Mémoire de Magistère
Benoît Saleur

Dynamique des applications d'allure polynomiale

---

1 Introduction

Il s'agit d'étudier la dynamique d'une application holomorphe propre f définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Plus précisément, on veut comprendre le comportement de l'orbite positive, voir négative, d'un point x donné, c'est à dire de la suite des itérés $(f^n(x))$. On étudiera essentiellement les propriétés statistiques des orbites en fonction des points initiaux.
Après avoir introduit les principaux outils d'analyse complexe et de théorie ergodique, on montrera l'existence d'une mesure invariante particulière, dite mesure d'équilibre, qui est exponentiellement mélangeante et d'entropie maximale.

2 Théorie ergodique, entropie d'une application

Soit (X, d) un espace métrique compact, soit $f : X \to X$ une application borélienne. Une mesure de probabilité μ est dite invariante par f si : $f_*\mu = \mu$. Les données (X, f, μ) déterminent une système dynamique mesurable.
On note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par f.

2.1 Ergodicité, théorème de Birkhoff, mélange

Définition 2.1. Une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$ est dite ergodique si pour tout borélien $Y \subset X$ tel que $f^{-1}(Y) = Y$, $\mu(Y) = 0$ ou 1.

La caractérisation fonctionnelle suivante de l'ergodicité est souvent utile en pratique :

Proposition 2.1. Soit $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. μ est ergodique
2. Les applications réelles $\varphi \in L^2(\nu)$ telles que $\varphi \circ f = \varphi$ ν-presque partout sont constantes μ-presque partout.

On rappelle le théorème ergodique de Birkhoff, fondamental en théorie ergodique.

Théorème 2.2. *Soit $\varphi \in L^1(\mu)$. Considérons les sommes de Birkhoff :*

$$S_n\varphi := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i.$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *$S_n\varphi(x)$ converge vers une limite $\varphi^*(x)$ pour ν-presque tout x.*
2. *$\varphi^* \circ f = \varphi^*$ μ-presque partout.*
3. *$||\varphi^*||_{L^1(\mu)} \leq ||\varphi||_{L^1(\mu)}$.*
4. *La convergence a lieu dans $L^1(\mu)$: $\lim_{n\to+\infty} ||S_n\varphi - \varphi||_{L^1(\mu)} = 0$*
5. *$\int \varphi^* d\mu = \int \varphi d\mu$.*
6. *Si μ est ergodique, alors $\varphi^*(x) = \int \varphi d\mu$ pour μ-presque tout x.*

Le théorème de Birkhoff permet de donner une caractérisation géométrique des mesures ergodiques : ce sont exactement les points extrêmaux de l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par f.

Théorème 2.3. *Les mesures ergodiques sont exactement les points extrêmaux de $\mathcal{M}(X)$.*

Le théorème de décomposition de Choquet affirme qu'un convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrêmaux. En l'appliquant aux mesures de probabilité invariantes par f, on obtient le théorème de décomposition suivant :

Théorème 2.4 (Voir [7], [10])**.** *Soit $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Il existe un espace mesurable A, une famille $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de boréliens disjoints (à un ensemble de mesure nulle près) et une famille de mesures μ_α de supports X_α telles que pour toute fonction φ continue :*

$$\int \varphi d\mu = \int_A \int \varphi d\mu_\alpha d\alpha.$$

Nous introduisons maintenant la notion de mélange. Cette notion est à rapprocher de la notion d'indépendance d'événements en probabilités.

Définition 2.2. Une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$ est mélangeante si pour tout couple A, B de boréliens :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap f^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$$

En termes heuristiques, les événements A et $f^{-n}(B)$ tendent à devenir indépendants lorsque n croît.

En particulier, une mesure mélangeante est ergodique. Comme pour l'ergodicité, il existe une caractérisation fonctionnelle utile en pratique. Elle permet en particulier de calculer la vitesse de mélange.

Proposition 2.5. Une mesure $\mu \in \mathcal{M}(x)$ est mélangeante si et seulement si :

$$\forall \varphi, \psi \in L^2(\mu), \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi(\psi \circ f^n) d\nu = \Big(\int_X \varphi d\mu\Big)\Big(\int_X \psi d\mu\Big) \ (*)$$

Il suffit en outre de vérifier cette égalité sur un sous-ensemble dense de $L^2(\mu)$.

2.2 Entropie métrique

On s'intéresse ici à la notion d'entropie métrique : il s'agit d'associer à un système dynamique mesurable un réel indiquant la complexité de la dynamique. Par la suite, on sera amené à discuter, selon la valeur de ce réel, de la façon dont la mesure rend compte de la complexité de la dynamique de la fonction f étudiée.

Définition 2.3. Une famille au plus dénombrable (c_α) de boréliens est appelée partition mesurable si :

1. $\forall \alpha \neq \beta$, $\nu(c_\alpha \cap C_\beta) = 0$.
2. $\nu(\bigcup C_\alpha) = 1$.

Définition 2.4. Soit $\xi = (C_\alpha)_{\alpha\in I}$ une partition mesurable de K. On définit l'entropie de la partition ξ relativement à la mesure μ par :

$$h_\mu(\xi) := -\sum_{\alpha\in I} \mu(C_\alpha) \log \mu(C_\alpha)$$

Définition 2.5.

1. $\xi \leq \eta$ si $\forall D \in \eta$, $\exists C \in \xi$ tel que $D \subset C$. On dit alors que η est plus fine que ξ.
2. $\xi \vee \eta := \{C \cap D \mid C \in \xi\ ,\ D \in \eta\ ,\ \nu(C \cap D) > 0\}$.
3. ξ et η sont indépendantes si $\forall C \in \xi$, $\forall D \in \eta$, $\nu(C \cap D) = \nu(C)\nu(D)$.

On suppose à nouveau que μ est invariante par f.

Définition 2.6 (Partition jointe d'ordre n)**.** — ξ étant une partition mesurable de (X, μ), on définie la partition jointe d'ordre n de ξ par :

$$\xi_{-n}^f := \xi \vee f^{-1}(\xi) \vee ... \vee f^{-n+1}(\xi)$$

Proposition 2.6. La suite $(\frac{1}{n} h_\nu(\xi_{-n}^f))$ est décroissante, et donc convergente. Notons $h_\mu(f, \xi)$ sa limite.

On peut alors définir l'entropie d'une mesure :

Définition 2.7. L'entropie de la mesure μ est définie par :

$$h_\mu(f) := \sup\{h_\mu(f,\xi) \mid \xi \text{ est une partition mesurable telle que } h_\mu(\xi) < \infty\}$$

Voici maintenant deux propriétés importantes de l'entropie métrique.

Proposition 2.7. Soient (X, f, μ) et (Y, g, ν) deux systèmes dynamiques mesurables. Supposons qu'il existe une application mesurable $\varphi : X \to Y$ telle que $\varphi_*\mu = \nu$ et $g \circ \varphi = \varphi \circ f$. Alors $h_\nu(g) \leq h_\mu(f)$. En particulier, l'entropie est un invariant de conjugaison.

La proposition suivante exprime une propriété importante de l'entropie métrique : si l'on décompose une système dynamique mesurable en sous-systèmes, l'entropie du système total est égale à la moyenne des entropies des sous-systèmes. Autrement dit, l'entropie métrique quantifie la complexité moyenne (au sens de la mesure invariante) de la dynamique.

Proposition 2.8. —

1. Soit $Y \subset X$ un borélien invariant par f tel que $\mu(Y) > 0$. Alors :

$$h_\mu(f) = \mu(Y)h_{\mu_Y}(f_{|Y}) + (1 - \mu(Y))h_{\mu_{X\setminus Y}}(f_{|X\setminus Y}).$$

2. Si μ et ν sont deux mesures invariantes par f et $0 \leq t \leq 1$, alors :

$$th_\mu(f) + (1-t)h_\nu(f) \leq h_{t\mu+(1-t)\nu}(f)$$

2.3 Entropie topologique, principe variationnel

La notion d'entropie métrique n'est pas intrinsèque : elle dépend du choix d'une mesure invariante. On aimerait pouvoir quantifier la complexité de la dynamique d'une application, indépendemment d'une mesure invariante. C'est l'objet de ce chapitre.
Soit (X, d) une espace métrique.

Définition 2.8. 1. Un recouvrement ouvert $\mathcal{F}$ de X est un ε-recouvrement si tous les ouverts de $\mathcal{F}$ ont un diamètre inférieur à ε.

2. Une partie $F \subset X$ est dite ε-dense si $X = \bigcup_{x\in F} B(x,\varepsilon)$.
3. Une partie $F \subset X$ est dite ε-séparée si $\forall\ (x, y) \in F^2$, $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > \varepsilon$.

Nous noterons $D_d(\varepsilon)$ le minimum des cardinaux des ε-recouvrements de X.
Pour $n \geq 1$, considérons la distance :

$$d_n^f(x,y) := \max_{0\leq i\leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Théorème 2.9. *Pour tout $\varepsilon > 0$, la suite de terme général :*

$$a_n(\varepsilon) := \frac{1}{n}\log D_{d_n^f}(\varepsilon)$$

décroît vers un réel positif ou nul noté $h(f, \varepsilon)$. De plus, la fonction $h(f, .)$ est décroissante en ε.

Définition 2.9. On définit l'entropie topologique par :

$$h_{top}(f) := \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log D_{d_n^f}(\varepsilon)\Big)$$

L'entropie topologique ne dépend que de la dynamique d'une application :

Théorème 2.10. *L'entropie topologique est un invariant de conjugaison. Plus précisément, si $(Y, \tilde{d})$ est un espace métrique compact, $g : Y \to Y$ une fonction continue et $\varphi : X \to Y$ un homéomorphisme tel que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$, alors : $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.*

La proposition suivante répond à la Proposition 2.8 : lorsque l'on décompose un système dynamique en sous-systèmes, l'entropie du système total est égale au maximum des entropies des sous-systèmes. Autrement dit, l'entropie topologique ne tient compte que des zones où la dynamique est la plus complexe.

Proposition 2.11. Soient $X_1, ..., X_m$ des compacts de X invariants par f, tels que $X = \bigcup_{1 \le i \le m} X_i$. Alors

$$h_{top}(f) = \max_{1 \le i \le m} h_{top}(f_{|X_i})$$

Ce résultat laisse supposer que l'entropie topologique est supérieure à l'entropie métrique relative à une mesure donnée. Le Principe variationnel précise cette intuition :

Théorème 2.12. *L'entropie topologique est le supremum des entropies métriques relatives à toutes les mesures de probabilité invariantes :*

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X)} h_\mu(f)$$

Une mesure invariante réalisant ce supremum est dite d'entropie maximale. Une telle mesure, si elle existe, ne charge que la zone la plus dynamiquement intéressante de l'espace.

Le théorème de décomposition ergodique permet de se ramener au calcul de l'entropie des mesures ergodiques :

Proposition 2.13. Soit $\int_A \nu_\alpha d\alpha$ la décomposition ergodique de ν (voir la Proposition 2.4). Si ν est d'entropie maximale, alors pour tout $\alpha \in A$, ν_α est d'entropie maximale.

3 Analyse complexe

Ce chapitre présente les objets couramment utilisés en dynamique complexe. Outre les fonctions holomorphes, objets même de l'étude, les courants positifs et les fonctions plurisousharmoniques jouent un rôle prépondérant en analyse complexe.

3.1 Fonctions holomorphes, opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^k$. Une application $f : U \to \mathbb{C}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dite holomorphe si en tout point sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. Il est aisé de montrer qu'une fonction est holomorphe si et seulement si ses applications coordonnées le sont. Comme c'est le cas dans le plan, de nombreuses propriétés des fonctions holomorphes découlent d'une formule de Cauchy, mais ce n'est pas le propos de ce mémoire.
Les équations de Cauchy-Riemann, classiques en dimension 1, caractérisent l'holomorphie. Le bon langage pour les formuler en dimension supérieure est celui des opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$, que nous allons présenter.

L'espace $\mathbb{C}^k$ peut se voir comme un espace vectoriel réel de dimension $2k$: à tout vecteur $(z_1, ..., z_k)$ de $\mathbb{C}^k$ on peut associer, en prenant les parties réelles et imaginaires des z_j, un vecteur $(x_1, y_1, ..., x_k, y_k)$ de $\mathbb{R}^{2k}$. On peut condidérer les 1-formes différentielles $dz_j = dx_j + idy_j$ et $d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$. Si de plus $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$, on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}) \ , \ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}).$$

On notera $\partial f = \sum_{1 \le j \le k} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$ et $\overline{\partial} f = \sum_{1 \le j \le k} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j$. Classiquement, f est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
Comme pour la dérivée extérieure d, on peut définir les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ sur les formes différentielles de tous degrés. Pour cela on commence par remarquer que toute p-forme différentielle u s'écrit de façon unique sous la forme : $u = \sum_{|I|+|J|=p} U_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z_J}$, où I et J désignent respectivement des n-uplets et des m-uplets d'indices ordonnés compris entre 1 et k, avec $n + m = p$. Si $I = (j_1, ..., j_n)$ et $J = (j'_1, ..., j'_m)$, avec $j_1 < ... < j_n$ et $j'_1 < ... < j'_m$, alors les notation dz_I et $d\overline{z_J}$ désignent respectivement les formes $dz_{j_1} \wedge ... \wedge d_{z_{j\,n}}$ et $d\overline{z}_{j_1} \wedge ... \wedge d_{\overline{z}_{j\,n}}$. Le coefficient $U_{I,J}$ désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

On note alors $\partial u = \sum_{|I|+|J|=p} \partial U_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z_J}$ et $\overline{\partial} u = \sum_{|I|+|J|=p} \overline{\partial} U_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z_J}$.
On obtient ainsi deux opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ tels que $d = \partial + \overline{\partial}$. On vérifie que l'on a :

$$\partial^2 = 0 \ , \ \overline{\partial}^2 = 0 \ , \ \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0.$$

Définition 3.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^k$, soit $A \subset U$. On dit que A est analytique si pour tout point $z \in A$, il existe un voisinage $V \subset U$ de z et des fonctions holomorphes $f_1, ..., f_p : V \to \mathbb{C}$ tels que $A \cap V = \{x \in V \mid f_1(x) = ... = f_p(x) = 0\}$.

Un ensemble analytique strict est fermé, de mesure nulle, de complémentaire dense et connexe. Une intersection non vide ainsi qu'une union finie d'ensembles analytiques est analytique. Par contre, une union infinie d'ensembles analytiques peut ne pas être analytique.
Il est important de remarquer qu'un ensemble analytique n'est pas nécessairement une sous-variété : il peut posséder des points multiples, dits singuliers. Hors de ses pointes singuliers, un ensemble analytique est une sous variété. Remarquons que l'ensemble des points singuliers est lui-même analytique.

Définition 3.2. Soit A un ensemble analytique, soit $a \in A$. on dit que a est régulier s'il existe un voisinage Ω de a tel que $A \cap \Omega$ soit une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^k$. On note $\operatorname{Reg} A$ l'ensemble des points réguliers de A. Les points non réguliers sont dits singuliers.

Il est clair que $\operatorname{Reg} A$ est un ouvert de A et que ses composantes connexes sont des sous-variétés de $\mathbb{C}^k$. Si elles sont toutes de dimension p, on dit que A est de dimension pure p.
Par exemple, si f est une fonction holomorphe non constante, $f^{-1}(\{0\})$ est un ensemble analytique de dimension pure $k-1$.

3.2 Fonctions plurisousharmoniques

Il est important de disposer d'une classe suffisamment large de fonctions ayant de bonnes propriétés de convergence. C'est pour cela que nous introduisons les fonctions sous-harmoniques et plurisousharmoniques.

Définition 3.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^k$. Une fonction $u : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite sous-harmonique si :

1. u est semi-continue supérieurement
2. u n'est pas uniformément égale à $-\infty$
3. u vérifie la proproété de sous-moyenne : pour tout $x_0 \in U$ et tout $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$:
$$u(x_0) \leq \int_{\zeta=1} u(x_0 + r\zeta) \frac{d\sigma(\zeta)}{c_n}$$
où σ est la mesure de Lebesgue de la sphère et c_n est la surface de la sphère unité.

Le théorème suivant énonce deux propriétés importantes de convergence. La première, en un sens, joue le rôle du théorème de Montel en dimension supérieure. La seconde est connue sous le nom de Lemme de Hartogs.

Proposition 3.1. Soit (v_j) une suite de fonctions sous-harmoniques définies sur un ouvert U de $\mathbb{C}^k$. On suppose que la suite (v_j) est bornée supérieurement sur tout compact de U. Alors :

1. Si v_j ne converge pas vers $-\infty$ sur un compact de U, alors on peut en extraire une sous-suite convergeant dans L^1_{loc} vers une fonction sous-harmonique v.
2. Si v_j converge dans L^1_{loc} vers une fonction sous-harmonique v, alors pour tout compact K de U et toute fonction f continue sur K :
$$\limsup_{j \to +\infty} \sup_K (v_j - f) \leq \sup_K (v - f)$$

On en vient à la définition d'une fonction plurisousharmonique :

Définition 3.4. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^k$. Une application $u : \mathbb{C}^k \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique (p.s.h.) si elle n'est uniformément égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de U et si sa restriction à toute droite complexe est sous-harmonique.

En particulier, une fonction p.s.h. est sous-harmonique. Le Théorème 3.1 s'applique donc.
Une fonction p.s.h. est toujours dans L^1_{loc}, donc elle est différentiable au sens des distributions.
On a alors la caractérisation suivante :

Proposition 3.2. Une fonction $u \in L^1_{loc}$ est p.s.h. si et seulement si $\partial\overline{\partial}u \geq 0$. Autrement dit, $\partial\overline{\partial}u \geq 0$ est une mesure positive et pour tout vecteur $w \in \mathbb{C}^k$: $\displaystyle\sum_{p,q} \frac{\partial^2 u}{\partial z_p \partial \overline{z_q}} w_p \overline{w_q} \geq 0$.

Les ensemble pluripolaires généralisent les ensembles analytiques :

Définition 3.5. Un ensemble $\mathcal{E} \subset U \subset \mathbb{C}^k$ est dit pluripolaire si pour tout point $z \in \mathcal{E}$, il existe un voisinage V de z et une fonction plurisousharmonique u définie sur V tels que $\mathcal{E} \cap V \subset \{z : u(z) = -\infty\}$.

Comme les ensembles analytiques, les ensembles pluripolaires sont de mesure nulle. De plus une fonction p.s.h. définie sur U et bornée au voisinage de $\mathcal{E}$ se prolonge à U en entier.

3.3 Théorie des courants

Les courants sont aux formes différentielles ce que les distributions sont aux fonctions.
Considérons un ouvert U de $\mathbb{R}^k$, et une forme différentielle $u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I$ de degré p à support compact.
Si K est un compact de U et l un entier, posons $\rho_K^l(u) := \sup_K \sup_{|\alpha|\leq l} |D^\alpha u|$. On obtient ainsi une famille de semi-normes.

Définition 3.6.
1. On note $\mathcal{E}^p(U)$ l'espace des p-formes différentielles lisses muni de la topologie définie par toutes les semi-normes ρ_K^l.
2. Si $K \subset U$ est un compact, on note $\mathcal{D}^p(U)$ le sous-espace de $\mathcal{E}^p(U)$ formé des p-formes différentielles à support dans K, muni de la topologie induite. On notera $\mathcal{D}^p(U)$ le sous-espace de $\mathcal{E}^p(U)$ formé des p-formes différentielles à support compact. On a : $\mathcal{D}^p(U) = \bigcup_{K\subset U} \mathcal{D}^p(K)$.

L'espace $\mathcal{E}^p(U)$ peut être défini au moyen d'une famille dénombrable de semi-normes, et c'est donc un espace de Féchet. Par contre, l'espace $\mathcal{D}^p(U)$ n'est pas complet.
On définit l'espace des courants par analogie avec l'espace des distributions :

Définition 3.7. L'espace des courants de dimension p (ou de degré $k-p$) est l'espace $\mathcal{D}'^p(U)$ des formes linéaires T sur $\mathcal{D}^p(U)$ telles que la restriction de T à tous les sous-espaces $\mathcal{D}^p(K)$, où $K \subset U$ est un compact, soit continue.

Soit T un courant de dimension p. Si $I = (i_1, ..., i_{k-p})$ avec $i_1 < ... < i_{k-p}$, notons $dx_I := dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-p}}$. Si $J = (j_1, ..., j_p)$, soit alors $I = (i_1, ..., i_{k-p})$ tel que $I \cup J = \{1, ..., k\}$; T_I est la distribution définie par :

$$(-1)^\sigma(I, J) < T_I, \varphi >=< T, \varphi dx_J >$$

où $\sigma(I, J)$ est la signature de la permutation $i_1, ..., i_{k-p}, j_1, ..., j_p$. On peut alors écrire :

$$T = \sum_{|I|=k-p} T_I dx_I$$

Autrement dit, un courant de degré p est une forme différentielle de degré $k-p$ dont les coefficients sont des distributions. On dit aussi qu'un tel courant est de degré $k-p$.

Comme pour les distributions, il existe de nombreuses opérations sur les courants :

1. Dérivation : si T est un courant de degré q, on définit un courant dT de degré $q+1$ par :

   $$< dT, \varphi >= (-1)^{q+1} < T, d\varphi >,\ \varphi \in \mathcal{D}^{k-q-1}(U).$$

   On définit de même $\partial_{x_j} T$. Ces opérations sont continues.
2. Un courant T est dit fermé si $dT = 0$.
3. Si T est un courant de degré p et α une q-forme lisse, on définit $T \wedge \alpha$ par :

   $$< T \wedge \alpha, \varphi >:=< T, \alpha \wedge \varphi > .$$

On peut aussi, sous certaines conditions, pousser en avant et tirer en arrière des courants par des applications lisses.
Si Γ est une sous-variété lisse à bord de dimension p, on définit : $< [\Gamma], u >:= \int_\Gamma u$ pour toute forme u de degré p à support compact. On appelle $[\Gamma]$ le courant d'intégration sur Γ.

Soit maintenant I un ouvert de $\mathbb{C}^k$. On munit l'espace $\mathcal{D}^{p,q}$ des formes de bidegré (p, q) de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact d'une structure d'espace de Fréchet comme ci-dessus. Un courant de bidimension (p, q) (ou de bidegré $(k-p, k-q)$) est alors un élément du dual topologique de $\mathcal{D}^{p,q}$.

Définition 3.8. Un courant de bidimension (p,p) est dit positif si pour tout p-uplet de 1-forme $\alpha_1, ..., \alpha_p$, $< T, i\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p > \geq 0$.

Le théorème suivant, dû à Lelong, met en évidence une importante classe de courants positifs fermés :

Théorème 3.3. *Soit Z un sous-ensemble analytique de dimension pure p. Le courant* $[\mathrm{Reg}\, Z]$ *d'intégration sur l'ensemble des points réguliers de Z est fermé positif. On le note* $[Z]$.

On définit enfin le nombre de Lelong d'un courant en un point :

Définition 3.9. Soit T un courant positif de bidimension (p,p) et soit a un point. On définit le nombre de Lelong de T en a, noté $\nu(T,a)$, par :

$$\nu(T,a) := \lim_{r \to 0} \frac{1}{c_p r^{2p}} \int_{B(a,r)} T \wedge \omega^p$$

où $\omega := \sum_{1 \leq j \leq k} dz_j \wedge d\overline{z_j}$ est la 1-forme canonique de $\mathbb{C}^k$.

D'après le théorème de Siu, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{z : \nu(T,z) \geq c\}$ est analytique.

4 Dynamique des applications d'allure polynomiale

4.1 Applications d'allure polynomiale

L'étude de la dynamique des polynômes homogènes sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ fait intervenir des théorèmes algébriques tels le théorème de Bézout. J.Duval et J.Y.Briend ont montré que pour un endomorphisme de l'espace projectif, il existait une mesure invariante, dite mesure d'équilibre, ayant la propriété d'être l'unique mesure d'entropie maximale. On souhaite généraliser ce résultat à une classe plus large d'applications holomorphes, définies sur des ouverts de Stein de $\mathbb{C}^n$: les applications d'allure polynomiale.

Soient $V \subset \mathbb{C}^k$ un ouvert de Stein et U un ouvert de V relativement compact. Dans toute la suite, on considère une application holomorphe $f : U \to V$. On notera $PSH(W)$ le cône des fonctions p.s.h. d'un ouvert W.

Définition 4.1. Une application holomorphe $f : U \to V$ est dite d'allure polynomiale si elle est propre.

Théorème 4.1. *Une application d'allure polynomiale $f : U \to V$ de degré topologique d_t est un revêtement ramifié à d_t feuillets de U au dessus de V (tout point de V admet exactement d_t préimages comptées avec multiplicité).*

Ce théorème justifie l'appellation fonction d'allure polynomiale. Le degré topologique d'un polynôme homogène de degré d défini sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est d^n.
Deux ensembles joueront un rôle de premier plan par la suite : l'ensemble de julia rempli, noté $\mathcal{K}$, défini par $\mathcal{K} = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U)$, et l'ensemble critique de f, noté C.

On introduit maintenant l'opérateur de Perron-Froebenius, qui nous permettra de définir la mesure d'équilibre.

Définition 4.2. Soient X, Y deux espaces métriques relativement compacts, soit $f : Y \to X$ un revêtement ramifié de multiplicité n, de degré topologique d_t. Pour φ continue sur Y, posons

$$f_*\varphi(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} n(y)\varphi(y)$$

la fonction poussée en avant de φ par f.
Etant donnée une mesure μ sur Y, on définit une mesure $f^*\mu$ sur X par

$$\int_X \varphi df^*\mu = \int_Y f_*\varphi d\mu.$$

L'opérateur f_* est continu sur l'ensemble des fonctions continues muni de la norme infinie, donc l'opérateur f^* est continu sur l'ensemble des mesures de probabilité.

Il est clair que pour toute mesure μ sur X, $f_*(f^*\mu) = d_t\mu$. Si μ est de masse m sur X, alors $f^*\mu$ est de masse $d_t m$ sur Y.

Définition 4.3. Si f est une application d'allure polynomiale de degré topologique d_t et $\varphi : U \to \mathbb{R}$ est une application continue, posons $\Lambda\varphi = \frac{f_*\varphi}{d_t}$.

Un calcul élémentaire montre que :

$$|f_*\varphi|^2 \leq d_t^2 f_*(|\varphi|^2)$$

On peut alors prolonger Λ à $L^2(U)$, et dans cet espace, $||\Lambda|| = 1$.

4.2 Mesure d'équilibre

On introduit dans ce paragraphe une mesure invariante particulière, dite mesure d'équilibre. Elle se construit en prenant la moyenne des Diracs en les préimages d'un point z donné, et en itérant le procédé : on obtient une suite de mesures $d_t^{-n}(f^*)^n\delta_z$. On commence par montrer que pour toute forme volume Ω de masse 1, la suite $\frac{1}{d_t^n}(f^n)_*\Omega$ converge vers une mesure de probabilité μ indépendante de Ω. Pour cela on teste la suite $\frac{1}{d_t^n}(f^n)_*\Omega$ sur les fonctions plurisousharmoniques, qui ont de bonnes propriétés de convergence, et on utilise le fait que toute fonction continue s'écrit loclement comme la différence de deux fonctions p.s.h..

Lemme 4.2. Soit φ une fonction p.s.h. bornée au voisinage de $\mathcal{K}$. Alors pour n assez grand, $\varphi_n = \frac{(f^n)_*\varphi}{d_t^n}$ est une fonction p.s.h. définie et bornée sur V, et la suite φ_n converge dans $L^p_{loc}(V)$ vers une constante c_φ, pour tout $p \geq 1$.
De plus, l'ensemble

$$\mathcal{E}'_\varphi := \{z \in V : \lim\sup_{n\to+\infty} \varphi_n(z) < c_\varphi\}$$

est pluripolaire et invariant, au sens où $f(\mathcal{E}'_\varphi \cap U) \subset \mathcal{E}'_\varphi$.

De ce lemme on déduit le théorème d'existence de la mesure d'équilibre :

Théorème 4.3. *Soit $f : U \to V$ une application d'allure polynomiale de degré topologique $d_t \geq 2$. Il existe une mesure de probabilité μ portée par $\partial\mathcal{K}$ telle que $f^*\mu = d_t\mu$ et telle que pour toute forme volume Ω de masse 1 dans $L^2(V)$, la suite de mesures $\frac{1}{d_t^n}(f^n)_*\Omega$ converge vers μ. De plus, pour toute fonction $v \in L^2(\mu)$, la suite $v_n = \Lambda v$ converge dans $L^2(\mu)$ vers la constante $c_v = \int v d\mu$. Enfin, f est fortement mélangeante pour la mesure μ (en particulier, μ est ergodique).*

On notera J_k le support de la mesure μ, appelé Ensemble de Julia.

La mesure μ n'est pas seulement invariante : elle est totalement invariante, c'est à dire que $f^*\mu = d_t\mu$. Cette propriété est beaucoup plus forte, et l'on peut se demander s'il existe d'autres mesures totalement invariantes. La question n'est pas close, mais la proposition suivante donne des conditions restrictives d'existence de telles mesures.

Théorème 4.4.
1. *Soit ν_0 une mesure de probabilité ne chargeant pas les ensembles pluripolaires. Alors la suite de mesures $\nu_n := d_t^{-n}(f^n)^*\nu_0$ converge faiblement vers μ.*
2. *Soit ν une mesure de probabilité vérifiant $f^*\nu = d_t\nu$. Si ν ne charge pas les ensembles pluripolaires, alors $\nu = \mu$. Si ν est ergodique et n'est pas portée par un ensemble pluripolaire, alors $\nu = \mu$.*

Par définition de la mesure d'équilibre, pour presque tout point z de U (au sens de Lebesgue), la suite $d_t^{-n}(f^*)^n\delta_z$ converge vers μ. Il est alors naturel de se demander pour quels points la convergence n'a pas lieu. Cette question nous amène à introduire la notion d'ensemble exceptionnel.

Définition 4.4. Posons, pour tout $z \in V$,

$$\mu_n^z = \frac{(f^n)^*\delta_z}{d_t^n} = \frac{1}{d_t^n}\sum_{f^n(w)=z} n(w)\delta_w$$

où $n(w)$ est la multiplicité du point w.
Notons également :

$$\mathcal{E}' := \{z \in V : \mu \text{ n'est pas adhérente à la suite } (\mu_n^z)\}$$

$$\mathcal{E} := \{z \in V : \mu_n^z \text{ ne converge pas vers } \mu\}$$

$\mathcal{E}$ est appelé l'ensemble exceptionnel.

L'ensemble exceptionnel n'est pas nécessairement analytique, ni même nécessairement pluripolaire. La proposition suivante donne une condition pour qu'il soit pluripolaire.

Proposition 4.5. Soit $p \geq 1$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. L' ensemble $\mathcal{E}'$ est pluripolaire. De plus, pour toute fonction φ strictement p.s.h. et continue au voisinage de $\mathcal{K}$, on a :
$$\mathcal{E}' = \{z \in V : \limsup \varphi_n(z) < c_\varphi\}$$
$$\mathcal{E} = \{z \in V : \liminf \varphi_n(z) < c_\varphi\}$$
Enfin, si la série $\sum ||\varphi_n - c_\varphi||_{L^p(U)}$converge, alors $\mathcal{E}$ est pluripolaire.
2. Soit X un fermé non pluripolaire de V vérifiant $f^{-1}(X) \subset X$. Alors $J_k \subset X$.

La proposition suivante précise encore les conditions d'existence d'autres mesures totalement invariantes. L'ensemble exceptionnel y joue un grand rôle, et l'on verra que c'est encore le cas pour les questions d'entropie.

Proposition 4.6. Soit ν_0 une mesure de probabilité de V, soit ν une valeur d'adhérence de la suite $d_t^{-n}(f^n)^*\nu_0$. On a les propriétés suivantes :

1. Si φ est une fonction p.s.h. au voisinage de $\mathcal{K}$ et μ-intégrable, alors $\int \varphi d\nu \leq \int \varphi d\mu$.
2. Si ν_0 ne charge pas $\mathcal{E}$, alors $\nu = \mu$.
3. Si $\nu \neq \mu$, alors pour toute fonction φ strictement p.s.h. au voisinage de $\mathcal{K}$ et μ-intégrable, $\int \varphi d\nu < \int \varphi d\mu$.
4. Soit u une fonction pluriharmonique au voisinage de $\mathcal{K}$. Alors $\int u d\nu = \int u d\mu$.

4.3 Entropie

Le but de ce paragraphe est de calculer l'entropie de f et de la mesure d'équilibre. Plus précisément, on montre que μ est d'entropie maximale, égale à $\log d_t$.
On commence par montrer que l'entropie est supérieure ou égale à $\log d_t$:

Théorème 4.7. *(Voir [10]) L'entropie de μ vérifie $h_\mu(f) \geq \log d_t$.*

Ce théorème peut s'établir de façon élémentaire en utilisant l'invariance totale de μ et le fait que f soit un revêtement ramifié.

Si l'on montre que l'entropie topologique de f est majorée par $\log d_t$, on obtiendra du même coup, par le principe variationnel, l'entropie topologique et l'entropie de μ. L'idée de Gromov pour calculer cette inégalité est de majorer l'entropie topologique par un réel, noté $\text{lov}(f)$, mesurant la croissance du volume des graphes des itérées de f.

Lemme 4.8 (Yomdin-Gromov [5])**.** — $h(f) \leq \text{lov}(f)$.

Démonstration. Soit ε_0 la distance entre $\mathcal{K}$ et ∂U, et soit $F \subset \mathcal{K}$ une famille (n, ε)-séparée, avec $\varepsilon < \varepsilon_0$. Posons
$$F^* := \{a^* = (a, f(a), ..., f^{n-1}(a)) \in \Gamma_n | a \in F\}$$
et pour $a^* \in F^*$:
$$B_{a^*} := B_{\mathcal{K}}(a^*, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U^n$$
Alors les B_{a^*} sont disjointes. Par une inégalité de Lelong (voir [**?**] pour la démonstration), $\text{Vol}(\Gamma_n \cap B_{a^*}) \geq \pi^k(\frac{\varepsilon}{2})^k$. On en déduit que
$$\text{Card}(F)\pi^k(\frac{\varepsilon}{2})^k \leq \text{Vol}(\Gamma_n \cap U^n)$$
puis que $h(f) \leq \text{lov}(f)$. □

Il reste à majorer $\text{lov}(f)$ par $\log d_t$. Cette inégalité s'obtient assez facilement dans le cas algébrique gâce au théorème de Bezout, mais dans le cas présent il faut s'en passer. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 4.9. Soient W_1, W_2 deux variétés complexes de dimensions respectives k_1 et k_2. Supposons que W_1 soit de Stein. Soient également K_1 (respectivement K_2) un compact de W_1 (respectivement W_2), $m \geq 1$ un entier, et Γ un sous-ensemble analytique de $K_1^m \times W_2$ de dimension pure k_2.
Notons $\pi : W_1^m \times W_2 \to W_2$ la projection canonique, et notons d_Γ le degré topologique du revêtement ramifié $\pi_{|\Gamma} : \Gamma \to W_2$.
Alors il existe une constante $c > 0$ et un entier s indépendants de m et de Γ tels que :
$\mathrm{Vol}(\Gamma \cap (W_1^m \times K_2)) \leq cm^s d_\Gamma$.

On peut alors conclure :

Théorème 4.10. *Soit $f : U \mapsto V$ une application d'allure polynomiale de degré topologique $d_t \geq 2$. Alors l'entropie topologique de f est égale à $\log d_t$, et μ est une mesure d'entropie maximale.*

Démonstration. On a déjà vu (Lemme 4.7) que $h_\mu(f) \geq \log d_t$. Par le principe variationnel (Theorème 2.12), on a donc : $h(f) \geq \log d_t$. Il suffit de montrer l'inégalité inverse pour obtenir la valeur de l'entropie topologique et montrer ainsi que μ est d'entropie maximale.
Posons :

$$\Gamma_n := \{(x, f(x), f^2(x), ..., f^{n-1}(x)); x \in U_{-n+1}\}$$

le graphe de l'application $(f, f^2, ..., f^{n-1})$ dans $U_{-n+1} \times U_{-n+2} \times ... \times V$.
Si $\varphi(x_1, ..., x_n) = (x_2 - f(x_1), ..., x_n - f(x_{n-1})$, alors :

$$\Gamma_n = \{(x_1, ..., x_n) \in U_{-n+1} \times ... \times V | \varphi(x_1, ..., x_n) = 0\}$$

Comme φ est de rang générique $k(n-1)$, alors $\dim \Gamma_n = k$. De plus, Γ_n est un sous-ensemble analytique de V^n, contenu dans $\overline{U}^{n-1} \times V$, et c'est aussi un revêtement de degré d_t^{n-1} au-dessus de V. D'après le lemme précédent, comme U est relativement compact :

$$\mathrm{lov}(f) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{Vol}(\Gamma_n \cap U^n) \leq \log d_t$$

□

La minoration de l'entropie métrique obtenue au Théorème 4.7 repose en grande partie sur l'invariance totale de la mesure. Il peut être utile, dans le cadre de la recherche d'autres mesures totalement invariantes, de chercher d'autres mesures d'entropie maximale. J.Duval et J.Y.Briend ont montré, dans le cas polynomial, que μ est l'unique mesure d'entropie maximale. Le théorème suivant esquisse une généralisation de ce résultat.

Théorème 4.11. *Une mesure invariante ergodique ν d'entropie maximale vérifie $f^*\nu = d_t \nu$. En particulier, μ est l'unique mesure d'entropie maximale dès que l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ est inclus dans l'ensemble postcritique PC_∞.*

Ce théorème utilise le Lemme 4.9, ainsi qu'un lemme de dénombrement dû à Ljubich.

4.4 Ensemble exceptionnel

Le Théorème 4.11 met en lumière l'importance de bien connaître l'ensemble exceptionnel. Dans le cas polynomial, on sait déjà, grâce à J.Duval et J.Y.Briend, que l'ensemble exceptionnel est égal à l'orbite du plus grand sous-ensemble analytique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. On cherche à généraliser ce résultat aux applications d'allure polynomiale.
La preuve des résultats qui suivent est assez technique. Il s'agit, pour pouvoir contrôler l'ensemble exceptionnel, de connaître la répartition des préimages des points, ce qui nous amène à étudier les branches inverses de f. Plus précisément, étant donnée une petite boule B, on cherche à minorer le nombre de composantes connexes de $f^{-n}(B)$, tout en majorant leur rayon, afin de pouvoir itérer. Il faut pour cela passer par la dimension 1 (le lemme de Koebe permet de contrôler le rayon de l'image d'un disque par une fonction holomorphe), puis revenir au cas général en prolongeant les branches inverses, définies sur des disques, à des boules, tout en contrôlant leur rayon. On utilise pour cela un théorème de prolongement de Sibony-Wong. On obtient le résultat suivant :

Théorème 4.12. *Supposons que la suite de courants*
$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{d_t^n} (f^n)_* [C \cap U_{-n}]$ *converge vers un courant S. Alors $\mathcal{E} \subset PC_\infty$. De plus, si $\mathcal{E}_0$ est le plus grand sous-ensemble analytique de V qui soit totalement invariant ($f^{-1}(\mathcal{E}_0) \subset \mathcal{E}_0$)) et contenu dans $\{a \in V : \nu(S, a) \geq 1\}$, alors $\mathcal{E} = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\mathcal{E}_0)$.*

On remarque que même sous les conditions du théorème, l'ensemble exceptionnel n'est pas nécessairement analytique : il est égal à l'orbite d'un ensemble analytique.
L'hypothèse du théorème 4.12 n'est pas des plus aisées à manipuler. Le paragraphe suivant permettra d'exhiber des exemples.

4.5 Degré dynamique. Exemples

Notons ω la $(1,1)$-forme définie par : $\omega = i\sum_{1\leq j\leq k} dz_j \wedge d\overline{z_j}$. Pour $1 \leq l \leq k$ et $n \geq 1$, posons :

$$d_{l,n} := \int_{U_{-n-1}} (f^n)^*(\omega^l) \wedge \omega^{k-l} = \int_U (f^n)_*(\omega^{k-l}) \wedge \omega^l.$$

On définit alors le degré dynamique d'ordre l par : $d_l := \limsup (d_{l,n})^{1/n}$.
Les degrés dynamiques sont des réels positifs majorés par le degré topologique d_t, invariants car conjuguaison holomorphe. On n'étudie pas ici ces degrés en détail, mais on introduit un nouveau degré dynamique, non standard, adapté aux objets spécifiques à la dynamique holomorphe.

Définition 4.5. On note d^* la quantité suivante :

$$d^* := \sup\{\limsup d_t ||\Lambda^n(dd^c\varphi)||_U^{1/n} : \varphi \text{ p.s.h. sur } V\}$$

Une mesure de probabilité ν est dite PLB si les fonctions p.s.h. sont intégrables pour ν. En particulier, une telle mesure ne charge pas les ensembles pluripolaires. Le théorème suivant met en relation le caractère PLB de μ avec une condition sur d^*.

Théorème 4.13. *La mesure d'équilibre μ est PLB si et seulement si $d^* < d_t$.*

Outre le fait qu'elles sont simples, l'intérêt de ces notions est que la condition $d^* < d_t$ implique, entre autre, l'hypothèse du Théorème 4.12. Les principales conséquences en sont réunies dans le théorème suivant :

Théorème 4.14. *Supposons $d^* < d_t$. Alors :*

1. *La mesure μ est mélangeante à vitesse exponentielle : Il existe des constantes $0 < c < 1$ et $A > 0$ telles que pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ et toute fonction ψ bornée :*

$$|I_n| := \left| \int \psi(f^n)\varphi d\mu - (\int \psi d\mu)(\int \varphi d\mu) \right| \leq A||\psi||_\infty ||\varphi||_{\mathcal{C}^2} c^n.$$

2. *Il existe un sous-ensemble analytique $\mathcal{E}_0$ de V, totalement invariant par f, tel que : $\mathcal{E} = \bigcup_{n\geq 0} f^n(\mathcal{E}_0)$. De plus, $\mathcal{E} \subset PC_\infty$.*
3. *μ est l'unique mesure d'entropie maximale $\log d_t$.*

L'intérêt de ce théorème réside également dans sa grande généralité. En effet, la condition $d^* < d_t$ est vérifiée pour les applications polynomiales, et est de plus stable par perturbation de la fonction f. Il s'applique donc à une grande classe de fonctions.

Théorème 4.15. *Suppsons que la mesure d'équlibre μ de $f : U \to V$ soit PLB. Alors pour toute perturbation $f_\varepsilon : U_\varepsilon \to V_\varepsilon$ assez proche de f, la mesure d'équilibre μ_ε de f_ε est PLB. De façon équivalente, la condition $d^* < d_t$ est stable par perturbation.*

Proposition 4.16. Soit $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ une application polynomiale propre de degré algébrique $d \geq 2$ et de degré topologique $d_t > d^{k-1}$. Supposons qu'il existe un ouvert de Stein $V \subset \mathbb{C}^k$ tel que $U := f^{-1}(V)$ soit relativement compact dans V. Alors les degrés dynamiques vérifient : $d^* < d_t$ (de façon équivalente, la mesure d'équilibre est PLB).

4.6 Exemples

Une des grandes difficultés en dynamique holomorphe est qu'on manque d'exemples et de contre-exemples. Par exemple, on ne sait pas produire d'exemples ed fonctions f dont l'ensemble exceptionnel n'est pas inclus dans l'ensemble post-critique. On peut par contre produire des exemples pour lesquels l'ensemble exceptionnel n'est pas analytique.

L'exemple non trivial le plus simple est celui d'une fonction polynomiale de $\mathbb{C}^2$ telle que $f(z,w) = (z^d, w^d)$, avec $d \geq 2$. Posons $V := B(0,2)$, $U := B(0, 2^{1/d})$. Alors il est aisé de voir que $\mathcal{K} = (\mathbb{U} \times \{0\}) \times (\{0\} \times \mathbb{U})$, et que $C = \{zw = 0\}$. Si on note leb la mesure de Lebesgue sur le cercle unité, il apparaît aisément que la mesure d'équilibre μ est égale à $\lambda \times \lambda$, où $\lambda(A) = \mathrm{leb}(A \cap \mathbb{U})$. Cette mesure est bien PLB, et l'ensemble exceptionnel est égal à l'ensemble critique.

On peut assez simplement trouver un exemple pour lequel l'ensemble exceptionnel n'est pas analytique. Posons $\varphi(z) = (1 - z^2)/2$, soit $R > 0$ tel que $\overline{\varphi^{-1}(B(0,R)} \subset B(0,R)$, et posons $V = B(0,R) \times B(0,R)$, $U = \varphi^{-1}(B(0,R) \times \varphi^{-1}(B(0,R)$, et $f(z,w) = (\varphi(z), \varphi(w))$. L'ensemble exceptionnel vaut alors $\mathcal{E} = (\bigcup_{n\geq 0}\{\varphi^n(0)\} \times \{0\}) \times (\{0\} \times \bigcup_{n\geq 0}\{\varphi^n(0)\})$, et comme $\varphi^n(0)$ converge vers $\sqrt{2} - 1$ sans atteindre sa limite, $\mathcal{E}$ n'est pas analytique.

On peut à l'opposé construire un exemple pour lequel μ n'est pas PLB, mais tel que l'ensemble exceptionnel soit inclus dans l'ensemble poscritique. Il suffit de poser $V = B(0,R) \times B(0,2)$, $U = \varphi^{-1}(B(0,R)) \times B(0,1)$ et $f(z,w) = (\varphi(z), 2w)$. La mesure d'équilibre vaut alors $\mu = \mu_\varphi \times \delta_0$, où μ_φ est la mesure d'équilibre de φ. La mesure d'équilibre n'est pas PLB, mais on peut montrer que $\mathcal{E}$ est inclus dans PC_∞.

Références

[1] J.Y. Briend, J. Duval, Deux caractéristiques de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, IHES Publ.Math.93(2001)145-159.

[2] L. Carleson, T.W. Gamelin, Complex Dynamics, Springer-Verlag, New-York, 1993.

[3] J.-P. Demailly, Complex analytic and differential geometry, preliminary draft, Institut Fourier.

[4] T.-C. Dinh, N. Sibony, Dynamique des applications d'allure polynomiale, J. Math. Pures. Appl. 82 (2003) 367-423.

[5] M. Gromov, On the entropy of holomorphic maps, Manuscrit, 1977.

[6] L. Hörmander, An Introduction to complex Analysis in Several Variables, Third Edition, North-Holland, 1990.

[7] A. Katok, B. Hasselblatt, Modern Theory of dynamical systems, Cambridge University Press 1995.

[8] S. Kobayashi, Hyperbolic Complex Spaces, Springer-Verlag, 1998.

[9] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures, Vieweg, Braunschweig, 1999.

[10] W. Parry, Entropy and Generators in Ergodic Theory, Benjamin, 1969.

[11] N. Sibony, Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, Panoramas et Synthèses, 8 (1999), 97-185.

[12] N. Sibony, P.M. Wong, Some results on global analytic sets, in : Séminaire Lelong-Skoda, in : Lecture Notes in Math., Vol 882, 1980, pp.221-237.

[13] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theoty, Springer-Verlag 1982.