left|\int_{R_\beta} \psi^1 d\mu\right| \ge \varepsilon_0\mu(R_\beta) \tag{8}$$

alors que

$$\sum_\beta \mu(R_\beta) \le (1-\eta)\mu(Q) \tag{9}$$

et

$$\psi^1 = \psi \quad \text{sur} \quad Q\backslash \bigcup_\beta R_\beta. \tag{10}$$

Il faut maintenant répéter cet algorithme une infinité de fois : on commence avec un cube dyadique R^0, et une fonction ψ^0, nulle μ p.p. en dehors de R^0, et qui vérifie $\|\psi^0\|_\infty \leq A$, et $\left|\int_{R^0} \psi^0 d\mu\right| \geq \varepsilon_0 \mu(R^0)$. On applique l'algorithme pour obtenir une fonction ψ^1 et des cubes $\{R^1_\beta\}$ vérifiant toutes les propriétés énoncées ci-dessus. Pour chaque β, le couple $(R^1_\beta, \psi^1 \chi_{R^1_\beta})$ est une entrée possible pour l'algorithme, et donc on peut l'appliquer à chacun de ces couples pour obtenir de nouveaux sous-cubes $\{R^2_\beta\}$, et une fonction ψ^2, toujours définie sur R^0 tout entier. En répétant ceci une infinité de fois, on obtient des fonctions ψ^n, et des collections de sous-cubes $\{R^n_\beta\}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Notons $E^0 = R^0$, et $E^n = \bigcup_\beta R^n_\beta$. On a alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu(E^n) \leq (1-\eta)^n \mu(R^0),$$

et cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $E^{n+1} \subset E^n$, presque tout point n'appartient qu'à un nombre fini de E^n. Ainsi, pour presque tout x, la suite $(\psi^n(x))_{n\geq 1}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. On peut donc définir la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi^n(x).$$

Il est clair que $\|\varphi\|_\infty \leq A$.

Appliquons maintenant toute cette procédure au cube dyadique $R^0 = E$, et à la fonction $\psi^0 = b^1_E$, où $(b^1_S)_{S\,\text{cube}}$ est l'un des deux systèmes dyadiques pseudo-accrétifs dont nous disposons. Posons alors $b^1 = \varphi$. De la même manière, en appliquant cette fois-ci l'algorithme au deuxième système pseudo-accrétif $(b^2_S)_{S\,\text{cube}}$, on obtient une deuxième fonction φ'. Posons $b^2 = \varphi'$.

Lemme 2.5. On a alors :

(i) b^1, b^2 sont para-accrétives sur E.

(ii) $T(b^1), T^t(b^2) \in BMO(E)$.

(iii) Pour tout $\alpha > 0$, T est faiblement borné de $b^1\mathcal{D}_\alpha$ dans $(b^2\mathcal{D}_\alpha)'$.

La preuve de ce lemme consiste essentiellement en des vérifications parfois un peu techniques qu'on ne fera pas ici. On renvoie encore à [4] pour plus de détails. Ce lemme admis, la proposition 2.4 est immédiate.

□

Le type d'argument utilisé ici, dit de temps d'arrêt, est fréquemment utilisé en analyse réelle et donne souvent de bons résultats. Pour en revenir au problème de Painlevé, le théorème 2.3 de M. Christ permet notamment de montrer que toute partie de longueur (de Hausdorff) strictement positive d'une courbe rectifiable régulière (au sens d'Ahlfors) n'est pas effaçable. Comme cela a déjà été dit dans une remarque précédente, ce théorème, très utile par la souplesse qu'il permet, demande néanmoins des hypothèses assez fortes. Il soulève donc de nombreuses questions quant à la possibilité d'éventuels affaiblissements.

Références

[1] L.V. Ahlfors, *Bounded analytic functions*, Duke Math., J. 14 (1947), $1-11$.

[2] P. Auscher, S. Hofmann, C. Muscalu, T. Tao et C. Thiele, *Carleson measures, trees, extrapolation and $T(b)$ theorems*, Publ. Mat. 46 (2002), $257-325$.

[3] P. Auscher et Q.X. Yang, *On local $T(b)$ theorems*, preprint, 2006.

[4] M. Christ, *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Colloquium Mathematicum, Vol. 60/61, 1990, n°2, pp $601-628$.

[5] M. Christ, *Lectures on singular integral operators*, CBMS regional conference series in mathematics 77, American Mathematical Society, 1990, pp $1-132$.

[6] R.R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur les courbes Lipschitziennes*, Ann. of Math. 116, 1982, pp $361-387$.

[7] G. David, *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17, 1984, pp $157-189$.

[8] G. David, *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces*, Lecture Notes in Mathematics 1465, Springer-Verlag, 1991, Ch. 2.

[9] K.J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1985.

[10] T. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1969, Ch. 8.

[11] J. Garnett, *Analytic capacity and measure*, Lecture Notes in Mathematics 297, Springer-Verlag, 1972, Ch. 1.

[12] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Eucledean spaces - Fractals and rectifiability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1995.

[13] T. Murai, *A real variable method for the Cauchy transform, and analytic capacity*, Lecture Notes in Mathematics 1307, Springer-Verlag, New-York, 1988.

[14] F. Nazarov, S. Treil, A. Volberg, *$T(b)$ theorem on non-homogeneous spaces*, preprint, 2003.

[15] E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

[16] X. Tolsa, *Analytic capacity, rectifiability and the Cauchy integral*, preprint, 2000.

[17] X. Tolsa, *Painlevé's problem and the semi-additivity of analytic capacity*, Acta Math., 190 (2003), $105-149$.

[18] J. Verdera, *Removability, capacity and approximation*, In Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993), NATO Adv. Sci. Int. Ser. Math. Phys. Sci. 439, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994, pp $419-473$.