

Mémoire de Magistère

Justin Salez

3 avril 2008

Table des matières

I	Curriculum Vitae du Magistère	3
II	Projet de thèse (sous la direction de F. Baccelli)	6
III	Mémoire du stage d’informatique de première année	15
1	Représentation modulaire des flots d’impulsions	20
1.1	Modèle mathématique	20
1.1.1	Représentation formelle des impulsions	20
1.1.2	Ajout ponctuel d’informations	23
1.1.3	Matérialisation des données abstraites	25
1.2	Construction modulaire des signaux	28
1.2.1	Codage de l’information	29
1.2.2	Perturbations au cours de la transmission	33
2	Théorie du calcul spectral	39
2.1	Analyse spectrale classique	39
2.1.1	Formalisme des processus stochastiques	39
2.1.2	Mesure spectrale de puissance	41
2.2	Analyse spectrale étendue	42
2.2.1	Mesure spectrale de Bartlett	43
2.2.2	Formule isométrique fondamentale	47
2.2.3	Exemple : spectres des signaux TH-IR	49
3	Analyse spectrale informatisée	52
3.1	Vue d’ensemble du module implémenté	52
3.1.1	Justification du langage choisi	52
3.1.2	Architecture globale	53
3.1.3	Aspects algorithmiques	55
3.2	Panorama des possibilités offertes	61
3.2.1	Paramétrisation du support vierge initial	62
3.2.2	Spécification du motif de filtrage	64
3.2.3	Choix des différents types de codage	66
3.2.4	Gestion des signatures personnalisées	68
3.2.5	Prise en compte des effets d’altération	70

3.2.6	Outils supplémentaires	72
IV	Mémoire de M2	78
4	L’algorithme “Bonus Propagation”	82
4.1	Le problème de l’affectation optimale	82
4.2	Un algorithme de propagation des croyances	83
4.3	Vitesse asymptotique de convergence : énoncé du résultat	84
5	Topologie de la convergence locale	86
5.1	L’espace topologique \mathcal{G}^*	86
5.2	Métrisabilité de la convergence locale	87
5.3	Caractérisation de la relative compacité	89
5.4	Séparabilité et complétude	90
6	Convergence des croyances sur le graphe infini limite	92
6.1	Le graphe infini limite	92
6.2	Convergence en distribution	93
6.3	Convergence forte	96
7	Retour au cas fini : comportement asymptotique sur $\mathcal{K}_{n,n}$	100
7.1	Continuité vis-à-vis de la convergence locale	100
7.2	Vitesse de convergence et complexité asymptotique	103

Première partie

Curriculum Vitae du Magistère

Rattaché à la fois au département de mathématiques et à celui d'informatique, j'ai tenté de tirer parti, tout au long de ma scolarité à l'ENS, de la diversité des cours proposés et de la liberté accordée aux élèves quant-au choix de leur cursus afin d'acquérir simultanément une formation théorique solide dans les deux disciplines, profitant par ailleurs des diverses opportunités de stages d'été pour découvrir quelques-uns des principaux thèmes actuels de recherche à l'intersection de ces deux domaines.

Diplômes obtenus

- **Première année**
 - Première année du MMFAI : mention *bien* ;
 - License de Mathématiques (Paris VI) : mention *bien* ;
 - Première année du diplôme d'Informatique de l'ENS ;
- **Deuxième année**
 - Deuxième année du MMFAI : mention *très bien* ;
 - M1 d'Informatique (MPRI) : mention *très bien* ;
 - Deuxième année du diplôme d'Informatique de l'ENS ;
- **Troisième année**
 - M2 de Mathématiques, spécialité *Probabilités et Applications*, filière *Processus stochastiques* (Paris VI) : mention *très bien* ;
 - M2 d'Informatique (MPRI) : mention *très bien*, reçu 3^{ème} ;
 - Troisième année du diplôme d'Informatique de l'ENS.

Stages de recherche

- **Première année** : Stage de 2 mois auprès de Pierre Brémaud, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). Sujet : *analyse spectrale de processus ponctuels* ;
- **Deuxième année** : Stage de 3 mois auprès de Devavrat Shah, Massachusetts Institute of Technology (MIT). Sujet : *introduction aux algorithmes de propagation de croyances* ;
- **Troisième année** : Stage de 5 mois auprès de François Baccelli, École Normale Supérieure de Paris. Sujet : *convergence locale de graphes aléatoires pour l'étude rigoureuse de la propagation des croyances en milieu cyclique*.

Groupes de lectures, séminaires et écoles d'été

- Groupe de travail autour du livre *Probability on trees and Networks* de R. Lyons et Y. Peres : exposé donné sur l'algorithme de Wilson, qui simule des marches aléatoires pour générer uniformément un arbre couvrant aléatoire sur un graphe complet, janvier 2006 ;
- Séminaire du groupe TREC : exposé donné sur la *convergence locale de graphes aléatoires*, octobre 2006 ;
- Groupe de lecture autour du livre *Spin glasses, a challenge for mathematicians* de M. Talagrand : exposé donné sur le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, juin 2007 ;
- École d'été de l'Institut de Mathématiques de Jussieu : *Verres de spins*, juillet 2007.

Enseignements validés

– Première année

- Mathématiques :
 - *Intégration et probabilités*, G. David ;
 - *Topologie et calcul différentiel*, B. Perthame ;
 - *Logique*, P. Dehornoy ;
 - *Processus aléatoires*, J.-F. Le Gall ;
- Informatique :
 - *Signal, information et communications*, P. Brémaud ;
 - *Algorithmique et programmation*, J. Stern ;
 - *Langages de programmation et compilation*, P. Cousot ;
 - *Langages formels, calculabilité et complexité*, O. Carton ;
 - *Systèmes digitaux*, J. Vuillemin ;
 - *Logique informatique*, J. Goubault-Larrecq ;

– Deuxième année

- Mathématiques :
 - *Processus de Markov, application à la dynamique des populations*, I. Kourkova ;
 - *Marches aléatoires en milieux aléatoires*, N. Enriquez ;
 - *Processus ponctuels, réseaux stochastiques et graphes aléatoires*, F. Baccelli ;
 - *Mécanique statistique pour les réseaux de communication*, C. Graham ;
- Informatique :
 - *Techniques pour la déduction automatique*, G. Necula ;
 - *Systèmes matériels*, M. Shand ;
 - *Vision par ordinateur*, R. Keriven ;

– Troisième année

- Mathématiques :
 - *Théorèmes limites et grandes déviations*, Z. Shi ;
 - *Processus de Markov*, T. Jeulin ;
- Informatique :
 - *Aspects algorithmiques de la combinatoire*, G. Schaeffer ;
 - *Analyse d'algorithmes*, P. Flajollet ;
 - *Algorithmes probabilistes et complexité*, F. Magniez ;
 - *Information quantique*, I. Kerenidis ;
 - *Dynamique et algorithmique des réseaux*, F. Baccelli.

Deuxième partie

Projet de thèse

(sous la direction de F. Baccelli)

Contexte général et problématique

Étant donnée une matrice de réels positifs $C = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, le célèbre problème de l'affectation optimale consiste à déterminer une permutation π de $\{1 \dots n\}$ minimisant le coût $\sum_{i=1}^n c_{i, \pi(i)}$ de l'attribution bijective d'une colonne $\pi(i)$ à chaque ligne i . De manière équivalente, il s'agit de trouver un couplage couvrant de poids minimal sur le graphe biparti équilibré complet $K_{n,n}$ dont les n^2 arêtes sont valuées par les coefficients de la matrice C .

Définition 1. Rappelons qu'un graphe enraciné est un simple triplet $G = (V, \emptyset, E)$ où :

- V est un ensemble quelconque (les sommets) ;
- \emptyset est un élément particulier de V (la racine) ;
- E est un ensemble de paires sur V (les arêtes).

Un couplage couvrant sur un tel graphe est un sous-ensemble $M \subseteq E$ d'arêtes deux-à-deux disjointes dont les extrémités recouvrent tous les sommets. Enfin, lorsque le graphe G est valué, c'est-à-dire que chaque arête $e \in E$ est munie d'une longueur $|e|_G > 0$, on appelle poids de M la somme des valuations de ses éléments.

Comme beaucoup d'autres en théorie des graphes, notre problème serait bien moins épineux si le graphe sous-jacent était acyclique. En effet, sur un arbre valué fini T , il est facile de montrer que le voisin $\pi_T^*(\emptyset)$ auquel est reliée la racine \emptyset dans le couplage de poids minimal (supposé unique) couvrant tous les sommets internes est simplement donné par :

$$\pi_T^*(\emptyset) = \arg \min_{x \sim \emptyset} \{|\{\emptyset, x\}| - B(T_x)\}, \quad (1)$$

où $|e|$ désigne la longueur de l'arête e , T_x le sous-arbre de T engendré par le nœud x et toute sa descendance, et où les quantités auxiliaires $B(T_x)$ se calculent récursivement selon la relation :

$$B(T) = \min_{x \sim \emptyset} \{|\{\emptyset, x\}| - B(T_x)\}, \quad (2)$$

valable tant que T est non-réduit à sa racine \emptyset (le cas échéant on pose simplement $B(T) = 0$). Or au moins formellement, une telle induction sur la structure de l'arbre peut toujours être vue comme un processus itératif au cours duquel des *croiances* locales – les $B(T)$ – partent des feuilles et remontent progressivement le long des arêtes pour révéler finalement à la racine le sommet auquel elle doit être couplée. Le choix de la racine étant parfaitement arbitraire, rien ne nous empêche d'ailleurs de faire circuler ces informations en parallèle dans toutes les directions pour voir spontanément émerger dans l'arbre, après un nombre d'itérations au plus égal à la taille du plus long chemin, la configuration collective optimale visée. Dès lors, il paraît naturel de tenter de propager ces mêmes croyances sur notre graphe valué $G = K_{n,n}$ en espérant qu'en dépit des cycles les décisions individuelles issues des confrontations locales successives finiront par s'accorder. Plus précisément, on définit l'algorithme suivante : à chaque étape $k \geq 1$, chaque sommet x envoie à tout voisin direct y un message $m_G^k(x \rightarrow y)$ déduit de ceux qu'il a précédemment reçus de ses autres voisins selon la règle de mise-à-jour obtenue dans le cas acyclique :

$$\begin{cases} m_G^0(x \rightarrow y) & := 0 ; \\ m_G^k(x \rightarrow y) & := \min_{z \sim x, z \neq y} \left\{ |\{z, x\}|_G - m_G^{k-1}(z \rightarrow x) \right\}. \end{cases} \quad (3)$$

Chaque nœud interne x se connecte alors au voisin $\pi_G^k(x)$ dont le message est le plus convaincant en un sens analogue à celui du critère (1) :

$$\pi_G^k(x) := \arg \min_{y \sim x} \left\{ |\{x, y\}|_G - m_G^k(y \rightarrow x) \right\}. \quad (4)$$

À priori, rien ne garantit que l'application $\pi_{K_{n,n}}^k$ ainsi obtenue sur $K_{n,n}$ ait un rapport quelconque avec le couplage couvrant de poids minimal $\pi_{K_{n,n}}^*$ cherché. Pourtant, un tel schéma d'approximation a déjà maintes fois fait ses preuves par le passé : dans le contexte des verres de spins en physique statistique, la première mise-en-œuvre de ce genre d'itération non-rigoureuse baptisée *cavity method* avait conduit MÉZARD et PARISI à conjecturer dès 1985 une formule explicite pour la limite thermodynamique de l'énergie libre dans le modèle de Sherrington-Kirkpatrick, prédiction à laquelle les célèbres travaux de TALAGRAND [Tal06] viennent tout juste de donner raison. Entretemps, dans divers problèmes d'optimisation combinatoire sur de larges systèmes aléatoires discrets, la même heuristique de calcul a fourni de remarquables candidats limites pour certaines caractéristiques de la configuration optimale alors même que toute tentative d'évaluation directe se voyait condamnée par le nombre exponentiel des différents états macroscopiques possibles et l'interdépendance locale complexe des choix microscopiques qui les engendrent. En 1987, l'étude des point-fixes de l'équation de mise-à-jour (3) a par exemple conduit les mêmes physiciens à formuler la conjecture fascinante qui suit [MP87] :

Conjecture 1. *Lorsque les coûts $(c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$, on a pour le coût asymptotique moyen de l'affectation optimale :*

$$\mathbb{E} \left[\min_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^n c_{i, \pi(i)} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \quad (5)$$

Quinze ans plus tard, ALDOUS [Ald01] fournit une preuve rigoureuse de ce résultat en introduisant la notion fondamentale de convergence locale :

Définition 2 (Convergence locale). *On appelle graphe géométrique tout graphe enraciné, valué, connexe et dont les ϱ -restrictions ($\varrho > 0$) sont finies, où la ϱ -restriction de G notée $[G]_\varrho$ est le graphe obtenu en supprimant tous les sommets situés à distance¹ plus que ϱ de la racine. On dira qu'une suite $(G_n)_{n \geq 1}$ de graphes géométriques converge localement vers un graphe géométrique G si pour tout $\varrho > 0$ tel qu'aucun sommet de G n'est à distance exactement ϱ de la racine, il existe un rang n_ϱ à partir duquel les $[G_n]_\varrho$ sont isomorphes² à $[G]_\varrho$ et si l'on peut en outre choisir les isomorphismes $\gamma_n : [G]_\varrho \rightarrow [G_n]_\varrho, n \geq n_\varrho$ de telle sorte que pour toute arête e de $[G]_\varrho$:*

$$|\gamma_n(e)|_{G_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |e|_G.$$

Avec un peu de travail, on peut construire sur l'ensemble \mathcal{G}^* des graphes géométriques quotienté par la relation d'indistingabilité³ une distance qui métrise cette convergence et rend

¹La (semi-)distance entre deux sommets d'un graphe valué est simplement l'infimum éventuellement infini des longueurs des chemins qui relient ces derniers.

²On appelle isomorphisme de $G = (V, \varnothing, E)$ vers $G' = (V', \varnothing', E')$ toute bijection $\gamma : V \rightarrow V'$ préservant la racine ($\gamma(\varnothing) = \varnothing'$) et la structure ($\forall (x, y) \in V, \{\gamma(x), \gamma(y)\} \in E' \Leftrightarrow \{x, y\} \in E$).

³Deux graphes géométriques sont dit indistingables s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre qui préserve les longueurs des arêtes.

l'espace obtenu séparable et complet, ce qui nous autorisera désormais à parler de graphes aléatoires (applications mesurables à valeurs dans l'espace \mathcal{G}^* muni de sa tribu borélienne) et à utiliser tous les résultats classiques propres à la convergence en loi dans les espace polonais. On dispose même d'une caractérisation de la relative compacité dans \mathcal{G}^* :

Théorème 1 (Caractérisation de la relative compacité). *Une partie $K \subseteq \mathcal{G}^*$ est relativement compacte dans \mathcal{G}^* si et seulement si pour tout $\varrho > 0$ fixé :*

- (i) *le degré des sommets des $\lceil G \rceil_\varrho, G \in K$ est uniformément majoré ;*
- (ii) *la longueur des arêtes des $\lceil G \rceil_\varrho, G \in K$ est uniformément minorée par un réel strictement positif et uniformément majorée.*

Le théorème de Prokhorov (c.f. par exemple [Bil99]) nous fournit aussitôt un critère explicite pour la convergence locale en loi d'une suite de graphes aléatoires :

Théorème 2 (Critère de convergence locale faible). *Soient $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots$ des graphes aléatoires. Alors $\mathfrak{G}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \mathfrak{G}$ si et seulement si :*

- (i) *La suite $(\mathfrak{G}_n)_{n \geq 1}$ est tendue, i.e. pour tout $\varrho > 0$ fixé :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(\lceil \mathfrak{G}_n \rceil_\varrho \text{ contient un sommet de degré au moins } \delta) \xrightarrow[\delta \rightarrow \infty]{} 0; \\ \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(\lceil \mathfrak{G}_n \rceil_\varrho \text{ contient une arête de longueur au moins } \ell) \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} 0; \\ \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(\lceil \mathfrak{G}_n \rceil_\varrho \text{ contient une arête de longueur au plus } \ell) \xrightarrow[\ell \rightarrow 0]{} 0; \end{array} \right.$$

- (ii) *Il y a convergence fini-dimensionnelle i.e. pour tout graphe géométrique $G = (V, \emptyset, E)$ et tout sous-ensemble fini d'arêtes $E_0 \subseteq E$:*

$$\mathbb{P}\left(\exists \gamma : G \leftrightarrow \mathfrak{G}_n, \forall e \in E_0, |\gamma(e)|_{\mathfrak{G}_n} \leq |e|_G\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}\left(\exists \gamma : G \leftrightarrow \mathfrak{G}, \forall e \in E_0, |\gamma(e)|_{\mathfrak{G}} \leq |e|_G\right).$$

De manière remarquable, de nombreux graphes aléatoires classiques (graphes d'Erdoes-Renyi, arbre couvrant uniforme sur n sommets, graphe complet de taille n dont les longueurs des arêtes sont i.i.d., etc.) se trouvent posséder après renormalisation une loi limite au sens de la convergence locale lorsque leur taille tend vers l'infini, et le théorème qui précède fournit un moyen effectif de démontrer ce genre de résultat. Dans le cas des graphes bipartis $\mathcal{K}_{n,n}$ aléatoirement valués étudié par Aldous, on a par exemple la convergence suivante :

Théorème 3 (Convergence vers le PWIT, ALDOUS et STEELE, [Ste02]). *Notons \mathcal{V} l'ensemble des mots finis sur l'alphabet des entiers strictement positifs, \emptyset le mot-vide et “.” l'opération de concaténation usuelle sur ces mots. Donnons-nous une famille $(X^v = X_1^v, X_2^v, \dots)_{v \in \mathcal{V}}$ de processus de Poisson⁴ indépendants d'intensité 1 sur \mathbb{R}^+ , et considérons l'arbre infini complet $(\mathcal{V}, \emptyset, \{\{v, v.i\}; v \in \mathcal{V}, i \in \mathbb{N}^*\})$ dont les longueurs (aléatoires) des arêtes sont définies par :*

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall i \geq 1, |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}} := X_i^v.$$

Cela définit bien la loi d'un graphe aléatoire que nous baptiserons désormais PWIT (Poisson Weighted Infinite Tree). On a alors :

$$n\mathcal{K}_{n,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{T}. \tag{6}$$

⁴Rappelons qu'un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$ sur \mathbb{R}^+ est une famille $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires dont les incréments $X_{i+1} - X_i, i \geq 1$ sont des variables aléatoires indépendantes de distribution exponentielle de paramètre λ .

Une fois déduite de ce résultat la convergence de $\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*$ vers un couplage couvrant spatialement invariant sur \mathcal{T} minimisant la longueur moyenne d'une arête ([Ald01]), il ne restait plus à Aldous qu'à identifier ce dernier avec l'application $\pi_{\mathcal{T}}^* : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ associée au point-fixe de l'équation (3) pour retrouver aussitôt le $\zeta(2)$ de MÉZARD et PARISI, jetant ainsi les bases de ce qu'il appellera plus tard avec STEELE la *méthode objective* [AS03]. La mise en œuvre de cette méthode générique radicalement nouvelle pour établir d'autres théorèmes limites dans divers problèmes d'optimisation combinatoire stochastiques, par exemple celui de la taille maximale d'un *ensemble indépendant*⁵ sur de larges graphes d'Erdos-Renyi, pourrait constituer un premier défi extrêmement motivant. Essentiellement l'idée consisterait à remplacer l'analyse asymptotique de la fonctionnelle macroscopique concernée lorsque la taille de la structure discrète sous-jacente tend vers l'infini par l'étude directe de cette fonctionnelle sur le système infini limite mis en évidence à l'aide de la notion de convergence locale.

D'autre part, d'un point-de-vue plus algorithmique, le schéma itératif auquel conduit la *cavity method* s'avère en pratique redoutablement efficace pour construire de manière entièrement décentralisée des solutions approchées extrêmement précises sur de gigantesques structures. En effet, bien qu'à-priori l'atteinte de l'état stationnaire correspondant à l'optimum cherché ne soit garantie qu'après un nombre d'étapes égal à la taille du plus long chemin orienté (quantité que le moindre cycle repousse évidemment à l'infini), les configurations successivement obtenues lors de l'exécution forcée de ce type d'algorithme sur certains graphes cycliques semblent mystérieusement converger vers le point-fixe visé, et ce à une vitesse spectaculaire. Au point que c'est sur ces phénomènes non-rigoureusement établis que se fondent les technologies de décodage et de correction d'erreurs équipant les dernières générations de téléphones mobiles (*turbocodes*), et que certains raffinements tout récents (*survey propagation*) se montrent d'une efficacité inégalée pour la résolution approchée de problèmes NP-complets aussi célèbres que la satisfiabilité ou le k-coloriage.

Les perspectives alléchantes que pourrait offrir la compréhension mathématique de ces mécanismes algorithmiques exceptionnels inspirés de la physique statistique ont récemment motivé de nombreux travaux sur les modalités précises et rigoureuses d'une telle *convergence des croyances* : conditions suffisantes, vitesse asymptotique, influence des conditions initiales, stabilité stochastique, etc. Toutefois, l'absence d'outils véritablement adaptés rend le problème ardu et restreint les réponses positives à quelques rares cas isolés. Dans le cas particulier de l'affectation optimale par exemple, BAYATI, SHAH et SHARMA [BSS05] sont récemment parvenus à établir une preuve rigoureuse de la convergence des croyances : pour tout n et toute valuation des arêtes rendant unique le couplage couvrant de poids minimal,

$$\pi_{K_{n,n}}^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \pi_{K_{n,n}}^*. \quad (7)$$

Néanmoins, l'argument combinatoire utilisé n'est absolument pas reproductible et ne donne aucune information sur la question – cruciale d'un point-de-vue algorithmique – de la vitesse de convergence, et tout particulièrement sa dépendance en la taille n du problème : comment croît le nombre d'itérations nécessaires à l'atteinte de l'état stationnaire lorsque la taille du graphe sur lequel est exécuté l'algorithme tend vers l'infini ? Ici encore, l'idée d'utiliser la notion de convergence locale pour remplacer l'étude asymptotique du comportement des croyances sur de larges instances de graphes aléatoires cycliques par l'analyse directe du phénomène sur la structure infinie limite pourrait se révéler extrêmement fertile.

⁵Un ensemble indépendant sur un graphe $G = (V, E)$ est une partie I de V telle que $\forall x, y \in I, \{x, y\} \notin E$.

Dans une telle perspective, certains problèmes d’optimisation pourraient présenter un intérêt tout particulier : ceux dont la complexité algorithmique exhibe de remarquables transitions de phase lorsque l’on fait varier la connectivité moyenne dans le graphe sous-jacent. Sur de larges Erdos-Renyi de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ par exemple, on sait construire un ensemble indépendant maximal en temps asymptotiquement polynômial en le nombre n de sommets avec probabilité tendant vers 1 tant que $\lambda < 2e$, mais la complexité des meilleurs algorithmes connus devient exponentielle dès que $\lambda > 2e$. Tout semble indiquer qu’à l’endroit du seuil se produit une rupture connue en physique statistique sous le nom de *replica symmetry-breaking*, l’espace des solutions se fragmentant brutalement en de multiples composantes connexes déconnectées correspondant à des solutions optimales radicalement différentes. L’étude rigoureuse de la convergence des croyances sur des graphes exhibant de tels comportements remarquables et la formalisation – à l’aide d’outils sans-doute très proches de ceux développés en percolation – du lien précis existant entre la complexité algorithmique d’un problème de théorie des graphes et l’étendue typique de l’influence d’une décision individuelle se propageant dans le réseau sous-jacent pourrait se révéler tout-à-fait fascinante.

Résultats déjà obtenus dans le cadre du stage de M2

Nous nous sommes intéressés à la vitesse de convergence des croyances dans le cas que nous avons présenté ici – celui de l’affectation optimale pour des coûts indépendants et uniformément distribués sur $[0, 1]$ – et nous sommes parvenus à établir le résultat contre-intuitif suivant : le nombre d’itérations typiquement requises afin que la configuration adoptée approxime l’optimum cherché avec une précision quelconque fixée reste en réalité borné indépendamment de la taille n du problème, ce qui induit une complexité asymptotique totale seulement quadratique à comparer au $O(n^3)$ du meilleur algorithme exact connu à ce jour (Edmond-Karp)! Plus précisément :

Théorème 4 (Vitesse asymptotique de convergence des croyances).

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[d(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*) \right] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad (8)$$

où la distance utilisée est tout naturellement la proportion d’affectations erronées :

$$d(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*) := \frac{1}{2n} \text{card} \left\{ x \in \mathcal{K}_{n,n}, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(x) \neq \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*(x) \right\}. \quad (9)$$

La première étape de la preuve consistait naturellement à déduire de la convergence locale $\mathcal{K}_{n,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} \mathcal{T}$ que le comportement des croyances sur $\mathcal{K}_{n,n}$ “converge” vers son comportement sur \mathcal{T} . Pour donner un sens rigoureux à cet énoncé, commençons par ré-indexer les sommets de $\mathcal{K}_{n,n}$ par des mots de façon redondante mais plus appropriée à la comparaison des messages entre $\mathcal{K}_{n,n}$ et \mathcal{T} : le mot-vide \emptyset représentera la racine de $\mathcal{K}_{n,n}$ et les entiers $1, 2, \dots, n$ ses n voisins ordonnés par longueur croissante de l’arête qui les relie à elle ; ensuite, par induction, si le mot non-vide v représente le sommet x et si le mot \dot{v} obtenu en supprimant à v sa dernière lettre représente le sommet y , les mots $v.1, v.2, \dots, v.(n-1)$ désigneront les $n-1$ voisins de x distincts de y dans $\mathcal{K}_{n,n}$ ordonnés par longueur croissante de l’arête qui les relie à x . Nous pouvons maintenant énoncer le premier résultat obtenu :

Théorème 5 (Comportement asymptotique des croyances sur $\mathcal{K}_{n,n}$). *Le théorème de représentation de Skohorod (c.f. par exemple [Bil99]) nous autorise à considérer une réalisation presque-sûre de la convergence faible (6). Alors :*

(i) *les messages générés par l'algorithme sur $\mathcal{K}_{n,n}$ à toute étape k donnée convergent en probabilité, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers ceux obtenus à la même étape sur l'arbre limite \mathcal{T} :*

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v \rightarrow \dot{v}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{proba} m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v}). \quad (10)$$

(ii) *la décision à la racine déduite de ces messages converge vers la décision associée aux messages de l'arbre limite :*

$$\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(\emptyset) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{proba} \pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset). \quad (11)$$

Cela nous conduit naturellement à la seconde partie de notre étude : l'analyse directe de la propagation des croyances sur l'arbre infini limite \mathcal{T} . Plus précisément, nous aimerions déterminer le comportement asymptotique des messages aléatoires $(m_{\mathcal{T}}^k(i \rightarrow \emptyset))_{i \geq 1}$ parvenant à la racine lorsque le nombre k d'itérations tend vers $+\infty$. Rappelons que ces messages sont définis inductivement par la récurrence :

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, m_{\mathcal{T}}^{k+1}(v \rightarrow \dot{v}) := \inf_{i \geq 1} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^k(v.i \rightarrow v) \right\}. \quad (12)$$

L'invariance spatiale du PWIT assure qu'ils ont à chaque étape k la même distribution dans tout l'arbre. Si F dénote la queue de cette distribution à un instant donné, un calcul immédiat (c.f. [Ald01]) montre que celle obtenue à l'étape suivante par application de (12) est :

$$TF : x \mapsto \exp \left(- \int_{-x}^{+\infty} F(t) dt \right). \quad (13)$$

Cela définit un opérateur T sur l'espace \mathcal{D} des queues de distributions étendues, i.e. des fonctions $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ décroissantes et continues à gauche, et il s'agit maintenant d'étudier sa dynamique. Cette question se trouve englober un problème ouvert soulevé par Aldous dans un ouvrage récent sur le sujet de plus en plus porteur des équations distributionnelles récursives ([Ald05, open problem 62]) : celui du domaine d'attraction de l'unique point-fixe non-dégénéré⁶ de T , à savoir la loi logistique

$$F^* : x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}. \quad (14)$$

Notre second résultat répond partiellement à ce problème ouvert, puisqu'il détermine précisément le comportement asymptotique des itérées successives $(T^k F)_{k \geq 1}$ de l'opérateur T pour une large classe de distributions initiales $F \in \mathcal{D}$ qui inclue en particulier la fonction $t \mapsto \mathbf{1}_{\{t < 0\}}$ correspondant aux messages nuls de notre algorithme :

Théorème 6 (Convergence faible des croyances sur le PWIT). *Pour $F \in \mathcal{D}$, introduisons :*

$$\widehat{F} : x \mapsto x + \ln \left(\frac{F(x)}{1 - F(x)} \right) \in [-\infty, +\infty], \quad (15)$$

⁶C'est-à-dire tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$, étant ainsi la queue d'une v.a. finie p.s.

de sorte que F se réécrit $F = F^* \circ (Id - \widehat{F})$. On suppose qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\widehat{T^{k_0} F}$ est bornée. Alors les suites de fonctions $(\widehat{T^{2k} F})_{k \geq 0}$ et $(\widehat{T^{2k+1} F})_{k \geq 0}$ convergent uniformément sur \mathbb{R} vers des fonctions constantes opposées l'une de l'autre. En particulier, à une constante additive près qui ne modifie en rien la décision $\pi_{\mathcal{T}}^k$ associée, les messages parvenant à la racine lors de l'exécution de l'algorithme sur \mathcal{T} convergent en loi vers la distribution logistique.

La convergence que nous venons d'établir est "faible" en ceci qu'elle concerne seulement la distribution des messages et non les messages eux-mêmes tels qu'ils sont effectivement obtenus une fois les données aléatoirement générées. Avant d'établir la convergence forte, – la seule qui ait réellement un sens du point-de-vue algorithmique – remarquons que l'invariance spatiale du PWIT et l'indépendance des sous-arbres disjoints fournissent un candidat naturel pour la limite, si elle existe, des configurations successives :

Définition 3 (Configuration stationnaire). Notant $\mathcal{V}^* := \mathcal{V} \setminus \{\emptyset\}$, on appelle configuration stationnaire sur un PWIT $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \emptyset, \mathcal{E})$ toute famille $(m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$ de v.a. satisfaisant :

- l'invariance spatiale : les $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}), v \in \mathcal{V}^*$ sont identiquement distribués ;
- l'indépendance des sous-arbres : pour tout $v \in \mathcal{V}^*$, $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v})$ est indépendant des longueurs des arêtes qui ne sont pas dans \mathcal{T}_v et pour tout $v \in \mathcal{V}$ les familles de v.a. $(m_{\mathcal{T}}^*(u \rightarrow \dot{u}))_{u \in \mathcal{T}_{v,i}}$ sont indépendantes lorsque i varie dans \mathbb{N}^* ;
- la stationnarité : $\forall v \in \mathcal{V}^*, m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}) = \inf_{i \geq 1} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^*(v.i \rightarrow v) \right\}$ p.s.

L'existence d'un espace probabilisé $E_1 = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ sur lequel vit un PWIT $\tilde{\mathcal{T}}$ muni d'une telle configuration est assurée par le théorème de consistance de Kolmogorov, mais rien ne garantit a priori la mesurabilité des $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v})$ vis-à-vis de la tribu engendrée par les longueurs des arêtes : la question – soulevée par Aldous dans [Ald01] puis généralisée dans [Ald05] – est de savoir si l'influence de la condition extérieure imposée à la frontière au cours de la construction itérative de Kolmogorov disparaît ou non lorsque cette frontière s'éloigne à l'infini. Cette propriété cruciale baptisée endogénéité, intimement liée aux célèbres problèmes d'unicité de mesures de Gibbs sur un graphe infini, se trouve avoir récemment été établie dans le cas qui nous occupe ([Ban02]). Voyons brièvement comment cela a pu nous permettre de démontrer la convergence forte des croyances.

D'abord, on peut sans perdre en généralité décaler d'une constante les croyances initiales et supposer ainsi nulle la constante additive de notre théorème de convergence faible. Celui-ci nous fournit aussitôt, pour tout ε fixé, un entier k_ε tel que $F^*(\cdot + \varepsilon) \leq T^{k_\varepsilon} F \leq F^*(\cdot - \varepsilon)$. Par un résultat classique, on peut représenter presque-sûrement ces inégalités en loi, c'est-à-dire qu'il existe un espace probabilisé $E_2 = (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ sur lequel sont définies une v.a. X de loi $T^{k_0} F$ et deux v.a. X^-, X^+ de loi F^* vérifiant p.s. $X^- - \varepsilon \leq X \leq X^+ + \varepsilon$. Plaçons-nous alors sur l'espace produit $E_1 \otimes (\bigotimes_{v \in \mathcal{V}} E_2)$ où sont conjointement définis $\tilde{\mathcal{T}}$, sa configuration stationnaire et des copies indépendantes $(X_v^-, X_v, X_v^+)_{v \in \mathcal{V}}$ du triplet (X^-, X, X^+) . Sur $\tilde{\mathcal{T}}$, lançons simultanément trois instances de l'algorithme ne différant que par les croyances initiales :

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, \begin{cases} m_{\tilde{\mathcal{T}}}^{0,-}(v \rightarrow \dot{v}) & := X_v^-; \\ m_{\tilde{\mathcal{T}}}^0(v \rightarrow \dot{v}) & := X_v; \\ m_{\tilde{\mathcal{T}}}^{0,+}(v \rightarrow \dot{v}) & := X_v^+, \end{cases}$$

et comparons les configurations $(m_{\mathcal{T}}^{k,-}(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$, $(m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$ et $(m_{\mathcal{T}}^{k,+}(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$ respectivement obtenues. Les inégalités initiales $X_v^- - \varepsilon \leq X_v \leq X_v^+ + \varepsilon$ se propagent étape après étape, ce qui implique en particulier pour tout entier k :

$$\sup_{s,t \geq k} \mathbb{E} \left[\left| m_{\mathcal{T}}^s(v \rightarrow \dot{v}) - m_{\mathcal{T}}^t(v \rightarrow \dot{v}) \right| \right] \leq 4 \sup_{t \geq k} \mathbb{E} \left[\left| m_{\mathcal{T}}^{t,\pm}(v \rightarrow \dot{v}) - m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}) \right| \right] + 2\varepsilon.$$

Un argument de martingale s'appuyant sur l'endogénéité assure la convergence dans L^2 des v.a. logistiques $m_{\mathcal{T}}^{k,\pm}(v \rightarrow \dot{v})$ vers $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v})$. Il ne reste alors plus qu'à remarquer que :

$$\left(m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v}) \right)_{k \geq 0} \stackrel{(\text{loi})}{=} \left(m_{\mathcal{T}}^{k+k\varepsilon}(v \rightarrow \dot{v}) \right)_{k \geq 0},$$

pour obtenir que la suite $m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v})$ définie sur notre PWIT initial \mathcal{T} est de Cauchy pour la norme L^1 . Il n'est enfin pas difficile de vérifier que les limites $(m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$ forment une configuration stationnaire sur \mathcal{T} , ce qui nous conduit à la convergence forte des croyances :

Théorème 7 (Convergence forte des croyances sur \mathcal{T}). *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \emptyset, \mathcal{E})$ un PWIT. Alors, à une constante additive $\gamma \in \mathbb{R}$ près, les configurations successivement obtenues au cours de l'exécution de l'algorithme sur \mathcal{T} convergent dans L^1 vers la configuration stationnaire :*

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v}) + (-1)^k \gamma \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^1} m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v});$$

De plus, les réponses à la racine successivement associées convergent en probabilité vers la décision associée à cette configuration stationnaire :

$$\pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{proba}} \pi_{\mathcal{T}}^*(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{i \geq 1} \left\{ |\{\emptyset, i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^*(i \rightarrow \emptyset) \right\}.$$

Comme l'illustre le diagramme qui suit, la convergence des croyances sur $\mathcal{K}_{n,n}$ en un nombre d'itérations asymptotiquement constant (flèche du haut) découle finalement de celle que l'on vient d'établir sur l'arbre limite (flèche du bas), de la "continuité" des croyances vis-à-vis de la convergence locale établie par le théorème 5 (flèche de gauche) et de la convergence de l'optimum démontrée par Aldous (flèche de droite).

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k & \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{?} & \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^* \\ \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ \pi_{\mathcal{T}}^k & \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} & \pi_{\mathcal{T}}^* \end{array}$$

Outre les avantages que pourrait offrir l'implémentation de cette nouvelle stratégie performante dans les diverses applications pratiques où la résolution rapide et distribuée de larges instances du problème de l'affectation optimale intervient de manière cruciale, nous espérons que la méthode de preuve utilisée ici pourra, dans une optique plus vaste, constituer un cas d'étude aisément reproductible et systématisable pour la compréhension théorique des phénomènes de convergence des croyances en milieu cyclique et la conception d'algorithmes décentralisés toujours plus efficaces dans un monde où la taille gigantesque des réseaux, la complexité de leur architecture et les modifications locales imprévisibles qui redessinent sans cesse ces structures confèrent aux mécanismes d'émergence et d'organisation spontanée une importance de plus en plus déterminante.

Troisième partie

Mémoire du stage d'informatique de première année : analyse spectrale informatisée de champs d'impulsions aléatoires

Table des Matières

1	Représentation modulaire des flots d'impulsions	20
1.1	Modèle mathématique	20
1.1.1	Représentation formelle des impulsions	20
1.1.2	Ajout ponctuel d'informations	23
1.1.3	Matérialisation des données abstraites	25
1.2	Construction modulaire des signaux	28
1.2.1	Codage de l'information	29
1.2.2	Perturbations au cours de la transmission	33
2	Théorie du calcul spectral	39
2.1	Analyse spectrale classique	39
2.1.1	Formalisme des processus stochastiques	39
2.1.2	Mesure spectrale de puissance	41
2.2	Analyse spectrale étendue	42
2.2.1	Mesure spectrale de Bartlett	43
2.2.2	Formule isométrique fondamentale	47
2.2.3	Exemple : spectres des signaux TH-IR	49
3	Analyse spectrale informatisée	52
3.1	Vue d'ensemble du module implémenté	52
3.1.1	Justification du langage choisi	52
3.1.2	Architecture globale	53
3.1.3	Aspects algorithmiques	55
3.2	Panorama des possibilités offertes	61
3.2.1	Paramétrisation du support vierge initial	62
3.2.2	Spécification du motif de filtrage	64
3.2.3	Choix des différents types de codage	66
3.2.4	Gestion des signatures personnalisées	68
3.2.5	Prise en compte des effets d'altération	70
3.2.6	Outils supplémentaires	72

Introduction

Motivations

La classe extrêmement vaste des champs d'impulsions aléatoires est constituée de l'ensemble des flots d'informations, dans le sens le plus large que l'on pourra donner à ce terme, qui se puissent décomposer d'une façon ou d'une autre en une succession de manifestations ponctuelles identiques dont est seule significative la répartition dans le temps ou l'espace : trains de potentiels d'action au cœur des mécanismes de la communication nerveuse, configuration géométrique aléatoirement adoptée par des particules ponctuelles en physique statistique, disposition spatiale des noeuds dans un réseau informatique, modèles économiques prévoyant la répartition temporelle des accidents pour une compagnie d'assurances...

L'omniprésence de ce type de flots aléatoires d'information, dans tous les domaines, justifie la nécessité d'en étudier les propriétés statistiques, et en particulier celles du second ordre, liées comme on le verra dans le cas électromagnétique à l'énergie véhiculée.

Une telle analyse est tout particulièrement motivée par la nécessité actuelle de concevoir de nouveaux systèmes de communication sans fil à large débit et haute résolution basés sur l'émission de séquences d'impulsions extrêmement brèves. Les perspectives alléchantes qu'offre en effet l'idée d'étaler l'énergie transmise sur une bande de fréquences aussi large que possible (on parle d'Ultra Wide Band) suscitent depuis une dizaine d'année un intérêt qui ne cesse de croître, et les chercheurs s'interrogent aujourd'hui sur le choix d'un codage impulsif optimisant le rapport entre la qualité de la transmission et le coût énergétique impliqué compte-tenu des effets d'altération inhérents au milieu de propagation et des contraintes officielles régularisant l'utilisation de la bande de fréquences (à cause des interférences entre les différents canaux). C'est donc plus particulièrement à l'analyse spectrale de puissance des processus ponctuels que nous allons nous intéresser ici, c'est à dire à la manière dont l'énergie que véhiculent les impulsions aléatoires se répartit statistiquement le long de la bande des fréquences.

Problématique

Dans la perspective de simplifier l'étude des champs d'impulsions aléatoires, il est intéressant de constater que l'on peut aborder d'une manière modulaire la grande majorité d'entre ces derniers en les décrivant comme le résultat d'un certain nombre d'opérations simples (déplacement ou suppression aléatoire de points, modulation, filtrage...) sur une séquence d'événements élémentaires la plus régulière possible. Toutefois, l'impossibilité jusqu'ici de tirer profit de cette approche modulaire en isolant l'influence de chacune de ces transformations sur le spectre final oblige à recommencer tous les calculs depuis le début à chaque petite

modification apportée, et la complexité des signaux utilisés rend bien souvent cette tâche impossible. Seul le recours à quelques astuces de calcul au cas par cas et à la main pour faire apparaître par identification le spectre recherché permet dans les situations les plus favorables d'aboutir à une formule particulière. Tout espoir d'informatiser l'analyse spectrale théorique se voit ainsi condamné par l'absence de résultats suffisamment généraux, et les ingénieurs ont donc été contraints de délaissier la prévision spectrale basée sur ces modèles mathématiques aléatoires pour lui préférer la mesure expérimentale directe, pourtant coûteuse, exhaustive et entachée d'erreurs, des caractéristiques énergétiques de chaque nouveau prototype envisagé.

Cependant, des résultats théoriques récents, dus en particulier à P.BRÉMAUD, L.MASSOULIÉ et A.RIDOLFI (c.f. [PBR05]), ont permis l'élaboration d'un cadre mathématique unifiant l'ensemble des processus intermédiaires obtenus au terme des différentes transformations précédemment mentionnées ainsi que l'exhibition de la formule isométrique fondamentale permettant de calculer cette mesure spectrale étendue pour l'un quelconque d'entre eux en fonction de celle du processus dont il dérive et des caractéristiques spectrales de la transformation subie. Dès lors, l'analyse spectrale de signaux même compliqués devient possible de manière modulaire et l'implémentation d'un analyseur spectral informatisé redevient envisageable : le spectre d'un signal résultant d'une succession quelconque de transformations simples à partir d'un processus ponctuel de base s'obtient simplement en calculant le spectre étendu du processus de base puis en appliquant successivement la formule isométrique fondamentale pour chaque transformation effectuée, les diverses contributions de chacune au résultat final étant désormais isolables indépendamment les unes des autres.

Déroulement du stage

Mon stage s'est déroulé du 10 juin au 5 août au Laboratoire de Communications et d'AudioVisuel du Département Informatique & Communication de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, sous la direction de PIERRE BRÉMAUD et ANDREA RIDOLFI. Il s'agissait pour moi de lire et de comprendre la thèse [Rid05] puis d'en exploiter ensuite le contenu théorique afin d'accomplir un premier pas en direction de l'analyse spectrale informatisée : implémenter une boîte à outil Matlab directement utilisable par les concepteurs de systèmes de télécommunications pour calculer et représenter les spectres prévisionnels des signaux auxquels aboutiront leurs esquisses, la description de ces derniers devant pouvoir se faire de manière modulaire en spécifiant progressivement les diverses opérations dont ils résultent et les effets indésirables auxquels ils sont susceptibles d'être soumis.

Ce premier contact avec la recherche m'a laissé libre de prendre toute initiative tout en me forçant à instaurer une collaboration véritablement trans-disciplinaire, aussi bien en amont auprès des mathématiciens rendant possible une telle implémentation qu'en aval afin d'adapter le logiciel aux besoins des ingénieurs en technologies des systèmes avancés, me laissant ainsi entrevoir les attraits d'un travail à l'intersection de plusieurs domaines scientifiques.

Il m'a fallu d'abord m'acquitter d'une longue tâche de documentation : champs impulsionsnels, formalisme des processus stochastiques, mesure spectrale de Bochner, processus ponctuels marqués, mesures d'intensité et de covariance, mesure spectrale de Bartlett, formule isométrique fondamentale, principes de la communication sur Ultra Wide Band, etc. Il m'a fallu ensuite calculer à la main les spectres étendus de divers processus ponctuels de base et appliquer la formule isométrique fondamentale aux transformations classiquement utilisées en télécommunication pour en dériver des résultats explicites. Spectres de bases et formules

de transformations m'ont alors permis d'implémenter enfin une boîte à outils Matlab automatisant le calcul modulaire puis la représentation graphique du spectre de n'importe quel signal obtenu à partir d'un processus de base paramétrable et d'opérations variées spécifiées par l'utilisateur, les paramètres par défaut ayant été calibrés avec soin sur les signaux standards utilisés en pratique au terme de plusieurs discussions avec un ingénieur spécialisé en télécommunications.

Mon logiciel et sa documentation ont été mis en ligne⁷ et sont téléchargeables sous licence GPL. Je suis par ailleurs invité à venir en faire la présentation à l'EPFL à la rentrée.

Organisation du rapport

La structure du rapport est le reflet chronologique direct du déroulement de ce stage et se veut révélatrice de la réelle intercomplémentarité des différentes disciplines à l'intersection desquelles il a fallu se placer.

Le premier chapitre est consacré à la description de la structure profondément modulaire des champs aléatoires d'impulsions tels qu'ils sont en pratique conçus, et à la manière de représenter mathématiquement ces derniers d'une façon qui préserve cette remarquable organisation structurale. Bien que la conception qui y est donnée du signal puisse également s'appliquer tant à la communication nerveuse au sein de l'organisme qu'à tout autre mode de transport impulsionnel d'informations, une attention toute particulière est néanmoins accordée à la télécommunication sur Ultra Wide Band, principale motivation actuelle de la recherche en analyse spectrale.

Le seconde chapitre s'efforce quant-à lui de développer les outils mathématiques utilisés pour extraire de ces représentations formelles les propriétés énergétiques qui nous intéressent. Y sont exposées la théorie classique de l'analyse spectrale en communication, ainsi que ses limites et la manière dont les résultats mathématiques récents ont su répondre à la nécessité pratique de s'affranchir de ces dernières en offrant à l'informatique l'opportunité de tirer pleinement profit de la profonde modularité structurale des signaux.

Enfin, l'intervention informatique étant dès lors rendue possible, un troisième chapitre décrit le travail d'implémentation personnellement effectué et les résultats obtenus, en mettant en lumière la correspondance directe existant entre l'algorithme utilisé et les formules mathématiques sur lesquelles il se fonde ainsi que la manière dont l'approche physique modulaire a été transposée jusque dans l'utilisation même du programme.

⁷<http://lcavwww.epfl.ch/software/pulsespectra/index.html>

Chapitre 1

Représentation modulaire des flots d'impulsions

La vaste catégorie des champs aléatoires d'impulsions regroupe, nous l'avons vu en introduction, tous les moyens dont l'Information dispose pour se matérialiser en la répartition significative d'une succession d'évènements ponctuels identiques. Afin d'analyser de manière systématique les données pertinentes qui en peuvent être extraites, il est d'abord fondamental d'offrir à ces champs impulsionsnels un modèle mathématique unifié qui en transcrive le plus fidèlement possible toutes les propriétés. Deux questions se posent alors naturellement : comment, en premier lieu, représenter mathématiquement les impulsions aléatoires de manière simple, unifiée et adaptée à leur analyse spectrale ultérieure ? Par quel moyen, ensuite, traduire dans le langage formel ainsi conçu les transformations modulaires auxquelles sont en pratique soumises ces impulsions ? Nous commençons par définir un certain nombre d'objets mathématiques formels (section 1) nous permettant de modéliser efficacement les impulsions aléatoires et de caractériser les modifications individuelles que celles-ci peuvent éventuellement subir. Nous utilisons ensuite (section 2) ces objets abstraits et les opérations mathématiques qui s'y appliquent pour décrire de manière modulaire les signaux impulsionsnels sur lesquels porte notre étude.

1.1 Modèle mathématique

Du point de vue d'un observateur n'ayant pas connaissance de l'information à transmettre, un signal est une grandeur indéterminée susceptible à priori de prendre différentes valeurs. Il est par conséquent naturel que les modélisations intervenant dans le cadre de notre étude soient fondamentalement marquées par l'aléatoire ; la théorie générale de la mesure et des probabilités (se référer par exemple à [Gal03]) occupera donc dans les chapitres qui suivent une place prédominante.

1.1.1 Représentation formelle des impulsions

Dans toute la suite, on considère un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et un espace mesurable (E, \mathcal{E}) . On notera $M(E)$ l'ensemble des mesures (positives) sur (E, \mathcal{E}) et $\mathcal{M}(E)$ la tribu sur $M(E)$ engendrée par les applications coordonnées $p_C : \mu \mapsto \mu(C)$, $C \in \mathcal{E}$.

Définition 4 (mesure aléatoire). *On appelle mesure aléatoire sur (E, \mathcal{E}) toute variable aléatoire N à valeurs dans $(M(E), \mathcal{M}(E))$. Pour ω fixé, $N(\omega)$ est donc une certaine mesure sur (E, \mathcal{E}) . Si, pour tout $\omega \in \Omega$, la mesure $N(\omega)$ est une mesure localement finie¹ la mesure aléatoire N elle-même sera dite localement finie.*

Remarque 1. *Si N est une mesure aléatoire sur (E, \mathcal{E}) , alors $N(C)$ est une variable aléatoire pour tout $C \in \mathcal{E}$ (c'est en effet la composition des applications mesurables p_C et N).*

Définition 5 (mesure aléatoire stationnaire). *On se place dans $E = \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne. Une mesure aléatoire N sur (E, \mathcal{E}) est dite stationnaire² lorsque pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tous boréliens B_1, \dots, B_p , la loi de $(N(B_1 + t), \dots, N(B_p + t))$ est indépendante de $t \in \mathbb{R}^d$.*

Définition 6 (processus ponctuel). *Soit N une mesure aléatoire sur (E, \mathcal{E}) . Si, pour tout $\omega \in \Omega$, la mesure $N(\omega)$ est à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}$, on dit que N est un processus ponctuel sur (E, \mathcal{E}) . Ce dernier est dit simple lorsque, de plus, \mathcal{E} contient tous les singletons sur E et que :*

$$\forall \omega \in \Omega, \forall a \in E, N(\omega)(\{a\}) = 0 \text{ ou } 1. \quad (1.1)$$

Remarque 2. *Un processus ponctuel simple N sur (E, \mathcal{E}) peut être représenté de manière équivalente par la partie aléatoire*

$$\{a \in E; N(\{a\}) = 1\},$$

que l'on notera N ; on a alors :

$$\forall C \in \mathcal{E}, N(C) = \text{card}(N \cap C). \quad (1.2)$$

Intuitivement, un processus ponctuel simple peut donc être également vu comme une collection aléatoire de points de E représentant les positions des évènements ponctuels auxquels on s'intéresse. Lorsque N est localement finie, cette partie est même au plus dénombrable et peut donc être représentée sous forme d'une suite, comme nous allons le voir.

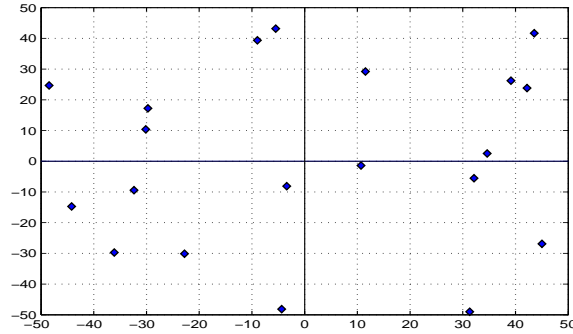


FIG. 1.1 – Réalisation particulière d'un processus ponctuel simple sur \mathbb{R}^2

¹c'est à dire finie sur tout compact, ce qui implique bien sûr que E soit muni d'une topologie et que \mathcal{E} soit la tribu des boréliens associés.

²Nous donnerons dans le chapitre 3 une interprétation physique de cette notion

Dans toute la suite, on supposera que (E, \mathcal{E}) est un espace métrique complet et séparable muni de sa tribu borélienne. Le résultat qui suit est aisé à prouver lorsque $E = \mathbb{R}$, cas qui suffit amplement à nos besoins. Une démonstration générale pourra néanmoins être trouvée dans [Kal83] (lemme 2.3)

Proposition 1 (représentation séquentielle). *Soit N un processus ponctuel simple et localement fini sur (E, \mathcal{E}) et soit Δ un nouveau symbole n'appartenant pas à E . Alors il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $E \cup \{\Delta\}$ muni de la tribu engendrée par $\mathcal{E} \cup \{\{\Delta\}\}$ telle que :*

$$N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n} \quad (1.3)$$

où ε_a est la mesure de Dirac en a si $a \in E$ et la mesure nulle si $a = \Delta$.

En d'autres termes, un processus ponctuel simple et localement fini sur un espace métrique séparable et complet muni de sa tribu borélienne peut être également représenté par une suite discrète de points aléatoires de E , le symbole Δ ayant pour seule utilité de compléter la suite dans le cas où la partie aléatoire est finie. Cette représentation sera tout particulièrement adaptée à la description des champs d'impulsions aléatoires, la position de chacune de ces dernières correspondant à un point T_n .

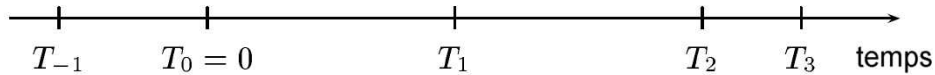
Remarque 3. *Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on peut même ordonner une telle partie aléatoire (Δ étant remplacé par $\pm\infty$) : plus précisément, il existe une unique suite $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ telle que :*

i) $T_0 \leq 0 < T_1$ (convention)

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}, (|T_n| < \infty \Rightarrow T_n < T_{n+1})$

iii) $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} T_n = -\infty \end{cases}$

iv) $\forall B \in \mathcal{B}, N(B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 1_B(T_n) = \text{card}(B \cap \{T_n; n \in \mathbb{Z}\})$



C'est précisément cette dernière représentation très intuitive que nous utiliserons dans la suite pour décrire les positions aléatoires de nos impulsions. Nous terminons cette section par quelques exemples de processus ponctuels simples et localement finis d'intérêt particulier dans notre étude.

Exemple 1 (processus de renouvellement). *Un processus de renouvellement N sur \mathbb{R} est un cas particulier de processus ponctuel simple et localement fini, de représentation séquentielle $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, tel que les variables aléatoires*

$$S_n \triangleq T_{n+1} - T_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

appelées durées interstitielles du processus de renouvellement, sont i.i.d. et indépendantes de (T_0, T_1) . On peut montrer ([BMrs], thorme3.1p.71) qu'il est stationnaire si et seulement si $E[S_1] < \infty$ et

$$\forall t \geq 0, P(T_0 \leq t) = P(-T_1 \leq t) = \frac{1}{E[S_1]} \int_0^t (1 - P(S \leq u)) du. \quad (1.4)$$

C'est l'exemple le plus répandu et le plus important ici.

Exemple 2 (grille régulière sur \mathbb{R}). La grille régulière sur \mathbb{R} est le plus simple des processus de renouvellement stationnaires. Elle correspond au cas où les durées interstitielles sont constantes; les points sont alors régulièrement espacés sur la droite réelle :

$$N = \{U + n \times t_s; n \in \mathbb{Z}\}$$

où t_s est la période élémentaire et U une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, t_s]$ qui rend aléatoire l'origine de la grille et garantit ainsi la stationnarité du processus (nous en verrons plus loin l'intérêt). Une telle régularité fait de ce processus le support initial privilégié dont nous partirons pour ensuite coder par diverses transformations les informations que nous voudrions lui faire transporter.

Exemple 3 (processus de Poisson homogène). Un processus de Poisson N d'intensité $\lambda > 0$ est un cas particulier de processus de renouvellement sur \mathbb{R} dont les durées interstitielles suivent la loi exponentielle de paramètre λ : autrement dit, elles admettent la densité :

$$f_S(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

C'est le modèle économique privilégié pour les séquences d'évènements rares : accidents à prendre en charge par une compagnie d'assurance, arrivées des clients dans un service quelconque, etc.

1.1.2 Ajout ponctuel d'informations

Un processus ponctuel est donc la représentation, sous forme de points aléatoires, des évènements ponctuels dont on désire modéliser la séquence. Pour formaliser ensuite les différentes transformations subies en pratique par ces impulsions aléatoires, il est intéressant de pouvoir accompagner individuellement chacune d'elle d'un lot d'informations spécifiques.

Définition 7 (processus ponctuel marqué). Soit N un processus ponctuel simple et localement fini sur (E, \mathcal{E}) . Conformément à la proposition 1, on peut voir N comme la mesure de comptage relative à une partie aléatoire :

$$\forall C \in \mathcal{E}, N(C) = \text{card}(C \cap \{T_n; n \in \mathbb{Z}\}).$$

Soit maintenant (K, \mathcal{K}) un autre espace mesuré. On se donne une famille $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires (les marques) à valeurs dans (K, \mathcal{K}) . La mesure aléatoire sur $E \times K$ (muni de la tribu produit $\mathcal{E} \otimes \mathcal{K}$) définie par

$$\bar{N}(C \times L) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_C(T_n) \mathbf{1}_L(Z_n) = \text{card}((C \times L) \cap \{(T_n, Z_n); n \in \mathbb{Z}\})$$

est un processus ponctuel simple sur $E \times K$ (muni de la tribu produit) appelé processus ponctuel marqué de base N et de marques $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Exemple 4 (processus ponctuel marqué avec marques i.i.i.d.). *Un cas particulier intéressant dans le cadre de notre étude est celui où les marques sont indépendantes entre elles, indépendantes du processus de base N et identiquement distribuées (i.i.i.d.). Si N est stationnaire, le processus ponctuel simple \tilde{N} ainsi obtenu est alors lui aussi stationnaire.*

Intuitivement, un processus ponctuel marqué sur (E, \mathcal{E}) correspond donc à une séquence de couples formés d'un point aléatoire T_n de E et de l'information aléatoire Z_n qui lui est associée. C'est la notion fondamentale dans le cadre de l'approche modulaire que nous voulons donner du signal tel qu'il est conçu en télécommunications : les marques vont nous permettre par la suite de décrire formellement aussi bien les transformations destinées à moduler le signal en fonction de l'information à transmettre que les différentes formes d'altération éventuellement subies par ce dernier au cours de sa transmission.

Néanmoins, ce modèle ne constitue à vrai dire qu'une représentation purement abstraite de l'information véhiculée, sous la forme d'une collection aléatoire de points enrichis d'une éventuelle information. Il correspond mal à l'intuition physique d'un signal analogique véritable, à savoir une grandeur aléatoire qui varie au cours du temps. Tout au plus pourrait-on utiliser le symbolisme des distributions de Dirac pour donner à un processus ponctuel simple et localement fini sur E la forme symbolique d'un peigne d'impulsions :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - T_n)$$

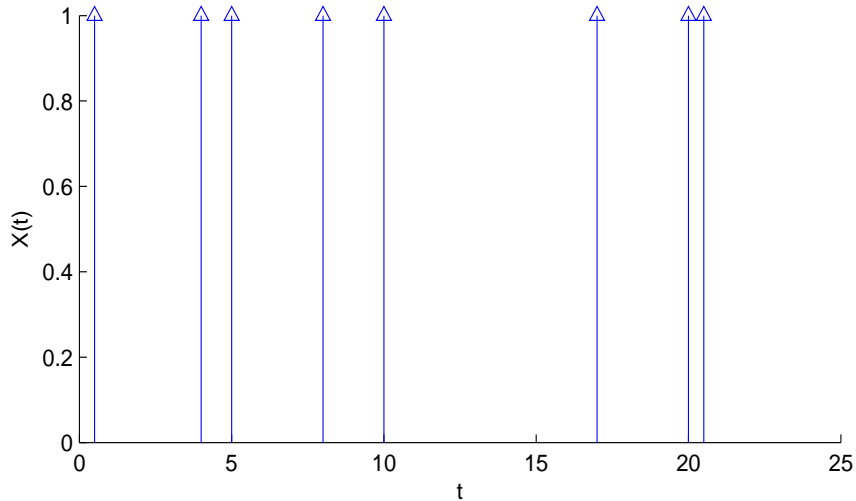


FIG. 1.2 – représentation symbolique sous forme d'un peigne d'impulsions

En fait, pour des signaux physiques véritables, le modèle classique est celui de processus stochastique, sur lequel nous reviendrons plus longuement dans la deuxième partie du rapport :

Définition 8 (processus stochastique à valeurs complexes). *Soit T un espace quelconque³. On appelle processus stochastique à valeurs complexes toute famille $(X(t))_{t \in T}$ de variables aléatoires complexes.*

³L'espace des temps : \mathbb{R}^d ou \mathbb{Z} en général

Pour un ω donné, l'application $x_\omega : t \mapsto X_t(\omega)$ représente alors une réalisation physique possible du signal.

Lorsque $T = \mathbb{R}^d$ ou \mathbb{Z} et que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(t_1, \dots, t_p) \in T^p$, la loi de $(X(t_1 + s), \dots, X(t_p + s))$ est indépendante de $s \in T$, le processus stochastique $(X(t))_{t \in T}$ est dit stationnaire.

Pour passer du formalisme des processus ponctuels à cette forme définitive, il faut donc offrir un support physique aux impulsions ponctuelles aléatoires et y incruster par la même occasion les informations qui auront éventuellement été associées par marquage à chaque point impulsif. C'est l'objet de la section qui suit.

1.1.3 Matérialisation des données abstraites

L'opération mathématique qui donne corps aux informations contenues dans un processus ponctuel marqué est la convolution impulsifonnelle ; sa définition nécessite toutefois l'introduction préalable de quelques résultats concernant l'intégration par rapport à un processus ponctuel.

Intégration par rapport à un processus ponctuel

Lemme 1.1.1. *Soit N un processus ponctuel sur (E, \mathcal{E}) et soit $\varphi : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ une fonction mesurable positive. Alors*

$$N(\varphi) \triangleq \int_E \varphi(s) N(ds)$$

est une variable aléatoire positive.

Démonstration. C'est en effet trivial si $\varphi = 1_C$ ($C \in \mathcal{E}$) et l'on conclut au résultat général par les arguments classiques de linéarité puis de densité. \square

Remarque 4. *Dans le cas où N est un processus ponctuel simple et localement fini représenté par la séquence de points $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, cette intégrale se réécrit sous la forme plus intuitive d'une somme discrète⁴ :*

$$N(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(T_n) \tag{1.5}$$

Définition 9 (processus ponctuel du premier ordre). *Soit N un processus ponctuel simple et localement fini sur (E, \mathcal{E}) . N est dit du premier ordre si et seulement si, pour tout compact C dans \mathcal{E} , $E[N(C)] < \infty$.*

Définition 10 (mesure d'intensité). *Soit N un processus ponctuel sur (E, \mathcal{E}) . L'application⁵ $\nu : \mathcal{E} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$*

$$C \longmapsto E[N(C)]$$

définit une mesure sur (E, \mathcal{E}) appelée mesure d'intensité de N .

Remarque 5. *Lorsque $E = \mathbb{R}^d$ et que N est du premier ordre et stationnaire, ν est une mesure localement finie sur \mathbb{R}^d invariante par translation : il existe par conséquent un réel positif λ tel que*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \nu(B) = \lambda l^d(B), \tag{1.6}$$

⁴La somme ne s'étend bien sûr qu'aux $T_n \neq \Delta$.

où l^d désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . La constante λ est alors appelée intensité du processus ponctuel : elle correspond intuitivement au nombre moyen de points du processus par unité de volume.

Remarque 6. Dans le cas d'un processus ponctuel marqué \bar{N} à marques i.i.i.d., la mesure d'intensité $\bar{\nu}$ s'exprime facilement à l'aide de celle ν du processus de base et de la loi commune Q_Z des marques :

$$\forall(C, L) \in \mathcal{E} \times \mathcal{K}, \bar{\nu}(C \times L) = \nu(C) \times Q_Z(L) \quad (1.7)$$

Le théorème simple et intuitif qui suit rendra légitime la définition de la convolution impulsionnelle.

Théorème 1 (Campbell). Soit N un processus ponctuel sur E de mesure d'intensité ν . Alors pour toute fonction mesurable $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ positive ou dans $L^1_{\mathbb{C}}(\nu)$, l'intégrale $N(\varphi)$ est presque sûrement bien définie⁶ et :

$$E \left[\int_E \varphi(s) N(ds) \right] = \int_E \varphi(s) \nu(ds) \quad (1.8)$$

Démonstration. Là encore, le cas $\varphi = 1_C$, $C \in \mathcal{E}$ est trivial (c'est la définition même de ν), et entraîne par linéarité et densité celui de toute fonction mesurable positive (le membre de gauche étant toujours bien défini grâce au lemme 1.1.1). Le résultat est alors aisément étendu à $L^1_{\mathbb{C}}(\nu)$ en décomposant φ en φ^+ et φ^- . \square

Remarque 7. Dans le cas d'un processus ponctuel marqué \bar{N} sur $(E \times K, \mathcal{E} \otimes \mathcal{K})$, de base N et de marques $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.i.d., l'égalité de Campbell prend grâce à la remarque 6 la forme particulière :

$$E \left[\int_{E \times K} \varphi(s, z) \bar{N}(ds \times dz) \right] = \int_E E[\varphi(s, Z_0)] \nu(ds) \quad (1.9)$$

où $\varphi : E \times K \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction quelconque dont l'intégrale par rapport à $\bar{\nu} = \nu \times Q_Z$ est bien définie⁷.

Dans toute la suite, $E = \mathbb{R}^d$. La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème de Campbell et de la remarque 5.

Proposition 2. Soit N un processus ponctuel stationnaire et du premier ordre sur \mathbb{R}^d et $h \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, la variable aléatoire

$$\int_E h(t - s) N(ds)$$

est presque sûrement bien définie.

Nous pouvons maintenant définir la convolution impulsionnelle.

⁶Éventuellement infinie dans le cas où φ est seulement supposée positive

⁷ φ est soit mesurable positive soit dans $L^1_{\mathbb{C}}(\nu \times Q_Z)$

Convolution impulsionnelle

Définition 11 (convolution impulsionnelle). Soit N un processus ponctuel stationnaire et du premier ordre sur E . On se donne un support de filtrage $h \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$. La famille $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ de variables aléatoires à valeurs complexes presque sûrement bien définies⁸ par :

$$X(t) \triangleq \int_E h(t-s)N(ds) \quad (1.10)$$

est un processus stochastique stationnaire à valeurs complexes. On dira que c'est le résultat de la convolution impulsionnelle de N par h .

Remarque 8. Dans le cas où N est en outre simple et localement fini, on peut comme tout à l'heure réécrire cette intégrale sous la forme :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - T_n) \quad (1.11)$$

L'effet de la convolution impulsionnelle devient alors beaucoup plus intuitif : chaque impulsion est remplacée par le motif $t \mapsto h(t)$ décalé jusqu'à la même position, et le processus ponctuel est bien transformé ainsi en un signal physique réaliste, comme l'illustre la figure 1.3.

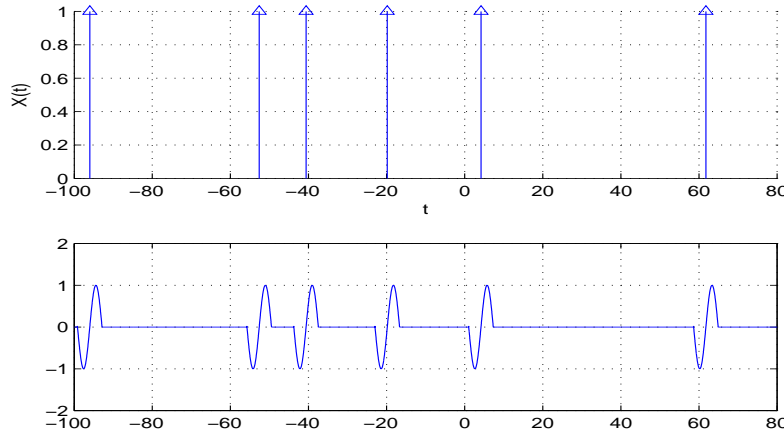


FIG. 1.3 – effet de la convolution impulsionnelle ($h(t) = \sin(t) \cdot 1_{[-\pi, \pi]}(t)$)

Les processus ponctuels à marques i.i.i.d. dont la base est un processus ponctuel simple, localement fini, du premier ordre et stationnaire sont un cas particulier de processus ponctuel simple, stationnaire et du premier ordre. La convolution impulsionnelle s'applique donc également à ces derniers :

$$X(t) = \int_{E \times K} h(t-s, z) \bar{N}(ds \times dz) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - T_n, Z_n) \quad (1.12)$$

⁸D'après la proposition 2

Cette dernière formule résume à elle seule tout l'intérêt du marquage des processus ponctuels : faire dépendre d'un (ou plusieurs) paramètre(s) aléatoire(s) le motif h donnant individuellement forme aux impulsions et offrir ainsi un support physique à l'information spécifique affectant chacun des points du processus.

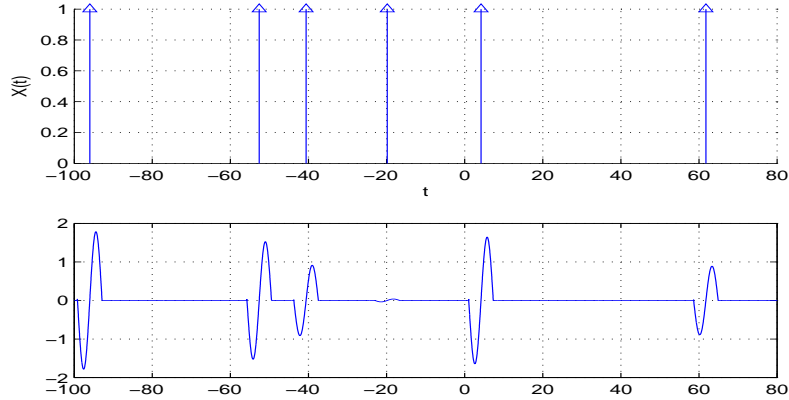


FIG. 1.4 – exemple de convolution impulsionnelle d'un processus marqué : les marques aléatoires associées aux points font ici varier l'amplitude du motif h

Remarque 9. Si l'on voit N comme le peigne de diracs :

$$\Delta_N(t) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - T_n)$$

alors la convolution impulsionnelle correspond formellement au produit de convolution du peigne par la réponse impulsionnelle h , d'où son nom. En effet :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - T_n) = \int_E h(t - s) \Delta_N(s) ds = (h * \Delta_N)(t)$$

1.2 Construction modulaire des signaux

Malgré la complexité et l'extrême diversité des champs impulsionnels destinés à véhiculer de l'information, qu'ils soient biologiques, informatiques ou électromagnétiques, une approche modulaire unifiée est néanmoins possible et simplifie grandement leur étude : on peut en effet en décrire la grande majorité comme le résultat de la composition de plusieurs transformations physiques simples – que celles-ci soient recherchées (codage des informations) ou accidentelles (perturbations aléatoires au cours de la transmission via le canal physique) – sur une séquence d'impulsions de base. Le cadre mathématique développé au chapitre précédent épouse parfaitement cette structure modulaire et en rend la description formelle extrêmement simple.

Les champs d'impulsions sont représentés par des processus ponctuels simples et localement finis et les transformations par des marques. Ainsi, si l'on applique une certaine transformation, codée par une famille de marques $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, à un champ d'impulsions quelconque

représenté par un processus N , le modèle du champ obtenu est simplement le processus marqué \tilde{N} de base N et de marques $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Ce dernier est lui-même un processus ponctuel (sur un espace produit) et peut à ce titre recevoir les marques d'une nouvelle opération... À mesure que les transformations se succèdent, les marques s'accumulent ainsi progressivement sur les points du processus initial régulier et y impriment les informations nécessaires. Un ultime filtrage (convolution impulsionnelle du dernier processus marqué) leur donnera finalement corps en produisant le processus stochastique résultant de la chaîne de transformations subies. Cette représentation établit donc un véritable morphisme entre le monde physique des flots d'informations et l'univers mathématique des processus marqués ; elle transpose d'une structure à l'autre, de façon compatible, les lois de composition internes qui y agissent respectivement.

1.2.1 Codage de l'information

Qu'il s'agisse de communication nerveuse au sein de l'organisme, d'impulsions binaires utilisées en informatique ou de télécommunications sans fil à l'échelle planétaire, l'objectif fondamental reste avant tout la transmission d'informations significatives. Le support de base, représenté par le processus ponctuel N correspondant⁹ doit donc être en premier lieu transformé de manière à intégrer l'information à émettre. Les évènements que l'on modélise ici se produisant dans le temps, on se restreindra dans ce chapitre au cas $E = \mathbb{R}$. Les résultats s'étendent néanmoins sans difficultés à \mathbb{R}^d .

Modulation d'amplitude

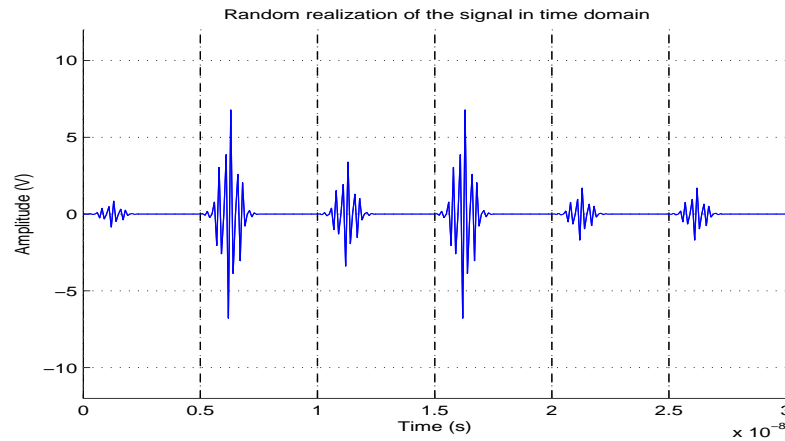


FIG. 1.5 – modulation impulsionnelle d'amplitude

Une première façon de coder cette information est d'introduire une variation de l'amplitude des impulsions régulières : c'est la modulation impulsionnelle d'amplitude, extrêmement répandue en télécommunications. Marquons donc notre processus ponctuel initial N à l'aide d'une séquence $(Z_n^A)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires i.i.i.d. représentant les valeurs des facteurs

⁹Grille régulière d'impulsions sur \mathbb{R} par exemple.

multiplicatifs qui s'appliquent aux différentes impulsions¹⁰. Encore une fois, ces marques ne font que coder dans \bar{N} l'information caractérisant la transformation. Pour leur donner ensuite véritablement la forme qui convient, c'est à dire ici une modification de l'amplitude des symboles, il faudra lors du filtrage final utiliser le motif de filtrage

$$h : (t, z) \mapsto z \times \omega(t),$$

où ω est le motif de filtrage¹¹ de base dont on désire moduler l'amplitude. Le signal résultant d'une telle convolution impulsionnelle sera alors :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Z_n^A \omega(t - T_n),$$

où $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la représentation séquentielle du processus ponctuel stationnaire simple et localement fini N correspondant au support impulsionnel de base. La figure 1.5 montre l'allure du signal $X(t)$ obtenu.

Dans le cas plus général où le processus N que l'on désire transformer a déjà subi d'autres modifications par marquage, le motif ω est remplacé par une fonction de filtrage h dépendant d'un certain nombre de marques $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. La famille $(Z_n^A)_{n \in \mathbb{Z}}$ codant la transformation en cours vient alors à son tour décorer ce processus déjà marqué :

$$N = \{(T_n, Z_n); n \in \mathbb{Z}\}$$

pour former le processus résultant

$$\bar{N} = \{((T_n, Z_n), Z_n^A); n \in \mathbb{Z}\}$$

Dans le but de retomber sur la même forme qu'initialement, nous identifierons ce dernier, grâce à l'isomorphisme $(\mathbb{R} \times K_1) \times K_2 \equiv \mathbb{R} \times (K_1 \times K_2)$, avec le processus marqué :

$$\bar{N} = \{(T_n, (Z_n, Z_n^A)); n \in \mathbb{Z}\}$$

La nouvelle fonction de filtrage \bar{h} s'appliquant à \bar{N} s'exprime alors en fonction de celle qui devait initialement filtrer N :

$$\bar{h} : ((t, z), z^A) \mapsto z^A \times h(t, z) \tag{1.13}$$

et le processus qui en résulte prend la forme plus générale :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Z_n^A h(t - T_n, Z_n). \tag{1.14}$$

Nous conserverons ces notations tout au long du chapitre.

¹⁰La distribution commune de ces variables aléatoires doit bien entendu être révélatrice de la probabilité d'occurrence réelle des différents symboles transmis en pratique.

¹¹Fonction rectangulaire, triangulaire, gaussienne, etc.

Modulation de position

Plutôt que de jouer sur l'amplitude du motif, il est également possible de coder l'information dans le temps, comme c'est d'ailleurs le cas pour le système nerveux. Dans la modulation de position utilisée en télécommunications, c'est ainsi le déplacement relatif Z_n^P de chaque impulsion n par rapport à une grille régulière $\{U + n \times t_S; n \in \mathbb{Z}\}$ qui est significatif. Si l'on désire appliquer cette transformation à un processus initial $N = \{(T_n, Z_n); n \in \mathbb{Z}\}$ que l'on avait prévu de filtrer par une fonction h , le processus marqué qui en résulte et le nouveau filtrage qu'il faudra lui appliquer sont alors donnés par

$$\begin{cases} \bar{N} \triangleq \{(T_n, (Z_n, Z_n^P)); n \in \mathbb{Z}\} \\ \bar{h} : ((t, z), z^P) \mapsto h(t - z^P, z) \end{cases} \quad (1.15)$$

Le signal obtenu, résultat de la convolution impulsionnelle du processus ponctuel marqué \bar{N} de base N et de marques i.i.i.d. $(Z_n^P)_{n \in \mathbb{Z}}$ par le motif de filtrage \bar{h} est alors :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - T_n - Z_n^P, Z_n). \quad (1.16)$$

Une variante de ce codage positionnel récemment introduite dans les systèmes de communi-

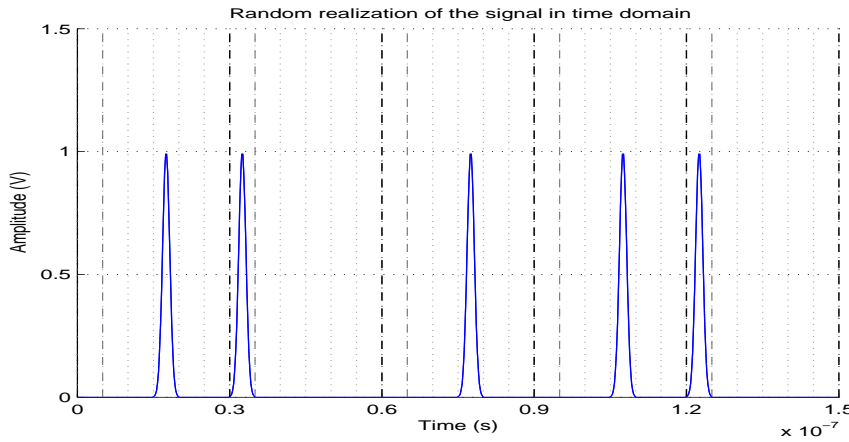


FIG. 1.6 – modulation impulsionnelle de position

tion optiques consiste à considérer non plus le déplacement relativement à une grille régulière mais la durée absolue séparant deux impulsions consécutives (on parle alors de modulation différentielle de position); ce type de codage s'intègre aisément dans notre modèle : il suffit de remplacer la grille régulière par un processus de renouvellement (exemple 1) de distribution appropriée.

Modulation de forme

Outre la position et l'amplitude du motif, il est également possible de faire varier sa géométrie elle-même pour coder de l'information. Nous étudions ici deux exemples d'une telle modulation de motif particulièrement intéressants pour la communication multi-utilisateurs

sur Ultra Wide Band : ils sont utilisés en pratique pour ajouter à l'information envoyée (codée quant-à elle grâce à une modulation d'amplitude ou de position) une signature identifiant celui qui l'a émise, et permettant ainsi un accès multiple au canal.

Exemple 5 (Signature par polarité). *Dans ce premier type de modulation de motif, la signature consiste en la répétition de l_0 impulsions identiques dont on modifie la polarité de manière spécifique à chaque utilisateur :*

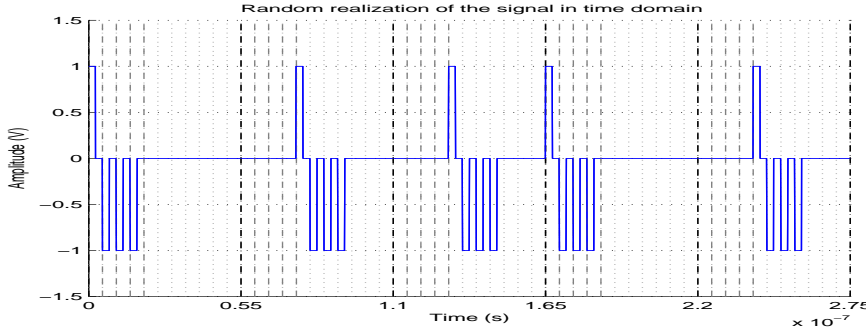


FIG. 1.7 – signature de polarité (1,-1,-1) ajoutée à une modulation de position

Ainsi, si cette modulation de motif affecte un processus initial $N = \{(T_n, Z_n); n \in \mathbb{Z}\}$ que l'on voulait initialement filtrer par une fonction h , la nouvelle fonction de filtrage sera :

$$\bar{h}(t, z) = \sum_{l=0}^{l_0-1} a_l \times h(t - l \times t_F, z), \quad (1.17)$$

où $(a_0, \dots, a_{l_0-1}) \in \{-1, 1\}^{l_0}$ est le vecteur déterministe des polarités caractérisant l'utilisateur et t_F la durée séparant chaque impulsion de la signature. Le signal qui résulte de la convolution impulsionnelle de N par \bar{h} prend alors la forme :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{l_0-1} a_l \times h(t - T_n - l \times t_F, Z_n), \quad (1.18)$$

Ce qui correspond bien au résultat voulu, comme l'illustre la figure 1.7.

Exemple 6 (Signature temporelle). *Dans ce second exemple, ce n'est plus la polarité des impulsions mais leur décalage individuel par rapport à la grille régulière qui caractérise chaque utilisateur : la signature est le vecteur déterministe $(c_0, \dots, c_{l_0-1}) \in \mathbb{R}^{l_0}$ des décalages individuels de chaque impulsion et, par la fonction de convolution impulsionnelle*

$$\bar{h}(t, z) = \sum_{l=0}^{l_0-1} h(t - l \times t_F - c_l \times t_c, z) \quad (1.19)$$

le signal prend après filtrage la forme voulue :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{l_0-1} h(t - T_n - l \times t_F - c_l \times t_c, Z_n). \quad (1.20)$$

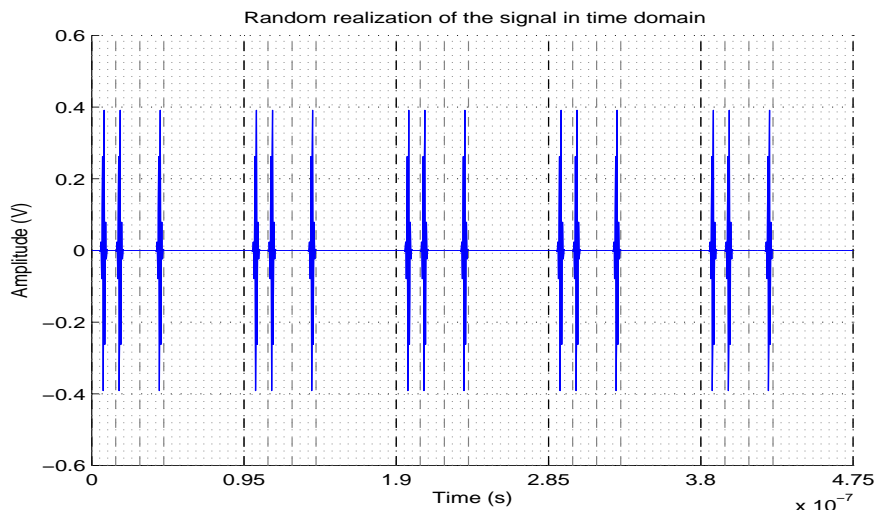


FIG. 1.8 – signature temporelle (1,0,2)

Remarque 10. Notons que dans ces deux exemples la signature est déterministe : il n'est donc pas nécessaire de marquer le processus ponctuel de base, et la fonction de convolution impulsionnelle ne dépend de ce fait que de t et de la variable z représentant les marques $(Z_n)_n \in \mathbb{Z}$ déjà existantes. On pourrait néanmoins tout à fait envisager des signatures aléatoires en spécifiant par des marques supplémentaires les informations relatives à ces dernières, puis en en faisant dépendre de la manière que l'on souhaite la nouvelle fonction de convolution impulsionnelle \bar{h} .

1.2.2 Perturbations au cours de la transmission

Outre toutes ces modifications cumulables volontairement apportées au support régulier de base pour y coder l'information que l'on désire transmettre, diverses transformations indésirables sont également susceptibles d'altérer le signal au cours de sa transmission. Leur formalisation fonctionne sur le même principe modulaire : les différentes informations relatives à ces perturbations aléatoires sont contenues dans des marques qui viennent enrichir progressivement le processus déjà décoré des opérations précédemment décrites, toutes ces métamorphoses "en puissance" ne s'exprimant véritablement que lors du filtrage final qui leur donnera le corps approprié.

Déplacements aléatoires des impulsions

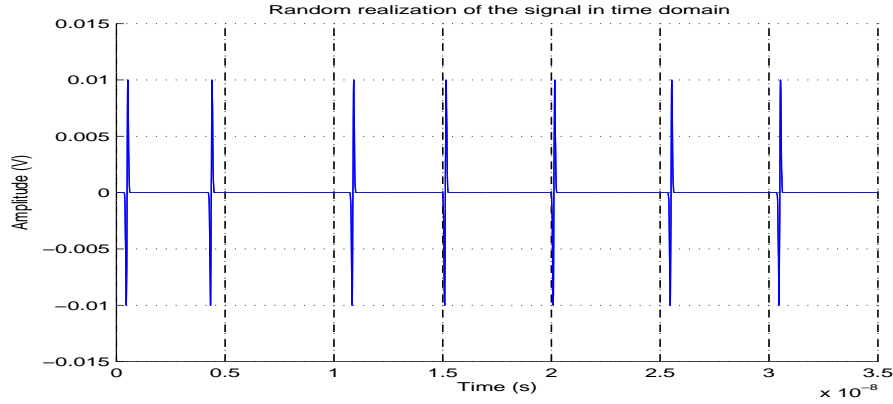
En pratique, l'horloge interne générant les impulsions régulières qui serviront de support à l'information peut être soumise à de légères fluctuations aléatoires dont il convient de tenir compte. Notons $(Z_n^J)_{n \in \mathbb{Z}}$ la séquence des variables aléatoires réelles i.i.d. correspondant aux amplitudes aléatoires des décalages¹² subis par les impulsions du champ initial $N = \{(T_n, Z_n); n \in \mathbb{Z}\}$. En utilisant alors la fonction de filtrage

$$\bar{h}((t, z), z^J) = h(t - z^J, z), \quad (1.21)$$

¹²On peut prendre par exemple une distribution gaussienne centrée, de variance d'autant plus petite que l'horloge du système que l'on cherche à modéliser est stable.

pour effectuer la convolution impulsionnelle du processus marqué \bar{N} de base N et de marques i.i.d. $(Z_n^J)_{n \in \mathbb{Z}}$, on obtient le signal voulu :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - T_n - Z_n^J, Z_n) \quad (1.22)$$



Pertes occasionnelles

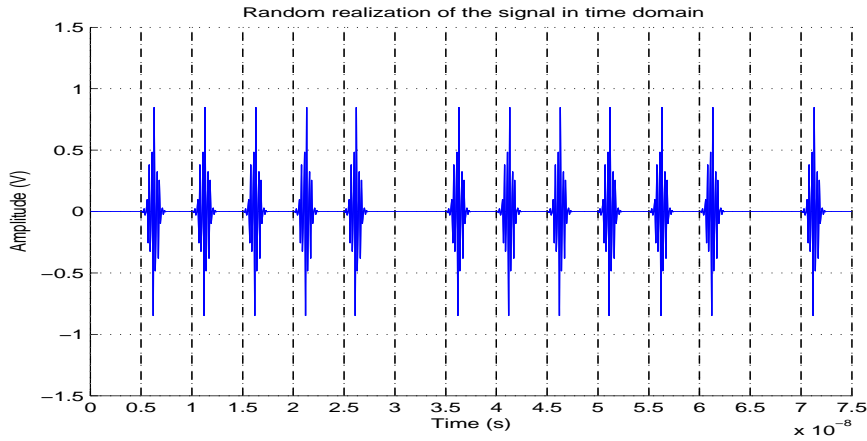


FIG. 1.9 – pertes aléatoires d’impulsions avec probabilité 0.15

Les imperfections du système émetteur peuvent également se traduire par une perte occasionnelle d’impulsions. Si l’on note p la probabilité qu’un tel évènement se produise, on peut prendre comme marques pour modéliser ce phénomène la séquence $(Z_n^L)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires i.i.d. à valeurs¹³ dans $\{0, 1\}$ dont la loi commune est donnée par :

$$\begin{cases} P(Z^L = 0) = p \\ P(Z^L = 1) = 1 - p \end{cases}$$

¹³Un zéro code la perte et un 1 la transmission correcte de l’impulsion

Une convolution impulsionnelle par la fonction impulsionnelle de filtrage

$$h((t, z), z^L) = z^L \times h(t, z) \quad (1.23)$$

donnera alors la forme voulue au processus marqué $\bar{N} = \{(T_n, Z_n), Z_n^L\}; n \in \mathbb{Z}\}$ de base le processus N que l'on désire affecter (initialement destiné à une convolution impulsionnelle par la fonction h) et de marques $(Z_n^L)_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Z_n^L \times h(t - T_n, Z_n), \quad (1.24)$$

Distorsion du motif

Des distorsions aléatoires affectant de manière indépendante et identiquement distribuée au cours de la transmission les symboles constituant le signal peuvent être également modélisées. Nous envisageons ici deux façons simples de procéder.

Une première manière est d'utiliser les marques pour introduire des paramètres aléatoires dont dépendra le motif de filtrage : des distorsions sur l'amplitude et la largeur temporelle du motif, par exemple, peuvent être rendues en enrichissant le processus-cible des marques $((Z_n^{DA}, Z_n^{DT}))_{n \in \mathbb{Z}}$ sur \mathbb{R}^2 puis en faisant convenablement dépendre de ces marques la nouvelle fonction de filtrage :

$$h(t, (z, (z^{DA}, z^{DT}))) = (1 + z^{DA}) \times h\left(\frac{t}{1 + z^{DT}}, z\right). \quad (1.25)$$

Le signal résultant prend alors la forme :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + Z_n^{DA}) \times h\left(\frac{t}{1 + Z_n^{DT}} - T_n, Z_n\right), \quad (1.26)$$

Une seconde façon de modéliser la dégradation du signal consiste à énumérer au cas par cas les différents motifs discrets $(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_p)$ qui en peuvent résulter, puis d'utiliser des marques i.i.i.d. $(Z_n^D)_{n \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans $[[1, p]]$ afin de sélectionner aléatoirement l'un d'eux, avec la distribution voulue, pour chacune des impulsions du processus ponctuel que l'on souhaite affecter :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{Z_n^D}(t - T_n), \quad (1.27)$$

signal qui s'obtient grâce à la convolution impulsionnelle du processus marqué $\bar{N} = \{(T_n, Z_n^D); n \in \mathbb{Z}\}$ par la fonction de filtrage

$$\bar{h}(t, (z, z^D)) = \sum_{i=1}^p \bar{h}_i(t, z) 1_{\{z^D=i\}}. \quad (1.28)$$

Effet multipath-fading

L'effet multipath-fading est sans aucun doute l'un des phénomènes les plus répandus et les plus redoutés en télécommunication : il se produit lorsque le signal, émis sous forme d'une onde électromagnétique, se réfléchit contre les divers obstacles qui jonchent l'environnement dans lequel il se propage, et que ces multiples échos atténués reviennent interférer avec lui.

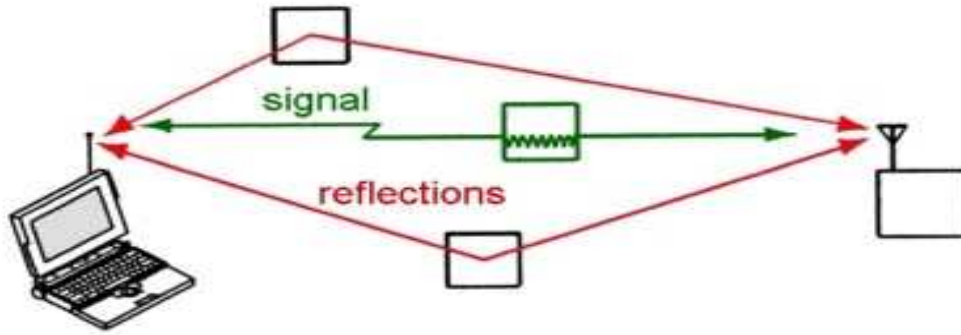


FIG. 1.10 – l'effet multipath-fading

Les signaux classiques obtenus par modulation d'une onde sinusoïdale élémentaire ont une énergie concentrée sur une bande de fréquences très étroite et y sont de ce fait particulièrement sensibles.

Dans le cas de l'Ultra Wide Band au contraire, et c'est d'ailleurs là que réside l'intérêt majeur de l'étalement en fréquences, les impulsions utilisées sont trop courtes pour que le risque de superposition de l'une d'elles avec un écho réfléchi puisse constituer une véritable menace : les conséquences du phénomène se limitent ainsi à la seule apparition aléatoire d'impulsions parasites atténuées dont il faudra se débarrasser à la réception.

Mieux, on peut même tirer profit de ces versions redondantes du signal émis pour améliorer considérablement la qualité de l'information reçue. Cette dernière idée est extrêmement jeune, et des travaux récents¹⁴ étudient les possibilités offertes par l'utilisation de décodeurs dits "à râtaux sélectifs" combinant les informations corrélées contenues dans ces multiples répétitions. L'aide que pourrait apporter l'analyse spectrale du phénomène est évidente, et donne à l'étude qui suit un intérêt tout particulier.

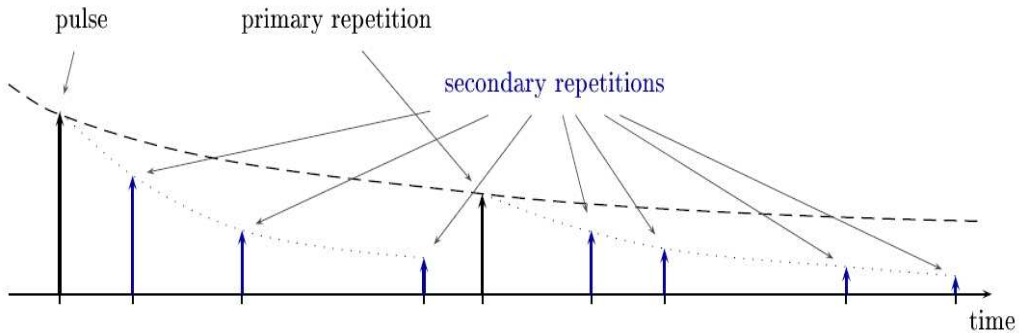


FIG. 1.11 – répétitions principales et secondaires

Des études expérimentales (c.f. [SV87]) ont montré que ces réflexions arrivent par fragments : à chaque impulsion originale est associée une première série de répétitions, dites

¹⁴Voir par exemple [WSS05]

principales, dues à sa réflexion contre les divers obstacles environnants. À son tour, chacune de ces répétitions principales (y compris l'impulsion originale elle-même) est réfléchiée et donne lieu à une séquence de répétitions secondaires. Les répétitions principales ont un rythme moyen d'arrivée moins élevé que les répétitions secondaires, et leur amplitude diminue plus lentement. La modélisation de ces deux types de répétitions requiert l'introduction :

- d'une séquence $(\bar{N}_n^P)_{n \in \mathbb{Z}}$ de processus ponctuels marqués i.i.d., chaque \bar{N}_n^P ayant d'une part pour base un processus ponctuel simple et localement fini sur \mathbb{R}^+ $N_n^P = \{T_{n,l}^P; l \in \mathbb{N}^*\}$ dont les points aléatoires décrivent les positions relatives des répétitions principales de l'impulsion originale n par rapport à la position de cette dernière et d'autre part pour marques une séquence i.i.d. $(Z_{n,l}^P)_{l \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace K_P et permettant d'introduire individuellement de l'aléatoire dans la fonction d'atténuation principale ;
- d'une fonction $g^P : \mathbb{R} \times K_P \rightarrow \mathbb{R}^+$ déterminant l'atténuation aléatoire progressive des répétitions principales ;
- d'une séquence double $(\bar{N}_{n,l}^S)_{n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}}$ de processus ponctuels marqués i.i.d. (par rapport aux deux indices n et l), chaque $\bar{N}_{n,l}^S$ ayant d'une part pour base un processus ponctuel simple et localement fini sur \mathbb{R}^+ $N_{n,l}^S = \{T_{n,l,k}^S; k \in \mathbb{N}^*\}$ dont les points aléatoires décrivent les positions relatives des répétitions secondaires de chaque impulsion originale n (*pour* $l = 0$) ou de chaque répétition principale l de l'impulsion originale n (*pour* $l \geq 1$), et d'autre part pour marques une séquence i.i.d. $(Z_{n,l,k}^S)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace K_S et permettant d'introduire individuellement de l'aléatoire dans la fonction d'atténuation secondaire ;
- d'une fonction $g^S : \mathbb{R} \times K_S \rightarrow \mathbb{R}^+$ déterminant l'atténuation aléatoire progressive des répétitions secondaires.

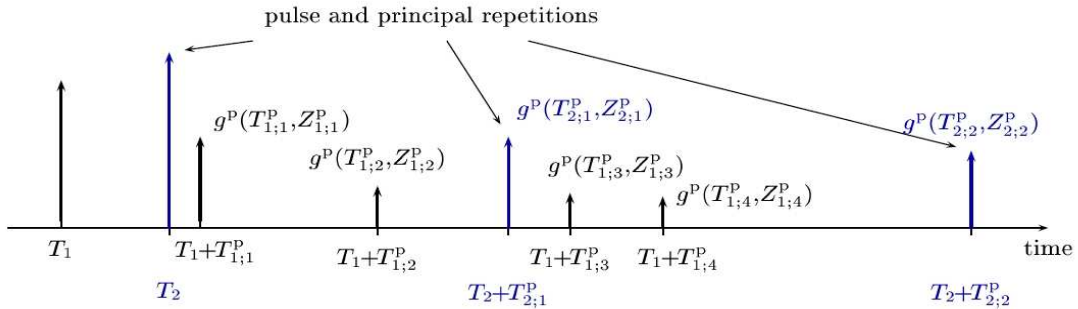


FIG. 1.12 – modélisation de l'effet multipath-fading

Appliquons donc ce modèle à un processus déjà marqué $\bar{N} = \{(T_n, Z_n); n \in \mathbb{Z}\}$ devant être initialement filtré par une réponse impulsionnelle \tilde{h} , et donnons l'expression des nouvelles marques $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et de la nouvelle fonction de filtrage \tilde{h} qui sauront donner au signal final la forme adéquate résultant de ces multiples réflexions, à savoir :

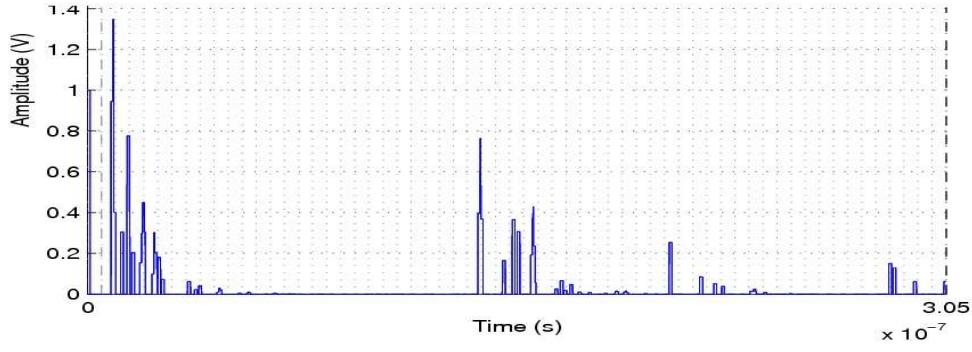


FIG. 1.13 – les études menées par A. A. M. Saleh et R. A. Valenzuela (c.f. [SV87]) ont montré que les positions aléatoires des répétitions primaires et secondaires peuvent être en pratique efficacement modélisées par des processus de Poisson, et les fonctions d'atténuations par des exponentielles décroissantes.

$$\begin{aligned}
X(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - T_n, Z_n) \\
&+ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l \geq 1} h(t - T_n - T_{n,l}^P, Z_n) g^P(T_{n,l}^P, Z_{n,l}^P) \\
&+ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \geq 1} h(t - T_n - T_{n,0,k}^S, Z_n) g^S(T_{n,0,k}^S, Z_{n,0,k}^S) \\
&+ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l \geq 1} \sum_{k \geq 1} h(t - T_n - T_{n,l}^P - T_{n,l,k}^S, Z_n) g^P(T_{n,l}^P, Z_{n,l}^P) g^S(T_{n,l,k}^S, Z_{n,l,k}^S),
\end{aligned}$$

La première ligne correspond au signal original, la seconde à ses réflexions principales, la troisième aux réflexions secondaires des impulsions originales et la dernière aux réflexions secondaires des réflexions principales. On peut réécrire aisément cela sous la forme d'une convolution impulsionnelle :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{h}(t - T_n, \bar{Z}_n).$$

Chapitre 2

Principes, limites et dépassement de la théorie classique du calcul spectral

Dans la première partie de ce rapport nous avons vu comment décrire mathématiquement toute séquence d'évènements identiques se répétant de façon aléatoire dans l'espace ou le temps sous la forme unifiée d'un processus ponctuel, puis comment, par marquage, décorer cet objet formel des informations relatives aux diverses transformations aléatoires subies par les manifestations ponctuelles qu'il modélise, avant de lui donner finalement, à l'aide d'un filtrage impulsif, la forme concrète d'un véritable signal physique tel qu'il nous apparaît en pratique dans les différents domaines qui en justifient l'étude.

Cette seconde partie consiste en l'exposé des principes de l'analyse spectrale proprement dite de ces signaux définitifs. Comment traduire mathématiquement, d'une manière adaptée à nos modèles formels, la répartition statistique en fréquence de l'énergie qu'ils véhiculent ? Nous commençons (chapitre 3) par développer les méthodes analytiques classiques utilisées pour extraire d'un signal concret quelconque ses caractéristiques spectrales essentielles. Après avoir mis en évidence les limites pratiques de ces méthodes et en particulier leur inexploitabilité par l'informatique, nous nous efforçons de montrer (chapitre 4) dans quelle mesure l'extension récente du cadre formel de l'analyse spectrale a permis le développement d'outils bien plus efficaces sachant enfin tirer véritablement profit des remarquables propriétés structurelles qui font la spécificité des objets auxquels ils s'appliquent.

2.1 Principes et limites de l'analyse spectrale classique

2.1.1 Formalisme des processus stochastiques

La mesure spectrale de puissance d'un processus stochastique du second ordre stationnaire au sens large constitue comme nous le verrons la représentation mathématique exacte du spectre énergétique statistique de ce dernier. Toutefois, l'exhibition de cet objet fondamental requiert l'introduction préalable d'un certain nombre de notions importantes concernant les processus stochastiques auxquels il va s'appliquer.

Processus stochastiques du second ordre

Dans toute la suite, on se place dans l'espace vectoriel $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ des classes d'équivalence pour la relation d'égalité presque sûre des variables aléatoires complexes dont le carré du module est intégrable. Rappelons qu'il s'agit d'un espace de Hilbert pour le produit hermitien

$$X, Y \mapsto \mathbb{E}[XY^*]. \quad (2.1)$$

Les signaux dont nous désirons étudier les propriétés spectrales, obtenus au terme des différentes opérations de marquage puis de filtrage, sont représentés, nous l'avons vu, par la notion de processus stochastique. Commençons par en rappeler la définition.

Définition 12 (processus stochastique à valeurs complexes). *Soit T un espace quelconque (l'espace des temps, \mathbb{R}^d ou \mathbb{Z} en général). On appelle processus stochastique à valeurs complexes toute famille $(X(t))_{t \in T}$ de variables aléatoires complexes.*

Pour profiter de la structure hilbertienne qu'offre $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et des résultats classiques qui y sont établis, il nous faut exiger des processus stochastiques une propriété essentielle, correspondant physiquement (le lien sera fait dans la section 2.1.2) au fait que l'énergie des signaux modélisés est finie :

Définition 13 (second ordre). *Un processus stochastique à valeurs complexes $(X(t))_{t \in T}$ est dit du second ordre lorsque :*

$$\forall t \in T, X(t) \in L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (2.2)$$

On peut alors définir les fonctions de moyenne m_X et de covariance Γ_X :

- $m_X : t \mapsto \mathbb{E}[X(t)]$
- $\Gamma_X : t, s \mapsto \text{cov}(X(t), X(s)) = \mathbb{E}[(X(t) - \mathbb{E}[X(t)])(X(s) - \mathbb{E}[X(s)])^*]$

Propriété de stationnarité

Imaginons que l'on cherche à étudier statistiquement un phénomène aléatoire $(X(t))_{t \in T}$ se déroulant dans le temps (l'espace T) à partir des observations obtenues en répétant successivement un grand nombre de fois une même expérience, celle-ci consistant en la simple mesure de p échantillons $(X(\omega)(t_1), \dots, X(\omega)(t_p))$ de ce dernier. Avant d'envisager l'établissement de résultats statistiques, il nous faut bien supposer que les différentes expériences effectuées suivent toutes la même distribution indépendamment des dates auxquelles elles sont renouvelées. Cette intuition physique trouve sa correspondance mathématique dans la notion de stationnarité au sens strict :

Définition 14 (stationnarité au sens strict). *Soit $(X(t))_{t \in T}$ un processus stochastique sur $T = \mathbb{R}^d$ ou \mathbb{Z} . $(X(t))_{t \in T}$ est dit stationnaire au sens strict si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(t_1, \dots, t_p) \in T^p$, la loi de $(X(t_1 + s), \dots, X(t_p + s))$ est indépendante de $s \in T$.*

Remarque 11. *Si $(X(t))_{t \in T}$ est stationnaire au sens strict, alors :*

- la fonction moyenne m est constante ;

- la fonction de covariance Γ ne dépend que de la différence de ses deux arguments et se réécrit donc $\Gamma(s, t) = C_X(t - s)$, où C_X est appelée fonction d'autocovariance du processus $(X(t))_{t \in T}$.

La réciproque n'est pas vraie : la stationnarité au sens strict est une hypothèse beaucoup plus forte que la seule conjonction de ces deux dernières propriétés, lesquelles n'ont d'ailleurs aucune signification physique intuitive. Néanmoins, elles sont mathématiquement suffisantes pour tous les développements théoriques dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dont nous aurons besoin par la suite. On parlera alors simplement de stationnarité au sens large.

2.1.2 Mesure spectrale de puissance

Définition et existence

La proposition suivante découle directement du fait que l'application définie par la formule 2.1 est un produit hermitien.

Proposition 3. *Soit $(X(t))_{t \in T}$ un processus du second ordre stationnaire au sens large. Sa fonction d'autocovariance C_X est alors une fonction de type semi-défini positif au sens où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$, la matrice $(C_X(t_j - t_i))_{1 \leq i, j \leq k} = (\Gamma(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ est hermitienne positive :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall s, t \in T^2, \Gamma(s, t) = \Gamma^*(t, s) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall (t_1, \dots, t_k) \in T^k, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^k, \sum_{1 \leq i, j \leq k} \lambda_i \lambda_j^* \Gamma(t_i, t_j) \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Or la forme des fonctions de type semi-défini positif sur \mathbb{R}^d est donnée par le célèbre théorème de Bochner (c.f. [DCD86], théorème 1.3.18 p.30) :

Théorème 2 (Bochner). *Soit φ une fonction de type semi-défini positif de \mathbb{R}^d dans \mathbb{C} continue en zéro. Alors, il existe une unique mesure μ sur \mathbb{R}^d telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,*

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi \langle t, \nu \rangle} \mu(d\nu) \quad (2.4)$$

où $\langle x, y \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^d . De plus, cette mesure est finie.

La conséquence de ce théorème et de la proposition 3 pour un processus du second ordre stationnaire au sens large est immédiate :

Définition 15 (mesure spectrale de puissance). *Soit $(X(t))_{t \in T}$ un processus stochastique du second ordre stationnaire au sens large. Si sa fonction d'autocovariance C_X est continue à l'origine¹, elle admet alors la décomposition spectrale :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, C_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi \langle t, \nu \rangle} \mu_X(d\nu), \quad (2.5)$$

où μ_X est une mesure finie sur \mathbb{R}^d (unique) appelée mesure spectrale de puissance du processus $(X(t))_{t \in T}$.

¹Il est suffisant pour cela d'exiger par exemple que les réalisations possibles $t \mapsto X(\omega)(t)$ du signal soient presque sûrement continues sur T et bornées par un certain réel positif $g(\omega)$ tel que $\omega \mapsto g(\omega)$ soit intégrable.

Proposition 4 (caractérisation équivalente). *La mesure spectrale de puissance μ_X d'un processus stochastique du second ordre stationnaire au sens large $(X(t))_{t \in T}$ est aussi l'unique mesure sur \mathbb{R}^d vérifiant, pour tout $\varphi, \psi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$:*

$$\text{cov} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) X(t) dt, \int_{\mathbb{R}^d} \psi(s) X(s) ds \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\nu) \hat{\psi}^*(\nu) \mu_X(d\nu). \quad (2.6)$$

Remarque 12 (densité spectrale de puissance). *Lorsque la fonction d'autocovariance C_X est intégrable, la mesure μ_X admet une densité S_X appelée densité spectrale de puissance du processus $(X(t))_{t \in T}$ et qui n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction C_X ; on peut alors écrire :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, C_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi \langle t, \nu \rangle} S_X(\nu) d\nu \quad (2.7)$$

La mesure spectrale de puissance est absolument fondamentale dans le cadre de notre analyse spectrale : elle représente fidèlement, comme nous allons le voir tout de suite, la manière dont se répartit statistiquement le long de la bande des fréquences l'énergie véhiculée par le signal.

Signification physique

Pour préciser un peu ce lien intuitif entre mesure spectrale de puissance et répartition fréquentielle de l'énergie, rappelons qu'en physique la puissance instantanée d'un signal déterministe $x \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ est proportionnelle au carré $|x(t)|^2$ de son module à l'instant considéré. Remarquons alors que la masse totale de la mesure μ_X se met sous la forme :

$$\mu_X(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_X(d\nu) = C_X(0) = \mathbb{E}[|X(t) - m_X(t)|^2]. \quad (2.8)$$

La mesure μ a donc pour masse totale la puissance instantanée moyenne du signal centré $X - m_X$, grandeur d'ailleurs indépendante de l'instant considéré². Formellement, chacun des $d\mu$ contribuant à cette masse totale représente ainsi la part qu'occupent les fréquences égales à ν à $d\nu$ près dans la puissance instantanée moyenne du signal.

Lorsque l'on cherche en télécommunications à représenter le spectre énergétique d'un signal, c'est donc précisément la mesure spectrale de puissance de ce dernier qu'il s'agit d'explicitier.

2.2 Analyse spectrale étendue

Bien qu'elle soit ainsi le reflet mathématique parfait des propriétés physiques intéressantes si vivement les concepteurs de systèmes de télécommunication, la mesure spectrale de puissance des processus stochastiques définie au chapitre précédent possède un inconvénient majeur : elle ne tire absolument pas profit du fait que le signal auquel elle s'applique, loin d'être quelconque, est au contraire comme l'a montré le chapitre 2 le fruit d'une série de transformations usuelles élémentaires, volontaires ou accidentelles, dont il serait particulièrement intéressant d'explicitier directement les influences respectives sur le spectre final. Cette inadaptation profonde à la structure modulaire pourtant inhérente aux signaux utilisés oblige les ingénieurs

²Cela vient en fait directement de l'hypothèse de stationnarité

à reprendre à leurs débuts tous les calculs du processus stochastique final puis de sa représentation spectrale à chaque petite modification envisagée sur l'une de ces transformations. Tout cela est d'autant plus problématique que la mesure spectrale de puissance ne s'obtient par aucun calcul direct algorithmiquement reproductible : il faut en effet la faire apparaître à la main par identification, en essayant d'écrire la fonction d'autocovariance sous forme de l'intégrale des sinusoides qui la composent.

Aussi la recherche théorique en analyse spectrale prévisionnelle s'est-elle trouvée jusque-là réduite à la publication sporadique de quelques résultats d'études de cas particuliers, et les concepteurs de systèmes de transmission ont été contraints de se résoudre à la correction progressive et patiente des prototypes envisagés – à tâtons et tant bien que mal – jusqu'à ce que les mesures expérimentales de leurs propriétés physiques satisfassent enfin à peu près les conditions recherchées. Toutefois, des avancées mathématiques récentes ont finalement rendu possible le calcul véritablement modulaire des spectres des signaux utilisés par l'introduction d'outils directement applicables aux processus ponctuels marqués dont ceux-ci sont le fruit et non plus à la forme complexe et inexploitable qu'ils finissent par revêtir.

2.2.1 Mesure spectrale de Bartlett

L'objet de ce quatrième chapitre est précisément la description de la manière dont ces récentes extensions théoriques rendent finalement possible la transposition, jusque dans le monde des spectres énergétiques, de l'étonnante modularité structurelle inhérente aux flots d'informations qui nous occupent. Or l'établissement d'une telle correspondance ne peut se concevoir sans que la notion de spectre ait été au préalable étendue aux processus ponctuels simples et localement finis, véritables maillons mathématiques de la chaîne des transformations subies : le résultat d'une telle extension porte le nom de mesure spectrale de Bartlett.

Définition et existence

Lorsqu'il s'agissait de définir la mesure spectrale de puissance d'un processus stochastique, il nous a inévitablement fallu dans le chapitre précédent exiger de ce dernier la propriété de second ordre (définition 13), condition indispensable pour utiliser les résultats classiques confortables qu'offre la structure hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Commençons donc déjà par adapter cette notion aux processus ponctuels :

Définition 16 (processus ponctuel du second ordre). *Soit N un processus ponctuel sur (E, \mathcal{E}) . On dit que N est un processus ponctuel du second ordre si et seulement si, pour tout borélien $C \in \mathcal{E}$:*

$$\mathbb{E}[|N(C)|^2] < \infty. \quad (2.9)$$

C'est donc en particulier aussi un processus du premier ordre.

On a vu (proposition 4) que la mesure spectrale de puissance μ_X d'un processus stochastique $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ pouvait être définie de manière équivalente comme l'unique mesure sur \mathbb{R}^d vérifiant, pour tout $\varphi, \psi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$:

$$\text{cov} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) X(t) dt, \int_{\mathbb{R}^d} \psi(s) X(s) ds \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\nu) \hat{\psi}^*(\nu) \mu_X(d\nu). \quad (2.10)$$

C'est cette caractérisation que l'on va adapter pour définir la mesure spectrale de Bartlett d'un processus ponctuel. Il nous faudra néanmoins pour cela nous restreindre à une classe

bien particulière de fonctions φ , qui dépend du processus considéré. Pour un processus ponctuel simple et localement fini N donné, introduisons donc l'espace vectoriel L_N^2 des fonctions mesurables $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$E[N(|\varphi|)^2] < \infty \quad (2.11)$$

Le lemme suivant précise une condition plus générale automatiquement vérifiée par les fonctions d'un tel espace lorsque N est stationnaire et du second ordre ; cela nous permet de rendre légitime la définition de la mesure spectrale de Bartlett telle qu'elle sera énoncée immédiatement après.

Lemme 2.2.1. *Soit N un processus ponctuel simple, localement fini, stationnaire et du second ordre sur $E = \mathbb{R}^d$. Alors*

$$L_N^2 \subseteq L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^d) \cap L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d) \quad (2.12)$$

Démonstration. Soit $\varphi \in L_N^2$ (notons que cela implique en particulier $E[N(|\varphi|)] < \infty$). Par définition de l'intensité λ de N , on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(t)| dt = \frac{1}{\lambda} E[N(|\varphi|)] < \infty \quad (2.13)$$

Et donc $\varphi \in L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^d)$. D'autre part :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(t)|^2 dt = \frac{1}{\lambda} E[N(|\varphi|^2)] = \frac{1}{\lambda} E \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(T_n)|^2 \right] \leq \frac{1}{\lambda} E[N(|\varphi|^2)] < \infty$$

D'où $\varphi \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d)$, ce qui termine la preuve de l'inclusion 2.12. \square

Une conséquence de ce lemme est que la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ d'un élément $\varphi \in L_N^2$ est tout à fait définie. Nous noterons désormais B_N^0 le sous-espace vectoriel de L_N^2 constitué des fonctions φ vérifiant :

$$\begin{cases} \varphi(t) =_{|t| \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{|t|^2}\right) \\ \hat{\varphi}(\nu) =_{|\nu| \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{|\nu|^2}\right) \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème définissant la mesure spectrale de Bartlett. Cependant, la preuve en étant relativement lourde, nous avons choisi de ne pas la donner ici. Elle pourra être trouvée dans [BMrs] (théorème 3.2, p.233).

Théorème 3 (existence et unicité de la mesure spectrale de Bartlett). *Soit N un processus ponctuel simple, localement fini, stationnaire et du second ordre sur $E = \mathbb{R}^d$. Alors il existe une unique mesure localement finie μ_N sur \mathbb{R}^d , appelée mesure spectrale de Bartlett du processus ponctuel N , telle que :*

$$\forall \varphi, \psi \in B_N^0, \text{cov}(N(\varphi), N(\psi)) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\nu) \hat{\psi}^*(\nu) \mu_N(d\nu) \quad (2.15)$$

Ou encore, de manière équivalente :

$$\forall \varphi \in B_N^0, \text{Var}(N(\varphi)) = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(\nu)|^2 \mu_N(d\nu) \quad (2.16)$$

La classe B_N (au moins égale à B_N^0) des fonctions de L_N^2 qui vérifient alors cette relation est un sous-espace vectoriel de L_N^2 appelé espace des fonctions admissibles ; son étendue dépend du processus ponctuel N considéré.

Remarque 13. *On remarquera l'analogie entre la formule 2.15 et celle qui caractérisait plus haut la mesure spectrale de puissance d'un processus stochastique (2.10).*

Formellement, la mesure spectrale de Bartlett est donc à un processus ponctuel simple, localement fini, stationnaire et du second ordre ce qu'est à un processus stochastique la mesure spectrale de puissance. Contrairement à cette dernière, elle n'a toutefois pas de signification physique rigoureuse puisque l'objet qu'elle caractérise n'est lui-même qu'une représentation abstraite d'un champs d'impulsions décoré d'information codifiée. Son utilité pratique est pourtant considérable : nous allons voir en effet que la formule isométrique fondamentale (2.23) relie de façon extrêmement simple le spectre de Bochner (principal objectif de notre étude, rappelons-le) d'un signal réel résultant des diverses opérations de marquages et de filtrage à la mesure spectrale de Bartlett du dernier processus ponctuel marqué sur lequel a été opérée la convolution impulsienne dont il dérive.

Mieux encore, il est possible de traduire directement les marquages intermédiaires dont l'accumulation engendre ce dernier processus marqué lui-même en termes de transformations sur la mesure spectrale de Bartlett du processus régulier initial. Il suffira donc en pratique, et c'est précisément là que réside l'avantage révolutionnaire de cette nouvelle approche modulaire, de connaître la mesure spectrale de Bartlett du support élémentaire de base pour pouvoir en dériver ensuite le spectre de n'importe lequel des signaux réels décrits en première partie.

Spectre de Bartlett d'une grille régulière

L'objet de cette section est de déterminer la mesure spectrale de Bartlett d'une grille régulière, processus dont la régularité en fait un support vierge privilégié pour accueillir l'information que l'on veut transmettre : l'intégralité des signaux que l'on a présentés en première partie peut en effet être obtenue, comme on l'a vu, par une succession de transformations simples opérées sur une telle grille. Le calcul de son spectre de Bartlett nécessite le rappel préalable de la célèbre formule de Poisson (voir par exemple [Bré02] théorème A.2.3 p.28 pour une preuve).

Théorème 4 (Formule de Poisson). *Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable et soit un réel $\Delta > 0$. Alors la série*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(t + n\Delta)$$

est absolument convergente pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, de somme notée $\phi(t)$, et la fonction ϕ ainsi presque partout définie est Δ -périodique, localement intégrable et de $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier :

$$c_n(\phi) = \frac{1}{\Delta} \hat{\varphi}\left(\frac{n}{\Delta}\right) \quad (2.17)$$

Si la série de terme général $c_n(\phi)$ est absolument convergente, on peut alors bien sûr décomposer ϕ en série de Fourier pour obtenir, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité forte de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(t + n\Delta) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{n}{\Delta}\right) e^{2i\pi \frac{n}{\Delta} t} \quad (2.18)$$

Nous pouvons maintenant nous employer à la détermination du spectre de Bartlett de notre champs impulsienel de base. Considérons donc le processus ponctuel formé par les

points d'une grille régulière de période $t_S > 0$ dont l'origine est aléatoirement déterminée par la variable U uniforme sur $[0, t_S]$:

$$N = \{U + nt_S ; n \in \mathbb{Z}\}$$

Il s'agit là de manière évidente d'un processus ponctuel simple, localement fini, stationnaire et du second ordre, d'intensité $\lambda = \frac{1}{t_S}$. Soit une fonction quelconque $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{n}{t_S})| < \infty \quad (2.19)$$

Cette hypothèse nous autorise à écrire l'égalité forte de Poisson : pour Lebesgue-presque tout $u \in [0, t_S]$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(u + nt_S) = \frac{1}{t_S} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\frac{n}{t_S}) e^{2i\pi \frac{n}{t_S} u}$$

Ainsi on a presque sûrement

$$N(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(U + nt_S) = \frac{1}{t_S} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\frac{n}{t_S}) e^{2i\pi \frac{n}{t_S} U},$$

Notons que 2.19 implique en particulier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{n}{t_S})|^2 < \infty$$

On peut donc inverser somme et espérance dans le calcul de $E[|N(\varphi)|^2]$

$$E[|N(\varphi)|^2] = \frac{1}{t_S^2} E \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\frac{n}{t_S}) \hat{\varphi}^*(\frac{m}{t_S}) e^{-2i\pi \frac{n-m}{t_S} U} \right] = \frac{1}{t_S^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{n}{t_S})|^2$$

et $E[N(\varphi)] = \frac{1}{t_S} \int_0^{t_S} \hat{\varphi}(u + nt_S) du = \frac{1}{t_S} \hat{\varphi}(0)$

On en déduit :

$$Var(N(\varphi)) = \frac{1}{t_S^2} \sum_{n \neq 0} |\hat{\varphi}(\frac{n}{t_S})|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\nu)|^2 \mu_N(d\nu) \quad (2.20)$$

Avec, si l'on note δ_a la mesure de Dirac en un point a :

$$\mu_N = \frac{1}{t_S^2} \sum_{n \neq 0} \delta_{\frac{n}{t_S}} \quad (2.21)$$

La relation (2.20) est valable pour toute fonction $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ vérifiant (2.19), donc en particulier pour toute fonction de B_N^0 , et on peut conclure par unicité que le spectre de Bartlett d'une grille régulière est bien la mesure donnée par (2.21) et que B_N contient au moins toutes les fonctions de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ vérifiant la condition (2.19).

2.2.2 Formule isométrique fondamentale

Maintenant qu'a été définie la mesure spectrale de Bartlett d'un processus ponctuel, véritable équivalent de ce que pourrait être son spectre énergétique s'il s'agissait d'un processus stochastique à proprement parler, nous pouvons nous demander comment les diverses opérations usuelles de marquages puis de filtrage effectuées sur un tel processus ponctuel se traduisent au niveau de sa mesure spectrale de Bartlett.

C'est la formule isométrique fondamentale qui assure comme nous allons le voir une telle traduction : elle permet d'effectuer directement sur le spectre de Bartlett du processus initial les opérations fréquentielles correspondant aux transformations physiques dont résulte le signal final, produisant ainsi d'une manière simple, modulaire et redoutablement efficace le spectre de ce dernier en fonction des caractéristiques spectrales des métamorphoses successives dont il est le fruit.

Énoncé du théorème

Dans toute la suite, (K, \mathcal{K}) est un espace mesurable. Pour $p \in \mathbb{N}$, rappelons la notation $L_{\mathbb{C}}^p(l^d \times Q)$ pour l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^d \times K \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d} E [|\varphi(t, Z)|^p] dt < \infty \quad (2.22)$$

où Z est une quelconque variable aléatoire à valeurs dans (K, \mathcal{K}) et de loi Q .

Le lemme suivant, application immédiate des théorèmes de Fubini, nous permet d'introduire les notations $\bar{\varphi}$ et φ_z utilisées dans la formule fondamentale énoncée juste après.

Lemme 2.2.2. *Soit $\varphi \in L_{\mathbb{C}}^1(l^d \times Q)$. Alors d'une part la variable aléatoire*

$$\bar{\varphi} : t \mapsto E[\varphi(t, Z)]$$

est Lebesgue-presque partout définie et dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^d)$ et d'autre part, pour Q -presque tout z , la variable aléatoire

$$\varphi_z : t \mapsto \varphi(t, z)$$

est bien définie et dans $L_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{R}^d)$. Si de plus $\varphi \in L_{\mathbb{C}}^2(l^d \times Q)$, alors $\bar{\varphi} \in L_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^d)$, ainsi que φ_z pour presque tout $z \in K$.

Nous pouvons maintenant enfin énoncer la formule isométrique fondamentale, dont l'établissement est relativement aisé (c.f. [Rid05] p.32).

Théorème 5 (Formule isométrique fondamentale). *Soit \bar{N} un processus ponctuel marqué simple et localement fini sur $E = \mathbb{R}^d$, de base un processus N stationnaire et du second ordre et de marques $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. à valeurs dans (K, \mathcal{K}) . Notons Q la loi commune des $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la représentation séquentielle ordonnée de N , λ son intensité, μ_N sa mesure spectrale de Bartlett et B_N son espace de fonctions admissibles. Soient enfin $\varphi, \psi \in L_{\mathbb{C}}^1(l^d \times Q) \cap L_{\mathbb{C}}^2(l^d \times Q)$ telles qu'avec les notations du lemme 2.2.2, $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in B_N$. Alors :*

$$\text{cov} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(T_n, Z_n), \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(T_n, Z_n) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\nu) \hat{\psi}^*(\nu) \mu_N(d\nu) + \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \text{cov} \left(\hat{\varphi}_Z(\nu), \hat{\psi}_Z^*(\nu) \right) d\nu \quad (2.23)$$

L'intérêt fondamental de cette formule isométrique réside sans aucun doute dans son application à la convolution impulsionnelle, opération mathématique essentielle qui, en tenant compte de toutes les marques qui se sont ajoutées au champ d'impulsions régulier dont on est parti, donne naissance au signal physique véritable que l'on cherche à analyser. Nous touchons là au cœur même du sujet qui nous occupe : la formule de filtrage impulsionnelle que nous allons établir dans la section qui suit donne en effet, d'une manière explicite et tout à fait générale, l'expression exacte du spectre énergétique d'un signal quelconque en fonction du processus initial et des caractéristiques fréquentielles de la série des transformations qui s'y sont appliquées.

Formule de filtrage impulsionnel

Considérons un processus ponctuel N simple, localement fini, stationnaire et du second ordre sur $E = \mathbb{R}^d$, modélisant la structure impulsionnelle vierge de toute information dont on désire partir (grille régulière par exemple). Notons λ son intensité et μ_N sa mesure spectrale de Bartlett. Conformément à ce qui a été vu au second chapitre, l'intégralité des transformations que l'on désire appliquer à ce champ aléatoire, ainsi que les divers effets susceptibles d'altérer la transmission peuvent être formellement condensées en une famille $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires i.i.i.d. dont on notera Q la distribution commune et dont le rôle est de modifier individuellement, de manière adaptée, le motif h donnant corps à chaque impulsion lors de la convolution impulsionnelle. Le signal $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ finalement obtenu est alors :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - T_n, Z_n) \quad (2.24)$$

C'est de ce signal physique aléatoire que l'on désire étudier les propriétés énergétiques. Dans ce but, supposons que $h \in L^1_{\mathbb{C}}(l^d \times Q) \cap L^2_{\mathbb{C}}(l^d \times Q)$ et définissons, pour $u, v \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \varphi : (t, z) \mapsto h(u - t, z) \\ \psi : (t, z) \mapsto h(v - t, z) \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\varphi, \psi \in L^1_{\mathbb{C}}(l^d \times Q) \cap L^2_{\mathbb{C}}(l^d \times Q)$. Remarquons également que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \varphi(T_n, Z_n) = X(u) \\ \forall \nu \in \mathbb{R}^d, \hat{\varphi}(\nu) = e^{2i\pi \langle \nu, u \rangle} E[\hat{h}_Z(\nu)] \\ \forall \nu \in \mathbb{R}^d, \hat{\varphi}_z(\nu) = e^{2i\pi \langle \nu, u \rangle} \hat{h}_z(\nu) \text{ (pour } Q\text{-presque tout } z) \end{array} \right.$$

Notons qu'on obtient les mêmes résultats pour ψ en remplaçant simplement u par v . Si on suppose enfin que les moyennes $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ sont dans B_N , toutes les conditions d'application de la formule isométrique fondamentale sont réunies et celle-ci s'écrit grâce aux remarques précédentes :

$$\text{cov}(X(u), X(v)) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2i\pi \langle \nu, u-v \rangle} \left(|E[\hat{h}_Z(\nu)]|^2 \mu_n(d\nu) + \lambda \text{Var}(\hat{h}_Z(\nu)) d\nu \right)$$

Ceci étant valable pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$, on en déduit que le processus du second ordre stationnaire au sens large $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$ admet par unicité pour mesure spectrale de puissance :

$$\mu_X(d\nu) = |E[\hat{h}_Z(\nu)]|^2 \mu_N(d\nu) + \lambda \text{Var}(\hat{h}_Z(\nu)) d\nu \quad (2.25)$$

Où l'on rappelle que $h_z(t) \triangleq h(t, z)$. On a bien sûr également accès aux propriétés du premier ordre de $(X(t))_{t \in \mathbb{R}^d}$:

$$m_X = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} E[h(t, Z)] dt \quad (2.26)$$

La formule 2.25, par laquelle sont enfin reliées les notions de mesure spectrale de Bartlett d'un processus ponctuel et de mesure spectrale de puissance d'un processus stochastique, porte le nom de formule de filtrage impulsionnel : elle traduit de manière exacte dans le domaine spectral l'opération temporelle de convolution impulsionnelle. Son impact pour l'analyse spectrale est tout à fait révolutionnaire, dans la mesure où elle donne accès aux spectres de tous les signaux présentés en première partie, de manière modulaire qui plus est, en isolant de manière parfaitement claire les contributions de chacune des transformations physiques opérées.

2.2.3 Exemple : spectres des signaux TH-IR

Pour illustrer les possibilités offertes par la formule de filtrage et donner un aperçu du travail analytique effectué préalablement à l'implémentation, nous avons décidé de traiter un exemple concret de calcul spectral. Désireux de ne pas alourdir le rapport avec des formules aussi compliquées que celles qu'il nous a fallu parfois manipuler en pratique (pour expliciter l'influence spectrale de l'effet multipath-fading par exemple), nous avons préféré expliciter le spectre d'un type de signal Ultra Wide Band simple et tout à fait standard : le TH-IR.

Description temporelle du signal

Dans le standard Time Hopping Impulse Radio (TH-IR), qui pourrait bien constituer l'avenir des systèmes multi-utilisateurs de communication à distance, chaque utilisateur du réseau se voit attribué une clé spécifique (c_0, \dots, c_{2^M-1}) contenant les positions relatives des 2^M impulsions identiques qui constituent sa signature, conformément au principe du time hopping développé dans l'exemple 6. Ces 2^M impulsions correspondent en réalité à de brèves variations électriques identiques, de la forme :

$$\omega(t) \triangleq A \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t}{\Delta}\right)^2} \quad (2.27)$$

où les paramètres A , f_0 et Δ permettent de régler l'amplitude, la fréquence centrale et la largeur de bande. Le motif élémentaire que constitue cette séquence bien précise de 2^M impulsions est ensuite répété périodiquement, la période t_S pouvant s'écrire :

$$t_S = 2^M \times t_F + t_G \quad (2.28)$$

où t_F est la période impulsionnelle élémentaire ('frame time') et t_G la durée de sécurité ('guard time') empêchant la superposition de deux symboles consécutifs. L'utilisateur transmet alors l'information en multipliant par un certain facteur Z_n^A l'amplitude de chacun de ces motifs élémentaires, de sorte que le signal finalement transmis prend la forme :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Z_n^A \sum_{l=0}^{2^M-1} \omega(t - nt_S - lt_F - c_l) \quad (2.29)$$

On peut bien sûr remplacer cette modulation de position par une modulation d'amplitude, en décalant comme on l'a vu d'une certaine durée Z_n^P chaque motif élémentaire en fonction

de l'information à transmettre. Le signal devient alors :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{2^M-1} \omega(t - nt_S - lt_F - c_l - Z_n^P) \quad (2.30)$$

Il est même possible de cumuler ces deux types de modulation afin d'envoyer plusieurs informations en même temps :

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Z_n^A \sum_{l=0}^{2^M-1} \omega(t - nt_S - lt_F - c_l - Z_n^P) \quad (2.31)$$

Notre modèle doit également tenir compte des différents effets susceptibles d'altérer le signal lors de sa transmission dans le canal auquel nous le destinons, comme cela a été décrit dans la section 2.2 : des pertes occasionnelles Z_n^L d'impulsions, ou une fluctuation aléatoire Z_n^J des battements t_S -périodiques générés par l'horloge peuvent par exemple être introduites.

$$X(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Z_n^L Z_n^A \sum_{l=0}^{2^M-1} \omega(t - nt_S - lt_F - c_l - Z_n^P - Z_n^J) \quad (2.32)$$

Naturellement, il ne s'agit là que d'un exemple destiné à illustrer la construction modulaire d'un signal. Toutes les combinaisons des transformations décrites dans la première partie sont en réalité envisageables et cumulables à volonté.

Formalisation sous forme d'un processus marqué

Le formalisme des processus ponctuel permet comme on l'a vu de modéliser aisément ce signal : décorons donc une grille régulière

$$N \triangleq \{n \times t_S; n \in \mathbb{Z}\} \quad (2.33)$$

des diverses marques correspondant aux transformations considérées :

$$\bar{N} \triangleq \{(n \times t_S, (Z_n^A, Z_n^P, Z_n^J, Z_n^L)); n \in \mathbb{Z}\} \quad (2.34)$$

Conformément aux principes décrits dans le second chapitre, la convolution impulsionnelle de \bar{N} par la fonction de filtrage

$$h(t, (z^A, z^P, z^J, z^L)) \triangleq z^L z^A \sum_{l=0}^{2^M-1} \omega(t - lt_F - c_l - z^P - z^J) \quad (2.35)$$

produit alors le signal 2.32 qui nous occupe ici.

Spectre du signal obtenu

Il ne reste alors plus qu'à appliquer la formule (2.25) de filtrage impulsionnel pour obtenir la mesure spectrale du signal TH-IR que l'on a modélisé :

$$\begin{aligned} \mu_X(d\nu) &= |\hat{\omega}(\nu)|^2 |s(\nu)|^2 |E[Z^A]|^2 |E[Z^L]|^2 |\phi_{Z^P}(2\pi\nu)|^2 |\phi_{Z^J}(2\pi\nu)|^2 \mu_N(d\nu) \\ &\quad + \lambda 2^M |\hat{\omega}(\nu)|^2 E[|Z^A|^2] \left(E[|Z^L|^2] - |E[Z^L]|^2 |\phi_{Z^J}(2\pi\nu)|^2 \right) d\nu \\ &\quad + \lambda |\hat{\omega}(\nu)|^2 |s(\nu)|^2 E[|Z^L|^2] |\phi_{Z^J}(2\pi\nu)|^2 \left(E[|Z^A|^2] - |E[Z^A]|^2 |\phi_{Z^P}(2\pi\nu)|^2 \right) d\nu \end{aligned}$$

Où le spectre μ_N d'une grille t_S -régulière est donné par la formule 2.21, et son intensité par $\lambda = \frac{1}{t_S}$, et où l'on a noté pour plus de commodité

$$s(\nu) \triangleq \sum_{l=0}^{2^M-1} e^{-2i\pi\nu(lt_F+c_l)}$$

Les contributions du processus de base et des différents choix de codage apparaissent clairement, et devraient de ce fait simplifier considérablement le travail des concepteurs de systèmes Ultra Wide Band : il suffit désormais de se pencher sur les différents termes constitutifs de la mesure spectrale et d'en déduire, de manière adaptée aux caractéristiques de l'environnement au sein duquel on prévoit de communiquer, les paramètres de codage optimisant le rapport qualité/coût énergétique tout en respectant les limitations spectrales officiellement en vigueur.

Par exemple, dans le spectre ci-dessus, on voit que l'on peut faire disparaître les raies énergétiques si gênantes en télécommunications dues au terme en μ_N (concentration de la puissance sur une fréquence ponctuelle) en annulant $E[Z^A]$, c'est à dire en utilisant une modulation d'amplitude centrée : la modulation binaire BPSK $+1/-1$ (Binary Polarity-Shift Keying) par exemple.

Il faut toutefois avouer qu'avec la complexification du modèle (ajout de l'effet multipath, etc.) ces formules spectrales déjà peu lisibles deviennent rapidement :

- extrêmement lourdes à écrire à la main ;
- difficiles à saisir et à se représenter intuitivement.

C'est à l'informatique qu'il appartient d'offrir, comme nous allons le voir dans la troisième partie de ce rapport, une solution efficace à ce double problème.

Chapitre 3

Analyse spectrale informatisée

Résumé

La partie qui précède s'efforçait de mettre en évidence les limites pratiques de l'analyse spectrale classique et de présenter les extensions révolutionnaires grâce auxquelles il nous est désormais possible d'explicitier le spectre de n'importe quel signal en fonction de la mesure spectrale de Bartlett du processus ponctuel dont il dérive et des caractéristiques spectrales des transformations physiques qui s'y sont appliquées. Nul besoin, par conséquent, de tester inlassablement les prototypes des systèmes successivement imaginés jusqu'à ce que les analyses expérimentales effectuées se conforment enfin à peu près aux spécifications requises : la formule isométrique fondamentale crée un lien direct entre les différents choix déterminant le système et les caractéristiques spectrales des signaux qui en devraient résulter.

L'enjeu, maintenant, est de rendre algorithmique ce lien mathématique : il s'agit plus précisément d'implémenter les fonctionnalités formidables offertes par la formule impulsionnelle de filtrage, afin que les concepteurs de systèmes de communication n'aient qu'à spécifier les divers paramètres dont dépend le support initial de l'information, les différents types de modulation choisis pour s'y greffer et les caractéristiques des distorsions que l'environnement cible est susceptible de provoquer, pour voir immédiatement apparaître à l'écran une représentation graphique de la répartition statistique, le long de la demi-droite des fréquences, de l'énergie véhiculée par les signaux engendrés. C'est à cette automatisation sans précédent de l'analyse spectrale prévisionnelle qu'était précisément destiné le stage que j'ai effectué.

Le chapitre 5 consiste en une présentation d'ensemble du travail d'implémentation réalisé : après avoir justifié le langage choisi, nous y dépeignons l'architecture globale adoptée et insistons sur les aspects algorithmiques qui nous ont semblé d'intérêt. Une description exhaustive des possibilités offertes par le programme, illustrée par quelques-uns des graphes obtenus, fait enfin l'objet du chapitre 6.

3.1 Vue d'ensemble du module implémenté

3.1.1 Justification du langage choisi

C'est sous la forme d'un module Matlab – environnement qui m'était pourtant absolument inconnu jusque-là – que j'ai choisi d'implémenter l'analyseur spectral de signaux à codage impulsionnel dont ce rapport fait état. Cette décision pourra à première vue surprendre l'adepte

de la programmation orientée objet habitué à des langages moins spécifiques donc plus puissants, rendant possibles entre autres la compilation sous forme d'un exécutable autonome et le design d'une interface graphique soignée agréable à l'utilisation. L'environnement offert par Matlab présente pourtant – dans le cadre particulier qui nous occupe tout du moins – des avantages considérables par lesquels il nous paraît important de justifier notre choix.

Rappelons avant toute chose que la motivation première de ce projet reste la simplification du travail de conception effectué par les ingénieurs en traitement du signal. Or Matlab s'est depuis longtemps indéniablement imposé dans ce domaine comme la plate-forme informatique de référence : la richesse des possibilités qu'il offre en fait en effet un outil incontournable pour la simulation, la modélisation, le calcul, le traitement et la représentation des données physiques ou biologiques sous toutes leurs formes. Il était donc naturel de vouloir exploiter les ressources mathématiques et graphiques d'un tel environnement pour mener à bien notre premier pas en direction de l'analyse spectrale informatisée.

Le second argument en faveur de notre décision est la nécessité d'obtenir des résultats exportables sous une forme standard, afin de ne pas se limiter à la simple représentation graphique du spectre recherché comme cela aurait été le cas si nous avions opté pour le développement d'un exécutable totalement autonome : il paraît essentiel en effet qu'il soit possible de réutiliser ultérieurement les spectres obtenus, de les incorporer dans des formules plus complexes, d'en modifier les termes de manière indépendante, d'en extraire certaines composantes particulières, de les comparer aux masques des diverses contraintes à respecter, de les représenter sous des angles différents...

Aussi la création d'une fonction Matlab prenant en entrée les diverses caractéristiques de modulation et d'altération et produisant en sortie le spectre du signal correspondant, sous forme d'un vecteur de données tout à fait standard accompagné de sa représentation graphique adaptée, nous a-t-elle paru particulièrement convenir à l'utilisation pratique à laquelle se voulait destiné notre analyseur spectral.

3.1.2 Architecture globale

Comme nous l'avons déjà souligné, la redoutable efficacité des méthodes théoriques décrites dans le chapitre 4, si centrales pour notre projet, résultait fondamentalement de leur faculté à tirer enfin véritablement parti de la remarquable modularité des signaux tels que les conçoivent les ingénieurs en télécommunication. C'est pourquoi il nous a paru essentiel de tenter de transposer cette construction modulaire, autant que faire se peut, jusque dans l'utilisation même du logiciel.

Le programme fonctionne donc selon le principe suivant : en l'absence de tout argument, la mesure spectrale de Bartlett d'une simple grille régulière, support élémentaire vierge de toute information, est représentée graphiquement sur un domaine fréquentiel adapté (figure 3.1) ; libre ensuite à l'utilisateur de complexifier à volonté ce processus ponctuel minimal jusqu'à obtention de la forme cherchée, par ajout successif et modulaire des transformations usuelles décrites dans le second chapitre. Il lui suffit simplement pour cela d'énumérer un à un les mots-clés facultatifs correspondant à ces transformations successives en les accompagnant s'il le souhaite de valeurs numériques afin d'en personnaliser les différents paramètres.

Plus précisément, les mots-clés et leurs attributs personnalisables lui permettent de :

- spécifier lui-même les différents paramètres temporels dont dépend la grille régulière initiale si les valeurs par défaut ne lui conviennent pas ;

- décorer le support élémentaire ainsi calibré des différentes combinaisons de modulation (amplitude, position) par lesquels il entend traduire l’information à transmettre, en précisant éventuellement les différents symboles de codage qu’il souhaite utiliser et leurs probabilités d’occurrence si les réglages prédéfinis ne le satisfont pas ;
- doter le système ainsi obtenu d’une prise en charge multi-utilisateurs en choisissant parmi plusieurs types d’identification naturellement cumulables (time-hopping, polarity-hopping) et en spécifiant facultativement la signature à utiliser ;
- modéliser l’influence du canal sur la transmission en ajoutant des pertes occasionnelles, de l’instabilité temporelle et/ou des distorsions dues au phénomène de multipath-fading, les distributions de tous ces phénomènes aléatoires étant bien entendu personnalisables à volonté pour modéliser le plus fidèlement possible l’environnement cible ;
- filtrer le processus ponctuel marqué qui en résulte finalement afin de donner une forme physique aux impulsions ponctuelles, cela en choisissant parmi une liste de motifs impulsionnels standard ou en spécifiant mathématiquement la fonction par laquelle doit se faire la convolution impulsionnelle ;
- contrôler, dans le cas où les procédures d’ajustement automatique ne conviendraient pas, le style graphique, la résolution en temps et en fréquence, l’étendue du domaine sur lequel le spectre doit être calculé, ainsi que bon nombre d’autres paramètres intéressants ;
- profiter de diverses options supplémentaires extrêmement utiles telles que la génération graphique d’une réalisation temporelle aléatoire du signal conformément aux statistiques qui le régissent, la séparation, au sein de la mesure spectrale obtenue, entre raies ponctuelles et densité continue, le calcul des parts énergétiques respectives de ces dernières et de la puissance moyenne totale...

Adopter une architecture dans laquelle l’utilisateur est chargé d’explicitier lui-même exhaustivement tous les réglages nécessaires au nom d’une puissance d’expression entière, ou bien lui préférer un système bien plus simple d’utilisation proposant une liste finie d’options prédéfinies se voulant statistiquement satisfaisantes mais ne laissant en contrepartie que peu de liberté à l’utilisateur ? Il n’existe pas de réponse tranchée à ce dilemme universel. C’est donc à ce qui nous a semblé en être un juste milieu que nous avons choisi en somme de nous placer, en proposant à l’utilisateur de choisir ses mots-clés parmi une liste finie suffisante (puisque incluant toutes les transformations usuelles décrites dans la première partie de ce rapport), tout en le laissant totalement libre de spécifier lui-même les caractéristiques de ces transformations à chaque fois que les valeurs prévues par défaut ne le satisferaient pas.

Le résultat informatiques de ces décisions conceptuelles est une procédure Matlab modulaire (`PulseSpectra.m`) admettant en argument une liste (éventuellement vide) de chaînes de caractères (les mots-clés) disposées dans un ordre quelconque, chacune d’elles pouvant être immédiatement suivie d’une ou plusieurs valeurs numériques ou littérales facultatives devant remplacer par leur présence les réglages par défaut correspondants. La procédure calcule alors les caractéristiques fréquentielles et/ou temporelles du signal obtenu, puis en donne une repré-

sentation graphique ajustée conformément aux réglages éventuellement spécifiés. Le vecteur des valeurs du spectre obtenu est enfin passé à l'environnement appelant et peut ainsi être réutilisé par celui-ci.

Concernant l'écriture du code à proprement parler enfin, l'optimisation de certains algorithmes vis à vis de la complexité totale nous a paru digne d'intérêt : l'objet de la section qui suit est donc de mettre en lumière le cheminement qui nous y a peu à peu conduit tout en évaluant quantitativement le gain de performances obtenues.

3.1.3 Aspects algorithmiques

Variables pertinentes pour l'étude de complexité

Dans le but de comparer ensuite précisément les différentes stratégies algorithmiques en fonction des performances auxquelles elles aboutissent, il nous a d'abord fallu choisir intelligemment la variable dont il est pertinent d'étudier l'influence asymptotique sur le coût temporel.

Pour la plupart des algorithmes, le choix pertinent est la taille mémoire des données fournies au programme, c'est à dire ici le nombre de transformations opérées sur le processus initial. Cependant, dans le cas particulier qui nous occupe, cette grandeur ne s'élève jamais suffisamment pour en justifier une étude asymptotique : rappelons en effet qu'elle ne résulte jamais que de l'énumération des différentes options choisies, en nombre grossièrement constant. De toute manière, grâce à la modularité de la formule isométrique fondamentale, la liste des mots-clés passés en argument n'est parcourue qu'une seule fois et les termes numériques correspondants (moyennes, variances, fonctions caractéristiques, etc) sont calculés au fur et à mesure pour venir s'insérer directement à leur place dans la mesure spectrale qu'il s'agit de retourner, sans qu'il y ait besoin de recommencer tout le calcul à chaque fois. La complexité globale par rapport au nombre de transformations opérées est donc simplement linéaire et son étude ne présente guère d'intérêt.

Les performances se sont révélées en revanche beaucoup plus sensibles en pratique au nombre de points du domaine fréquentiel sur lequel il s'agit d'évaluer le spectre final. En effet, tous les termes modulaires dont dépend le résultat (spectre de Bartlett de la grille initiale, fonctions caractéristiques des variables aléatoires contrôlant la position, transformée de Fourier du motif de filtrage, etc) sont des fonctions de la fréquence ν et leur calcul doit par conséquent se faire sur chacun des points du domaine. C'est donc la taille N des vecteurs à manipuler dans toutes les opérations effectuées par le programme qui apparaît comme le paramètre véritablement pertinent pour étudier la complexité des algorithmes utilisés. Cette variable n'est toutefois pas une donnée explicitement fournie ; elle est à choisir en fonction de deux paramètres significatifs :

- la largeur Λ de l'intervalle de fréquences sur lequel on désire calculer puis visualiser le spectre recherché ;
- la résolution fréquentielle R_f , c'est à dire le nombre de points à prendre en compte par unité de fréquence : de cette dernière dépend bien sûr la qualité de la représentation obtenue.

Le nombre total de points du domaine s'écrit alors fort logiquement :

$$N = R_f \times \Lambda \quad (3.1)$$

Précisons donc un peu les contraintes qui limitent chacun de ces deux paramètres et les degrés de liberté dont on dispose pour décider de leur valeur :

Dans le cas particulier qui nous occupe, la résolution du domaine fréquentiel est malheureusement imposée par les raies spectrales régulièrement espacées constituant le spectre de Bartlett de la grille régulière initiale utilisée (formule 2.21) : si l'on veut pouvoir les visualiser, la distance séparant deux points consécutifs du domaine fréquentiel doit en effet impérativement diviser la distance élémentaire séparant deux raies spectrales consécutives, ce qui s'écrit

$$R_f = q \times t_S \quad (3.2)$$

Où t_S est la période temporelle de la grille et q un entier strictement positif que l'on choisira d'autant plus grand que la qualité souhaitée est élevée.

La largeur Λ de la bande de fréquence n'est pas une donnée explicitement fournie : elle dépend en fait de l'étendue réelle sur laquelle la courbe spectrale que l'on cherche à évaluer est significative ; plus précisément, puisque la mesure spectrale de puissance est une mesure finie, la courbe correspondante s'annule à l'infini et la largeur de bande Λ doit être choisie égale à l'étendue pertinente au-delà de laquelle le spectre cherché peut-être considéré comme nul.

On voit ici se dessiner un problème épineux : dans la mesure où une telle atténuation peut en réalité se faire arbitrairement lentement, nous ne pouvons fixer par avance l'étendue du domaine fréquentiel sur lequel il nous faut calculer le spectre final : celle-ci dépend justement de la forme que le spectre prendra après calcul ! Ce cercle vicieux nous contraint à utiliser une procédure d'ajustement automatique par tâtonnements successifs élargissant progressivement le domaine de travail Λ et recalculant à chaque fois le spectre résultant jusqu'à ce que l'aire de la courbe obtenue n'évolue pratiquement plus, signe que l'on aura atteint une limite satisfaisante.

Le coût temporel explosif de cette multiplication non bornée des calculs sur des vecteurs dont la taille N est de plus en plus grande (Λ pouvant devenir arbitrairement grand alors que R_f est limité inférieurement par la formule 3.2) a rendu impératif le développement de stratégies d'ajustement adaptées utilisant des algorithmes de complexité minimale. C'est à leur description progressive et comparée, d'une manière qui respecte fidèlement la chronologie réelle du cheminement qui nous y a mené, que sont consacrées les sections qui suivent.

Limites de la première stratégie envisagée

Nous avons dégagé plus haut une variable qui s'impose comme le paramètre pertinent pour l'étude des performances de notre programme : la taille N du domaine fréquentiel de travail. Comme l'établit la relation 3.1, celle-ci est le produit de la résolution fréquentielle R_f par la largeur de bande Λ . Or nous avons vu que la première est limitée inférieurement par les raies spectrales dues à la grille initiale, tandis que la seconde peut être arbitrairement élevée selon le type de spectre qu'il s'agit de calculer. De ce double constat résulte l'impossibilité de borner par avance le paramètre N , et donc la nécessité d'une procédure d'ajustement automatique

adaptant progressivement ce dernier, par une série arbitrairement longue de tâtonnements successifs, au spectre arbitrairement large cherché.

Fort heureusement pour les performances du programme, une première remarque astucieuse nous permet d'éviter le recalcul complet du spectre, c'est à dire de tous les termes modulaires dont il dépend, à chacune des étapes de l'ajustement. En effet, seul l'un d'entre eux détermine en réalité l'étendue spectrale de l'ensemble : il s'agit du terme $|\omega(\nu)|^2$, qui, comme on l'a vu dans l'exemple du standard TH-IR, apparaît en facteur devant chacune des expressions dont la mesure spectrale cherchée est la somme et en impose ainsi l'enveloppe globale. Par le célèbre lemme de Riemann-Lebesgue (voir par exemple [Bré02] p.15), la transformée de Fourier $\hat{\omega}$ du motif impulsionnel ω utilisé pour le filtrage s'annule nécessairement à l'infini, et l'étendue de l'intervalle de fréquences sur lequel se fait l'atténuation suffit par conséquent à déterminer la largeur Λ de la bande le long de laquelle la courbe du spectre final sera significative.

Il est donc suffisant de restreindre la procédure d'ajustement au seul calcul progressif, par une série non bornée de tâtonnements successifs, de l'étendue à priori inconnue du support de la transformée de Fourier du motif impulsionnel ω que spécifie l'utilisateur.

Autre avantage engendré par cette remarque : la célèbre identité de Parseval-Plancherel (c.f. [Bré02] p.157), selon laquelle

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\omega}(\nu)|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} |\omega(t)|^2 dt \quad (3.3)$$

nous donne directement accès à l'aire théorique totale à atteindre (membre de gauche) puisque celle-ci est tout simplement égale à l'énergie du motif impulsionnel (membre de droite), terme aisément calculable en temps constant sachant que la définition temporelle du signal nous est donnée par l'utilisateur et que le domaine temporel, lui, est borné par t_C .

Dans la mesure où c'est essentiellement au calcul de $|\hat{\omega}(\nu)|^2$ que sera ainsi consacré le corps de la boucle non bornée de la procédure, le choix d'un algorithme performant pour le calcul de la transformée de Fourier prend une importance décisive dans notre combat contre l'explosion du temps de calcul. Voyons donc d'un peu plus près comment implémenter efficacement une telle opération mathématique.

En informatique, une fonction ne peut être évaluée qu'en un nombre fini de points, et la transformation de Fourier y est donc remplacée par un algorithme discret : la transformée de Fourier discrète (DFT en anglais). Son principe est le suivant : le motif de filtrage ω dont on cherche à calculer la transformée de Fourier est une fonction nulle hors d'un certain compact, disons $[0; \delta]$ ($\delta > 0$). En exprimant l'intégrale à calculer comme la limite d'une somme discrète de Riemann, il est possible d'obtenir avec une précision aussi grande que voulue les valeurs de $\hat{\omega}$ en n'importe quel point $\frac{k}{\delta}$, $k \in \mathbb{Z}$ du moment que le nombre de valeurs connues du signal initial ω est suffisamment élevé. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}\left(\frac{k}{\delta}\right) &= \int_0^\delta \omega(t) e^{-2i\pi \frac{k}{\delta} t} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \omega\left(n \frac{\delta}{N}\right) e^{-2i\pi \frac{n}{N} k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'algorithme DFT prend donc en entrée un vecteur

$$[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}] = \left[\omega(0), \omega\left(\frac{\delta}{N}\right), \dots, \omega\left(\frac{N-1}{N}\delta\right) \right]$$

contenant les valeurs de la fonction ω en N points régulièrement espacés et retourne le vecteur de même taille $[y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]$ contenant, au facteur $\frac{\delta}{N}$ près, les approximations au rang N des valeurs de $\hat{\omega}$ en les N points régulièrement espacés $[0, \frac{1}{\delta}, \dots, \frac{N-1}{\delta}]$:

$$\forall k \in [0; N - 1], y_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{n}{N} k} \approx \frac{N}{\delta} \hat{\omega}\left(\frac{k}{\delta}\right)$$

La complexité quadratique de l'algorithme naïf calculant ces N sommes de N termes peut être améliorée en faisant appel à une stratégie "diviser pour régner" (c.f. [THCS04] chapitre 30) : une telle méthode, baptisée transformée rapide de Fourier (FFT en anglais), tire parti des propriétés particulières des racines complexes de l'unité pour ramener le calcul de la DFT d'un vecteur de taille N à celui de deux vecteurs de taille $\frac{N}{2}$. L'algorithme qui en résulte, de complexité $O(N \log N)$, est celui qui est prédéfini dans le module général de calcul de Matlab. Il s'avère malheureusement, comme nous allons le voir tout de suite, inadapté à l'usage que l'on veut en faire ici.

Grâce aux remarques faites au début de cette section, nous pouvons nous contenter dans la boucle interne de la procédure d'ajustement automatique d'un simple appel à l'algorithme FFT (complexité $O(n \log n)$), du passage au carré du module dans le tableau des valeurs retournées ($O(n)$) puis du calcul de l'aire de la courbe ainsi obtenue ($O(n)$) afin que cette dernière soit comparée (temps constant) à l'aire théorique totale ; si la différence est supérieure au seuil fixé, la boucle est alors relancée sur un domaine plus grand. Aussi la complexité d'une seule étape de la procédure est-elle un $O(n \log n)$ où n est la taille courante du domaine spectral.

Quantifions un peu la complexité totale qui en résulte : si le support de la transformée de Fourier du motif ω s'étend en réalité sur une longueur Λ , la taille finale à atteindre pour le vecteur représentant le domaine de travail s'écrit comme nous l'avons déjà vu : $N = \Lambda \times R_f$. De même, si la procédure d'ajustement élargit à chaque étape l'intervalle fréquentiel d'une longueur Λ_0 , alors la taille du vecteur passé au module FFT s'incrémente à chaque fois de $N_0 = \Lambda_0 \times R_f$. En pseudo-code, la procédure d'ajustement automatique prend alors la forme :

```

00 :  p ← 1
01 :  n ← p × N0
02 :   $\hat{\omega} \leftarrow FFT(\omega(0), \omega(R_f), \dots, \omega(\frac{n-1}{n} R_f))$ 
03 :  EnergieReprésentée ← 0
04 :  For k = 1 to n
05 :      EnergieReprésentée ← EnergieReprésentée +  $|\hat{\omega}(k)|^2$ 
06 :  Next k
07 :  If EnergieTotale - EnergieReprésentée > Seuil
08 :      Then p ← p + 1 ; Goto 1
09 :      Else Return  $\hat{\omega}$ 
10 :  EndIf

```

Où la variable 'EnergieTotale', représentant la valeur théorique de l'aire à atteindre, a été précédemment calculée en temps constant grâce à l'identité 3.3, et où la constante 'Seuil' correspond à un faible pourcentage (nous l'avons en pratique fixé à 0.5%) de cette énergie

totale. La complexité totale de la procédure d'ajustement est donc :

$$\sum_{p=1}^{\frac{N}{N_0}} O((p \times N_0) \log(p \times N_0)) = O(N^2 \log N) \quad (3.5)$$

Notons que l'étendue fréquentielle Λ arbitrairement grande que peut en pratique couvrir un spectre UWB (souvent une dizaine de GHz) et la très haute résolution fréquentielle qu'implique la contrainte $R_f = q \times t_S$ (t_S étant en pratique de l'ordre de la microseconde) impliquent dans les faits une utilisation du programme sur des vecteurs dont la taille N excède bien souvent la centaine de milliers, ce qui justifie la pertinence de ce résultat asymptotique. La complexité plus que quadratique ainsi mise en évidence rend l'utilisation d'une telle stratégie absolument inenvisageable, comme nous l'avons d'ailleurs pu constater en pratique. Il nous a donc fallu trouver une meilleure méthode.

Solution adoptée et résultats obtenus

Deux améliorations successives de la procédure d'ajustement automatique et de l'algorithme FFT nous ont finalement permis de nous ramener à une complexité linéaire tout à fait acceptable.

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'étendue à priori inconnue du spectre à calculer nous impose son atteinte progressive par tâtonnements successifs, en élargissant pas à pas le domaine de fréquences, et donc du même coup le nombre N de points sur lequel l'algorithme FFT doit travailler (puisque la contrainte minorant R_F l'empêche de compenser cette extension progressive). Or il est assez frustrant de constater que les N points régulièrement espacés en lesquels sont évaluées les valeurs retournées par cet algorithme repartent obligatoirement à chaque fois de la fréquence zéro : utilisé comme on l'a fait dans notre première tentative, un tel algorithme calcule donc obligatoirement à chaque étape les valeurs de $\hat{\omega}(\nu)$ en $0, \frac{1}{R_f}, \dots, \frac{N-1}{R_f}$ alors que seuls les derniers points correspondant à la nouvelle extension du domaine n'ont pas déjà été calculés lors des étapes précédentes. La remarque mathématique simple qui suit nous a permis d'éviter cette redondance extrêmement coûteuse.

Remarque 14. Soit $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable quelconque et $\nu_0 \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Alors, en notant $f_0 : t \mapsto e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)$, on a :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}(\nu + \nu_0) = \hat{f}_0(\nu) \quad (3.6)$$

Plutôt que de recalculer à chaque étape la transformée de Fourier du motif ω depuis la fréquence zéro, on peut donc modifier intelligemment le motif lui-même pour que la transformée de Fourier à partir de zéro qui en résulte corresponde en réalité à celle du motif initial décalée d'autant en fréquence. En d'autres termes, on peut voir l'algorithme FFT comme une fenêtre $[0; \frac{N-1}{R_f}]$ dont la borne inférieure est fixe et l'autre réglable, et qui donne vue sur la portion correspondante de la transformée de Fourier du signal envoyé à l'algorithme : puisque la fenêtre n'est pas déplaçable le long de la courbe cherchée mais seulement allongeable à volonté (ce qui devient vite trop coûteux comme nous l'avons vu dans la première stratégie), toute l'astuce consiste à déplacer la courbe elle-même dans l'autre sens jusqu'à ce que le domaine qui nous intéresse arrive à la hauteur de la fenêtre.

La taille de la fenêtre d'affichage sur laquelle on travaille à chaque étape de la procédure d'ajustement est alors constamment égale à N_0 , et chacun des $\frac{N}{N_0}$ appels à l'algorithme FFT

se fait par conséquent en temps constant. Seul pèse désormais, à l'intérieur de la boucle, le calcul en $O(n)$ de l'énergie représentée, et la complexité de la procédure totale passe ainsi immédiatement de $O(N^2 \log N)$ à $O(N^2)$.

Mieux, on peut dès lors conserver d'une étape à l'autre la somme totale de l'énergie représentée jusque là pour n'avoir qu'à y ajouter à chaque fois la nouvelle contribution correspondant à la position courante de la fenêtre. La boucle est alors tout entière résolue en temps constant, et la complexité de la procédure d'ajustement devient de ce fait linéaire comme le prouve, avec les mêmes notations que précédemment, le pseudo-code détaillé qui suit :

```

00 : EnergieReprésentée ← 0
01 :  $\nu_0 \leftarrow 0$ 
02 :  $\hat{\omega} \leftarrow [ ]$ 
03 :  $\hat{\omega}_c \leftarrow FFT \left( \omega(0), e^{2i\pi\nu_0 R_f} \omega(R_f), \dots, e^{2i\pi\nu_0 \frac{N_0-1}{N_0} R_f} \omega\left(\frac{N_0-1}{N_0} R_f\right) \right)$ 
04 :  $\hat{\omega} \leftarrow \text{Concat}(\hat{\omega}, \hat{\omega}_c)$ 
05 : For k = 1 to  $N_0$ 
06 :     EnergieReprésentée ← EnergieReprésentée +  $|\hat{\omega}_c(k)|^2$ 
07 : Next k
08 : If EnergieTotale - EnergieReprésentée > Seuil
09 :     Then  $\nu_0 \leftarrow \nu_0 + \Lambda_0$ ; Goto 3
10 :     Else Return  $\hat{\omega}$ 
11 : EndIf

```

Autre avantage de cette stratégie : le nombre total N de valeurs qui seront finalement calculées étant désormais le même quelle que soit la taille de la fenêtre que l'on déplace, le choix du pas Λ_0 n'a plus aucune influence sur la performance globale et peut donc être choisi suffisamment petit pour que l'ajustement soit aussi minutieux que voulu.

Nous montrons ensuite comment nous sommes parvenus à accélérer encore cette procédure en diminuant considérablement le facteur multiplicatif imposant qui se dissimule derrière le $O(N)$.

L'intérêt fondamental de la stratégie que l'on vient de développer tient essentiellement au fait qu'en découpant la bande de fréquence en fenêtres de taille constante Λ_0 , on effectue chaque appel à l'algorithme FFT sur un vecteur de taille fixe N_0 . Si l'on y regarde de plus près, le coût correspondant, bien que constant, s'avère néanmoins beaucoup plus important que nécessaire : nous avons en effet établi plus haut (formule 3.4) que dans l'algorithme FFT classique, la période des échantillons réguliers de $\hat{\omega}$ retournés est l'inverse de la limite supérieure δ du support du signal d'entrée ω . Puisque nous voulons ici obtenir un domaine fréquentiel dont les points sont disposés tous les $\frac{1}{R_f}$, il nous faut donc adopter $\delta = R_f$. La contrainte 3.2 dues aux raies spectrales de la grille régulière impose donc :

$$\delta = q \times t_S \tag{3.7}$$

Où l'on rappelle que q est un entier strictement positif que l'on peut choisir aussi élevé que la qualité de la courbe tracée l'exigera.

Autrement dit, bien que la largeur temporelle du motif impulsionnel ω soit nécessairement largement inférieure à la période t_S d'un symbole (un symbole étant justement composé d'un grand nombre de ces impulsions espacées d'une quantité bien précise, auquel il faut parfois même ajouter la durée de sécurité t_G), l'algorithme FFT en exige pourtant les valeurs

échantillonnées le long d'un intervalle de longueur au moins égale à t_S . La plus grande partie du vecteur de taille N_0 ainsi demandé est donc remplie de zéros inutiles !

Aussi avons-nous réécrit un algorithme de transformée de Fourier discrète plus efficace¹ que la FFT lorsque la taille des données est constante et que la largeur temporelle réelle du motif impulsionnel est nécessairement limitée par la durée élémentaire t_C consacrée à chaque impulsion :

$$\frac{R_f}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \omega\left(n \frac{R_f}{N_0}\right) e^{-2i\pi \frac{n}{N_0} k} = \frac{R_f}{N_0} \sum_{n=0}^{n_0} \omega\left(n \frac{R_f}{N_0}\right) e^{-2i\pi \frac{n}{N} k} \quad (3.8)$$

Où n_0 est le plus petit entier n au-delà duquel $n \frac{R_f}{N_0} > t_C$, à savoir la partie entière de $N_0 \frac{t_C}{R_f}$. Nous divisons ainsi le nombre de termes à calculer d'un facteur

$$\frac{R_f}{t_C} = q \frac{t_S}{t_C} = q \frac{l_0 \times t_F + t_G}{t_C}$$

terme en général de l'ordre de 10000 (pour le facteur de qualité $q=25$ utilisé par défaut, le nombre standard de $l_0 = 32$ impulsions par symbole et les périodes de 'Frame' t_F et de 'Gard' t_G raisonnables de 5 fois t_C).

Les diverses astuces précédemment décrites ont ainsi permis l'élaboration d'une stratégie efficace ramenant à une complexité linéaire de coefficient relativement bas la procédure gérant l'ajustement automatique du domaine spectral et le calcul du terme $|\hat{\omega}(\nu)|^2$. Tous les autres termes constituant le spectre à retourner sont – il suffit d'un coup d'œil sur le résultat obtenu dans le cas TH-IR pour s'en convaincre – soit des vecteurs de taille N facilement calculables en un temps linéaire (mesure spectrale de Bartlett μ_N de la grille initiale, terme en $\sum_{l=0}^{l_0-1} e^{-2i\pi\nu(lt_F+c_l)}$ dû au Time-Hopping, fonction caractéristique $\phi_Z(\nu)$ des diverses variables aléatoires de déplacement, etc), soit de simples facteurs multiplicatifs déterminables en temps constant (intensité du processus initial, moyenne et variance des différentes marques modifiant l'amplitude, etc). Enfin, la réunion de tous ces termes modulaires pour donner le spectre final se fait en $O(N)$ par leur addition et/ou multiplication point par point, et la représentation graphique finale est encore une fonction globalement linéaire du nombre de points à tracer.

Il résulte de tout cela que notre analyseur de spectre tout entier fonctionne en un temps simplement proportionnel à l'étendue fréquentielle du spectre qu'il a pour tâche de calculer. Les résultats pratiques se sont d'ailleurs avérés tout à fait satisfaisants (contrairement à ceux de la première stratégie) puisque même les spectres les plus larges et complexes que l'on a essayé de tracer ont été obtenus presque instantanément.

3.2 Panorama des possibilités offertes

Ce dernier chapitre se donne pour but la description détaillée de l'ensemble des options prises en charge par le logiciel et des mots-clés correspondants, afin de donner au lecteur une idée plus précise de l'étendue réelle des possibilités offertes par la combinaison quelconque de celles-ci. En outre, nous avons choisi d'illustrer chacune de ces options par un graphe

¹Attention, cet algorithme n'est absolument pas asymptotiquement meilleur que le FFT : il n'est valable que pour une constante $N_0 \frac{t_C}{R_f}$ relativement petite (c'est toujours le cas ici) et tire parti des spécificités particulières du problème qui nous occupe.

réellement obtenu, la liste des mots-clés qu'il a fallu fournir au programme pour qu'il retourne celui-ci étant à chaque fois précisée en légende.

3.2.1 Paramétrisation du support vierge initial

Un premier éventail de mots-clé permet de configurer la grille régulière initiale sur laquelle viendront ensuite se greffer toutes les transformations envisagées. Le seul paramètre caractérisant une telle grille est la période t_S : elle correspond en pratique à la durée régulière séparant les différents symboles de codage en l'absence de toute modulation de position, et est déterminée par le choix de quatre grandeurs significatives : l'unité temporelle élémentaire t_C du système ('ChipTime'), le nombre d'impulsions l_0 composant chaque symbole, la taille n_F réservée à chacune des impulsions ('FrameSize'), et la taille n_G du délai de sécurité terminant chaque symbole ('GardSize'). On obtient alors :

$$t_S = (l_0 \times n_F + n_G) \times t_C \quad (3.9)$$

Chacun de ces paramètre peut être personnalisé dans le cas où les valeurs par défaut ne conviendraient pas. Les mots-clé correspondants sont les suivants :

'chiptime' : le mot-clé '*chiptime*', immédiatement suivi d'un réel positif quelconque, fixe l'unité temporelle élémentaire t_C du système à la valeur spécifiée, en secondes. Si ce mot-clé est omis, le valeur par défaut est 5 ns.

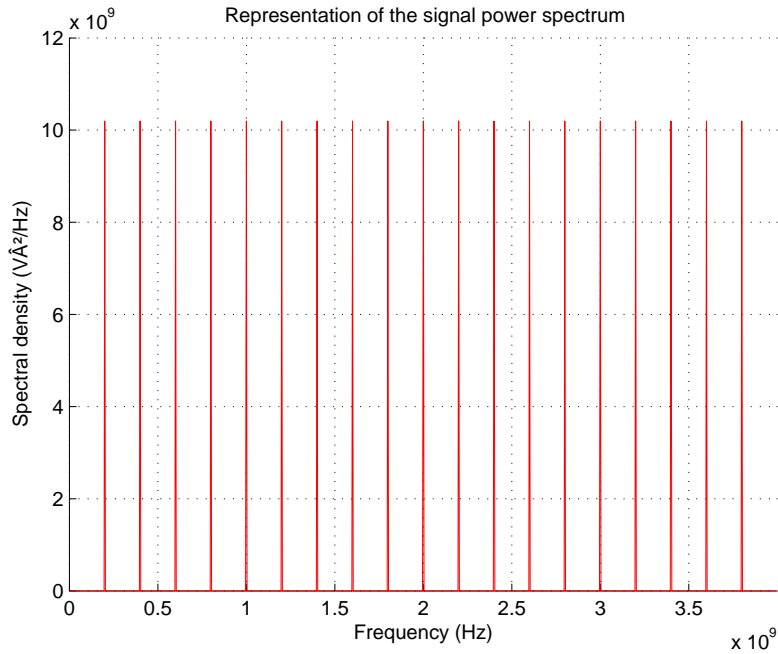


FIG. 3.1 – Raies spectrales constituant le spectre d'une grille régulière de base (\mapsto `PulseSpectra('freq',[0;4e9])`)

'framesize' : la taille $n_F \times t_C$ réservée à chacune des impulsions du symbole doit être suffisamment large pour permettre leur décalage conformément à la signature temporelle ('time-hopping'). Le mot-clé *'framesize'*, immédiatement suivi d'un entier strictement positif, permet à l'utilisateur de choisir la taille n_F appropriée. Si ce mot-clé est omis, le réglage par défaut correspond à la taille minimale autorisée par la signature spécifiée, à savoir $(1 + \max(THSignature))$.

'guardsize' : afin de s'assurer que les déplacements aléatoires du symbole (dus à la modulation de position et/ou aux éventuels effets d'instabilité temporelle) ne résulteront pas en la superposition de deux symboles consécutifs, il est fréquent en pratique de se donner un délai de sécurité ('guard time') à la fin de chaque symbole. L'étendue de ce délai peut être personnalisée par le mot-clé *'guardsize'* immédiatement suivie du nombre entier n_G d'unités temporelles élémentaires t_C que l'on souhaite imposer. Le réglage par défaut est la valeur raisonnable de $2 \times \max(PPMAmplitudes)$, qui suffit à éviter la superposition.

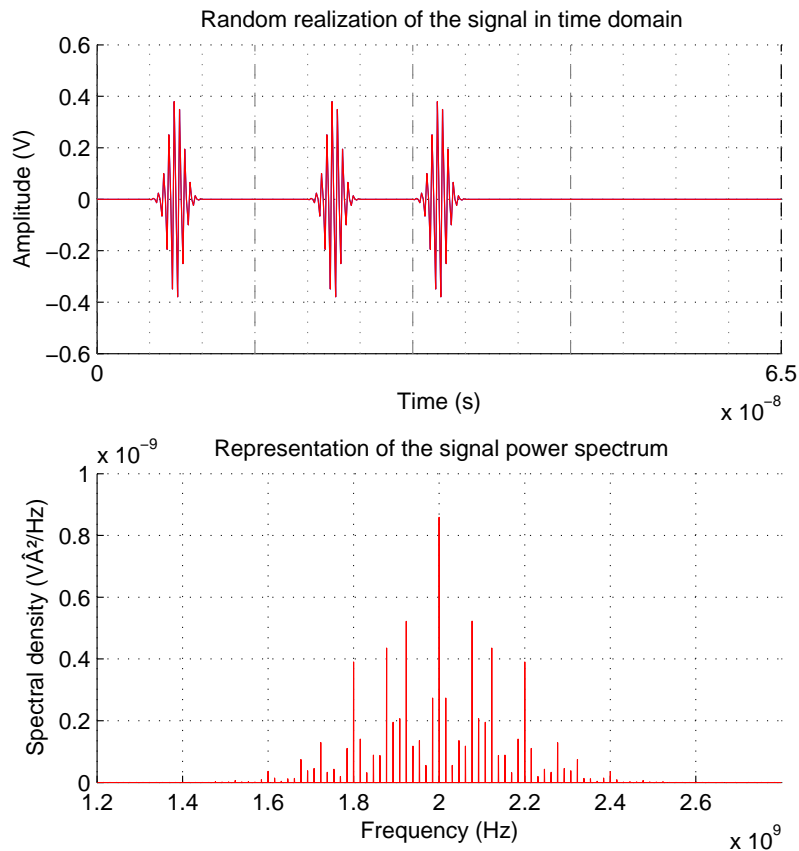


FIG. 3.2 – Exemple d'organisation typique d'un symbole \rightarrow `PulseSpectra('filter','gws',5e-9,'th',[1,1,0],'guardsize',4,'framesize',3,'time',1)`

3.2.2 Spécification du motif de filtrage

Nous l'avons vu dans la section 1.1.3, une convolution impulsionnelle est nécessaire si l'on souhaite donner aux impulsions une forme physique réelle. Le mot-clé *'filter'* permet un tel filtrage. Il doit être immédiatement suivi d'une chaîne de caractères correspondant soit à l'un des motifs de filtrages standard prédéfinis, soit à la définition explicite de n'importe quelle fonction mathématique devant servir de réponse impulsionnelle. La largeur des motifs prédéfinis peut être personnalisée si la valeur par défaut de $\frac{t_c}{2}$ ne convient pas : il suffit pour cela d'indiquer derrière le nombre souhaité, en secondes.

Motifs standard prédéfinis

Les motifs impulsionnels prédéfinis ont été choisis pour correspondre le mieux possible à la pratique : nous sommes en effet allés interroger des experts en technologie des systèmes avancés afin d'adapter le logiciel à la nature réelle des signaux utilisés. Cela s'applique d'ailleurs d'une manière générale aux réglages par défaut proposés.

Motif rectangulaire :

La chaîne de caractères *'rec'* définit un motif rectangulaire simple.

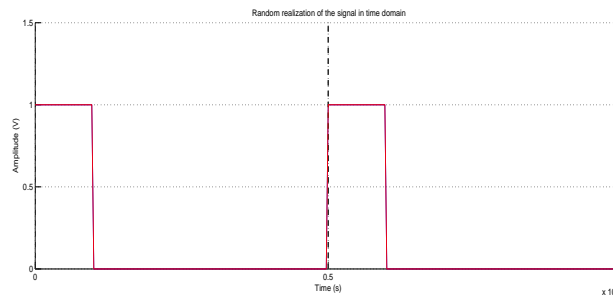


FIG. 3.3 – \rightarrow `PulseSpectra('filter','rec',1e-9,'time',2)`

Motif triangulaire :

La chaîne de caractères *'tri'* définit un motif triangulaire simple.

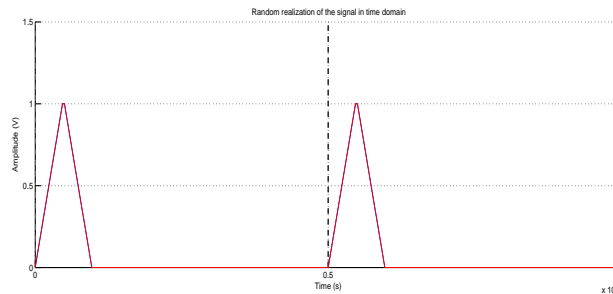


FIG. 3.4 – \rightarrow `PulseSpectra('filter','tri',1e-9,'time',2)`

Motif 'gaussian monocycle derivative' :

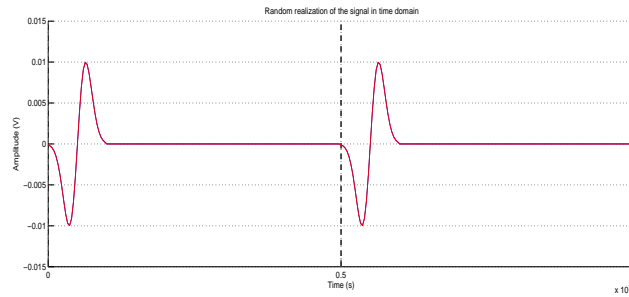


FIG. 3.5 – \rightarrow PulseSpectra('filter','gdr',1e-9,'time',2)

Le motif impulsionnel 'gaussian derivative', couramment utilisé en télécommunications, est obtenu comme son nom l'indique en dérivant simplement une courbe gaussienne dont la variance permet de régler l'étendue spectrale du signal qui en résultera. La chaîne de caractère correspondante est 'gdr'.

Motif 'gaussian windowed sine' :

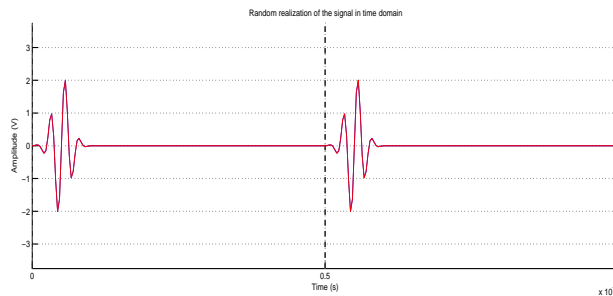


FIG. 3.6 – \rightarrow PulseSpectra('filter','gws',1e-9,'time',2)

La chaîne de caractère 'gws' correspond quant-à elle au motif 'gaussian windowed sine' obtenu en multipliant une courbe gaussienne par une simple sinusoïde. Ce dernier motif doit sa notoriété en télécommunications au fait que la variance de la gaussienne permet de jouer sur l'étendue de la bande spectrale résultante, tandis que la fréquence de la sinusoïde en contrôle la position centrale.

Fonction de filtrage personnalisée

Si ces motifs prédéfinis ne conviennent pas, l'utilisateur peut lui-même expliciter la définition mathématique de la réponse impulsionnelle qu'il souhaite voir utilisée : la variable temporelle à utiliser est t et le signal sera évalué sur l'intervalle $[0, PulseWidth]$.

Il est possible dans cette définition d'utiliser en outre comme paramètre toute variable locale utilisée dans le corps du programme. La constante *PulseWidth*, par exemple, peut s'avérer extrêmement utile pour adapter l'étendue du motif à la largeur autorisée.

3.2.3 Choix des différents types de codage

Notre programme autorise toute combinaison des deux types de modulation décrits dans la première partie de ce rapport.

Modulation d'amplitude

Nous l'avons vu, la modulation impulsionnelle d'amplitude (PAM en anglais) traduit l'information à transmettre en une variation spécifique de l'amplitude des pulsations. S'il est présent, le mot-clé *'pam'* ajoute une modulation de l'amplitude des impulsions. Un premier attribut optionnel peut suivre pour spécifier les différents symboles de codage possibles, sous la forme du vecteur des facteurs multiplicatifs correspondants. Au cas où cet attribut ferait défaut, le réglage prédéfini est la modulation binaire standard BPSK 1/-1, qui garantit comme on l'a vu la disparition des raies spectrales.

Si le vecteur des symboles est présent, un second vecteur peut facultativement venir en préciser les probabilités d'occurrences respectives. Si ce second vecteur est omis, la distribution est choisie uniforme. Précisons enfin que ce dernier vecteur, comme d'ailleurs tous les vecteurs de probabilité pris en charge par le programme, est automatiquement normalisé si la somme de ses éléments n'est pas égale à 1.

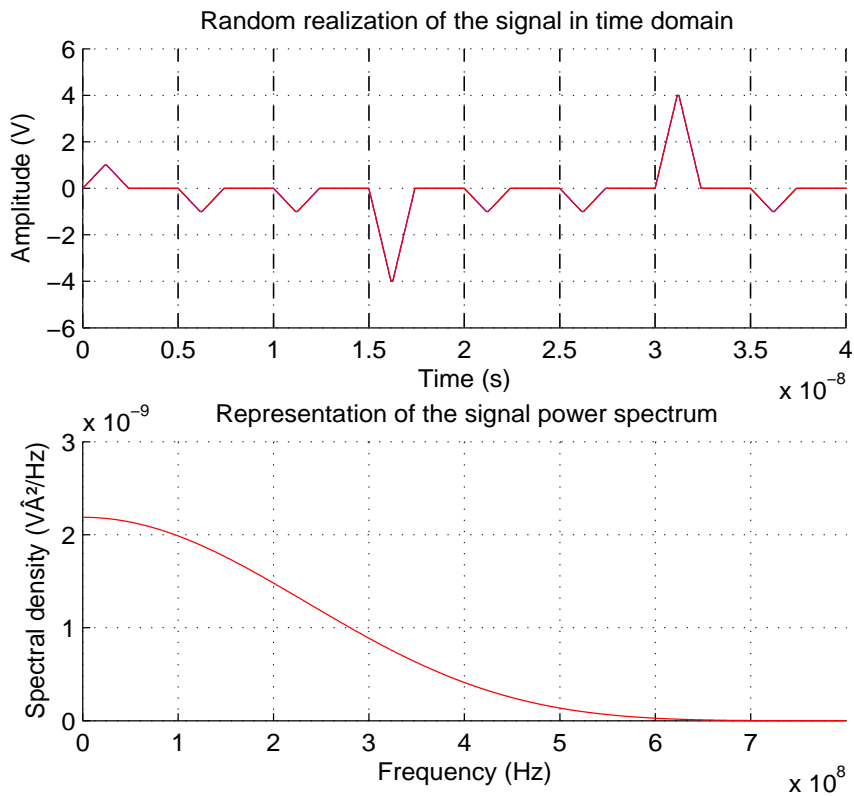


FIG. 3.7 – `PulseSpectra('filter','tri','pam',[1,4,-1,-4],[0.3,0.2,0.3,0.2],'time',8)`

Modulation de position

Dans la modulation impulsionnelle de position (PPM en anglais), l'information est au contraire véhiculée comme nous l'avons vu par la position des symboles relativement à la grille régulière. Le mot-clé `'ppm'` ajoute une modulation de position dont les différents symboles de codage peuvent être précisés sous la forme d'un vecteur facultatif contenant les nombres entiers d'unités élémentaires t_C en lesquels consistent les différents déplacements possibles. Si ce vecteur n'est pas spécifié, les réglages par défaut correspondent à une modulation binaire standard `[0; 2]`. Un second vecteur de même dimension peut optionnellement suivre ce premier pour en spécifier les probabilités d'occurrence respectives si celles-ci ne sont pas uniformes.

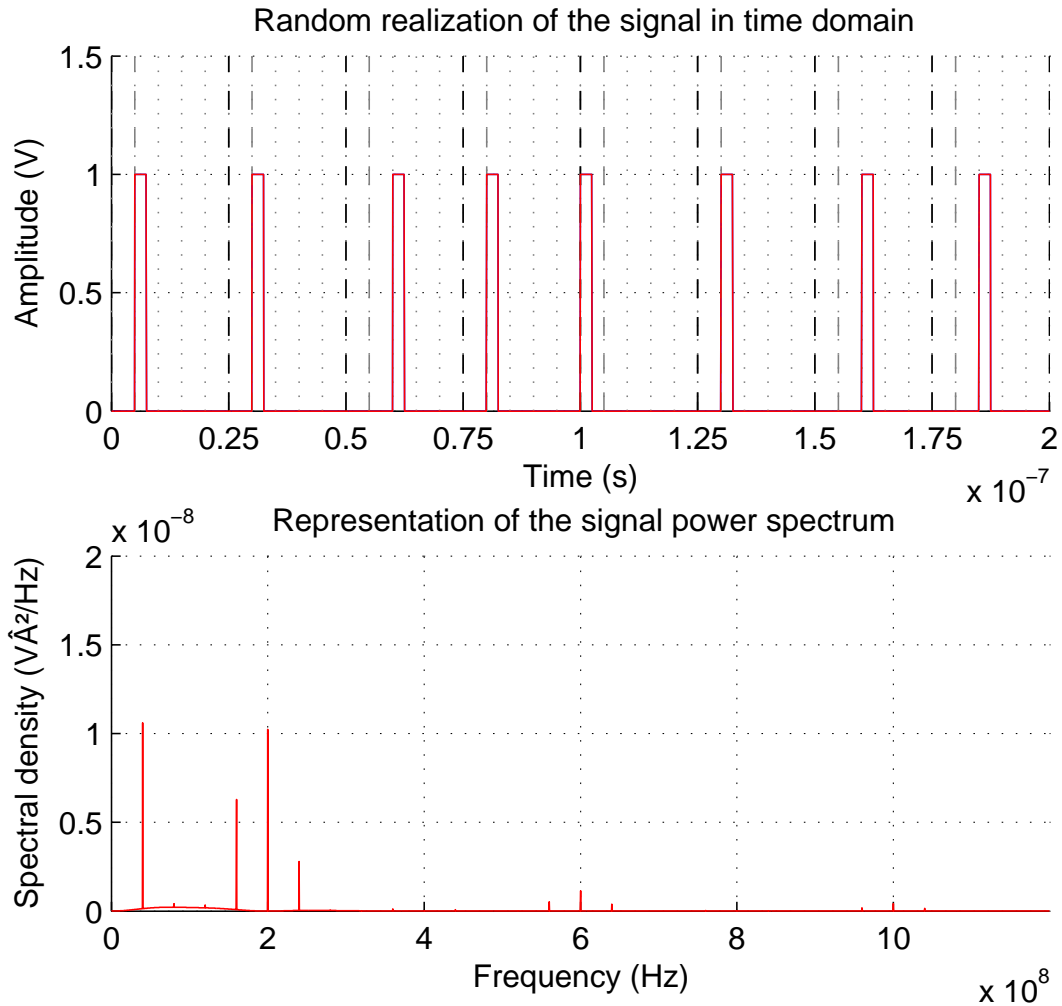


FIG. 3.8 – `PulseSpectra('filter','rec','ppm',[0,1,2],[0.25,0.5,0.25],'time',8)`

3.2.4 Gestion des signatures personnalisées

Les deux grands types de prise en charge multi-utilisateurs décrits dans la première partie sont utilisables dans notre programme et peuvent d'ailleurs éventuellement être combinées.

Signature par polarité

Comme nous l'avons déjà expliqué, la signature par polarité (direct-sequencing en anglais) consiste en une séquence périodique de +1 et -1, spécifique à chaque utilisateur, qui détermine la polarité des l_0 impulsions constitutives d'un symbole élémentaire. Le mot-clé 'ds' permet de doter le système modélisé d'une telle prise en charge. La signature par défaut est [1,-1], mais n'importe quel autre vecteur peut-être spécifié immédiatement après le mot-clé 'ds'. Notons que sa taille détermine le nombre d'impulsions dont est constitué chaque symbole (généralement une puissance de 2 en pratique).

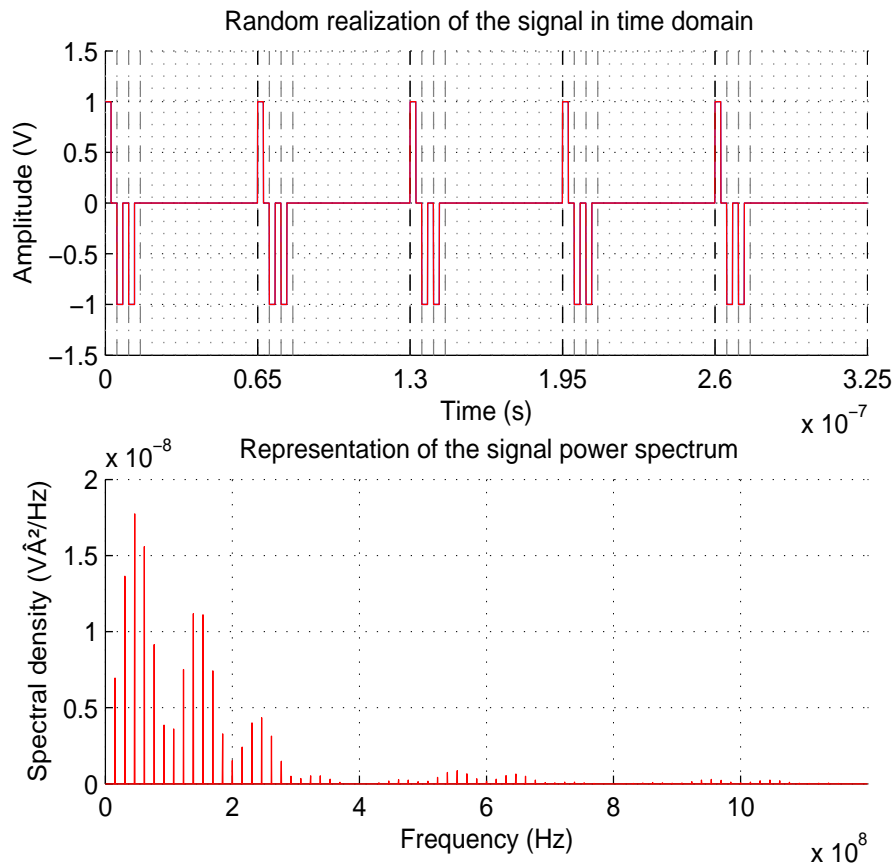


FIG. 3.9 – Exemple de signature par polarité → `PulseSpectra('filter','rec','ds',[1,-1,-1],'time',5,'guardsize',10)`

Signature temporelle

Dans le cas du 'time-hopping', chaque utilisateur est caractérisé par une signature de nombres entiers positifs correspondant aux espacements relatifs (en termes d'unités élémentaires t_C) des impulsions constituant le symbole. Le mot-clé 'th' dote le système modélisé d'une telle prise en charge. La signature par défaut est [1,0,1,0,0,1,0,1], mais toute autre signature peut-être spécifiée immédiatement derrière le mot-clé 'th'. Notons que la taille du vecteur détermine le nombre l_0 d'impulsions constituant chaque symbole. Si le système cumule les deux types de polarité et que les tailles des signatures spécifiées ne sont pas égales, les vecteurs correspondants sont étendus périodiquement jusqu'à avoir pour dimension le PPCM des deux tailles initiales.

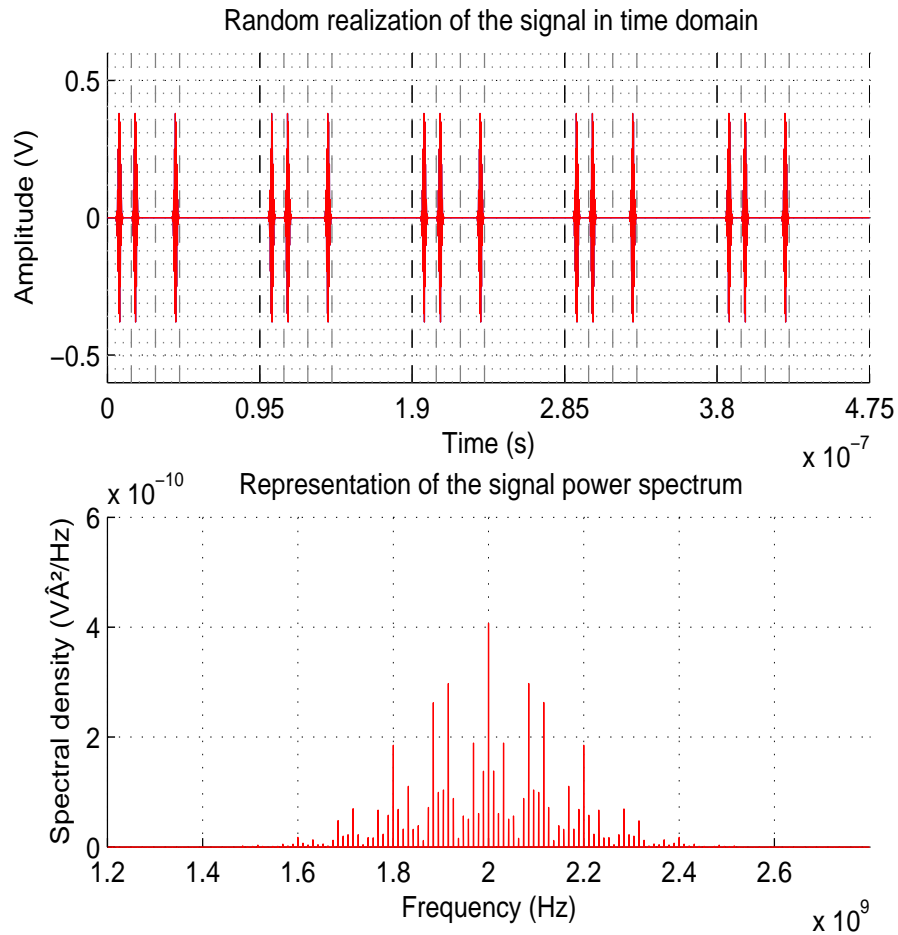


FIG. 3.10 – Exemple de time-hopping \rightarrow `PulseSpectra('filter','gws',5e-9,'th',[1,0,2],'time',5,'guardsize',10)`

3.2.5 Prise en compte des effets d'altération

Comme nous l'avons expliqué dans la première partie du rapport, les divers effets aléatoires de l'environnement extérieur peuvent être ajoutés de manière modulaire à notre modèle.

Instabilité de l'horloge

La présence du mot-clé '*jitter*' dans la liste d'arguments ajoute un déplacement aléatoire des impulsions régulières générées par l'horloge du système. Un premier argument optionnel peut suivre pour spécifier les valeurs des différents déplacements possibles, en secondes. S'il est omis la configuration par défaut correspond à la distribution raisonnable de $[-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10] \times 10^{-12}$. Un second vecteur de même taille que le premier peut venir préciser les probabilités de ces différents déplacements au cas où la distribution ne serait pas uniforme.

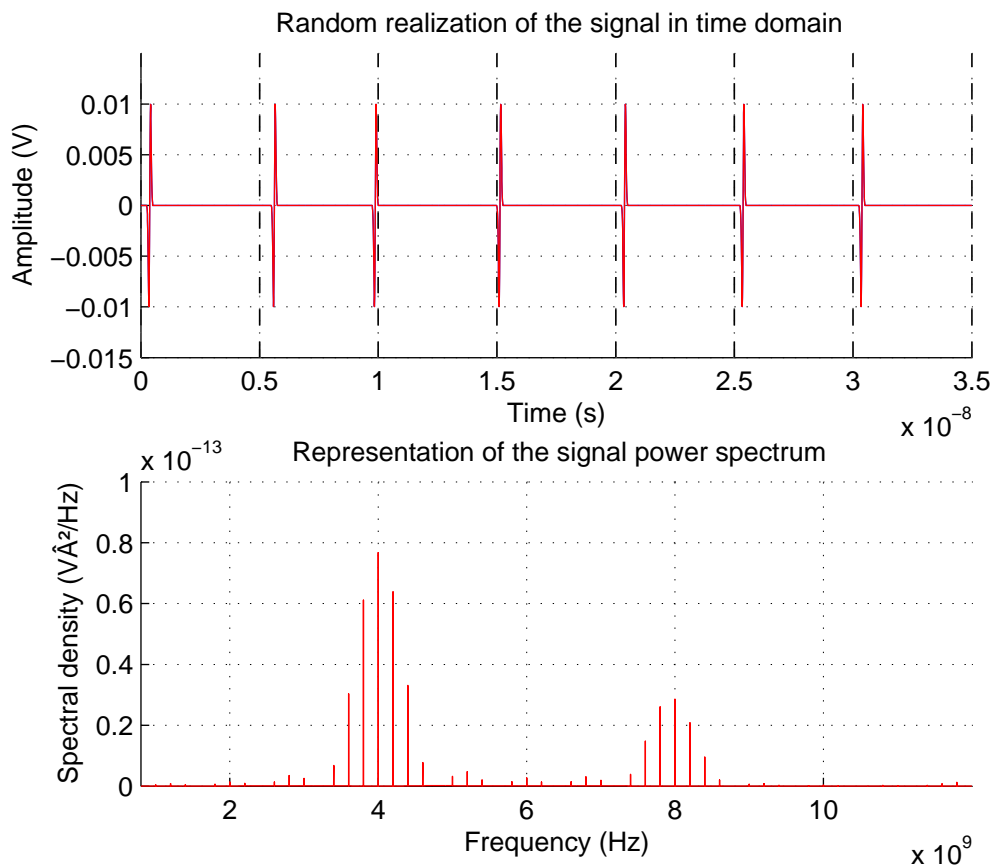


FIG. 3.11 – Effets de l'instabilité de l'horloge \rightarrow `PulseSpectra('filter','gdr','jitter',[-5,-2.5,0,2.5,5]*1e-10,'time',7)`

Pertes occasionnelles

Le mot-clé 'loss' permet de tenir compte de pertes occasionnelles d'impulsions se produisant avec une probabilité un sur dix. Toute autre valeur peut néanmoins être spécifiée immédiatement derrière.

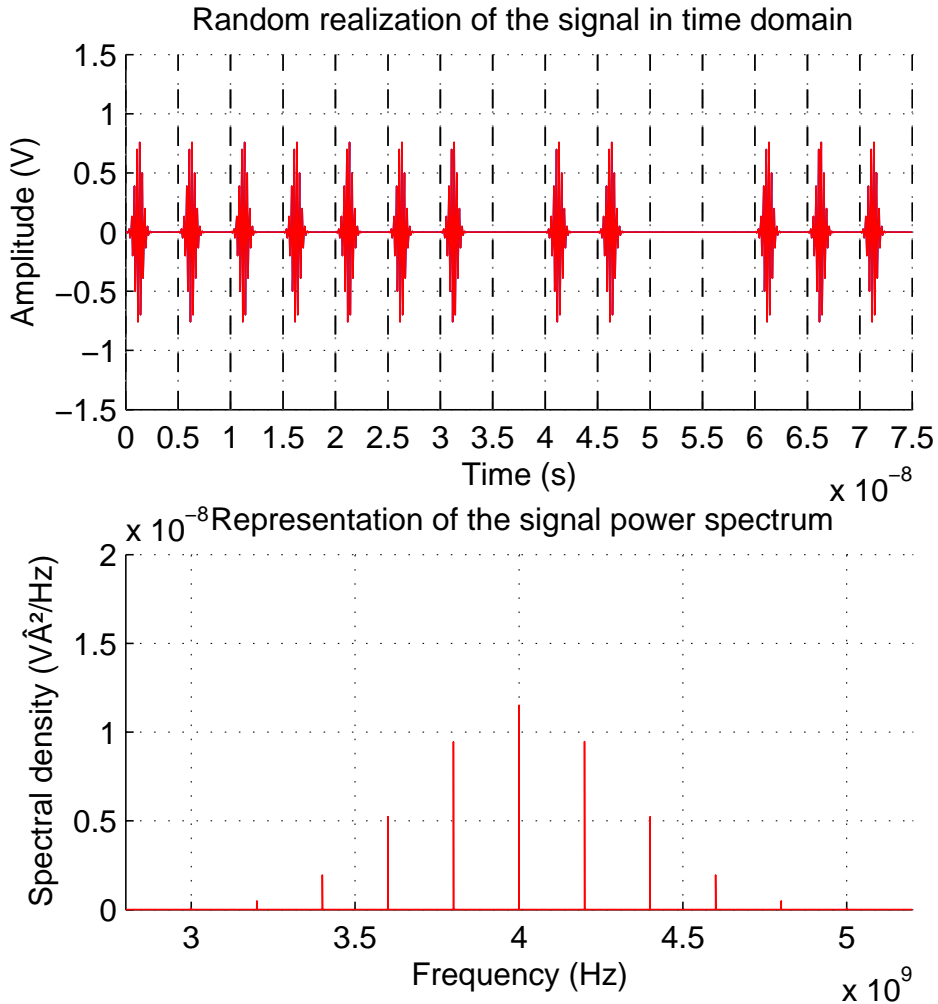


FIG. 3.12 \rightarrow PulseSpectra('filter','gws','loss',0.15,'time',15)

Effet Multipath Fading

Notre analyseur spectral prend également en charge les effets complexes du phénomène de multipath fading : il suffit pour cela de spécifier le mot-clé 'multipath' dans la liste des arguments. Pour modéliser les réflexions, nous avons utilisé le modèle expérimental doublement poissonnien de A. A. M. Saleh et R. A. Valenzuela décrit dans le chapitre 2 (c.f. figure 1.13).

La cadence moyenne d'arrivée des réflexions principales (valeur par défaut : $\frac{1}{3 \times 10^{-7}}$, c'est à dire une toutes les 300 ns en moyenne), le temps caractéristique de l'atténuation exponentielle

des réflexions principales (défaut : 60 ns), ainsi que les deux mêmes paramètres pour les réflexions secondaires (défaut : $\frac{1}{5 \times 10^{-9}}$, c'est à dire une toutes les 5 ns en moyenne pour le premier et 20 ns pour le second) peuvent être stipulées en ajoutant derrière le mot-clé 'multipath' les quatre valeurs correspondantes. Précisons que les valeurs par défaut ont été choisies pour correspondre aux mesures expérimentales réalisées par Saleh et Valenzuela.

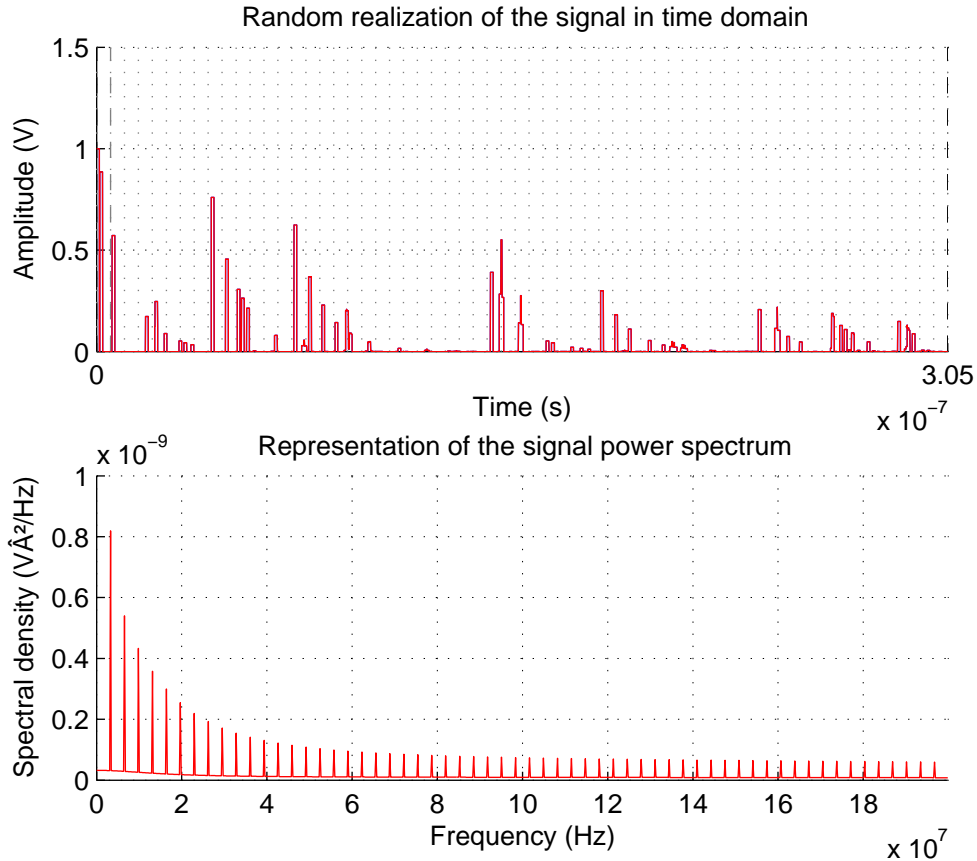


FIG. 3.13 – \rightarrow `PulseSpectra('filter','rec',1e-9,'multipath',1/(85e-9),150e-9,1/(5e-9),10e-9,'time',1,'guardsize',60,'freq',[0;0.5e8])`

3.2.6 Outils supplémentaires

Simulation d'une réalisation temporelle du signal

La génération aléatoire, conformément aux statistiques, d'une réalisation temporelle que peut engendrer le système spécifié constitue sans aucun doute l'une des options les plus intéressantes proposées par notre analyseur spectral, puisqu'elle permet au concepteur de visualiser immédiatement un exemple du fruit des transformations qu'il a envisagées. Sur la plupart des illustrations présentées tout au long de cette section, c'est d'ailleurs le graphe représentant cette simulation temporelle du signal, plus que celui de son spectre fréquentiel, qui nous donnait une idée claire et intuitive des transformations opérées.

Pour obtenir un tel graphe, il suffit de mettre le mot-clé *'time'* dans la liste des arguments passés au programme, éventuellement suivi du nombre de périodes t_S que l'on désire simuler et voir représentées (4 par défaut).

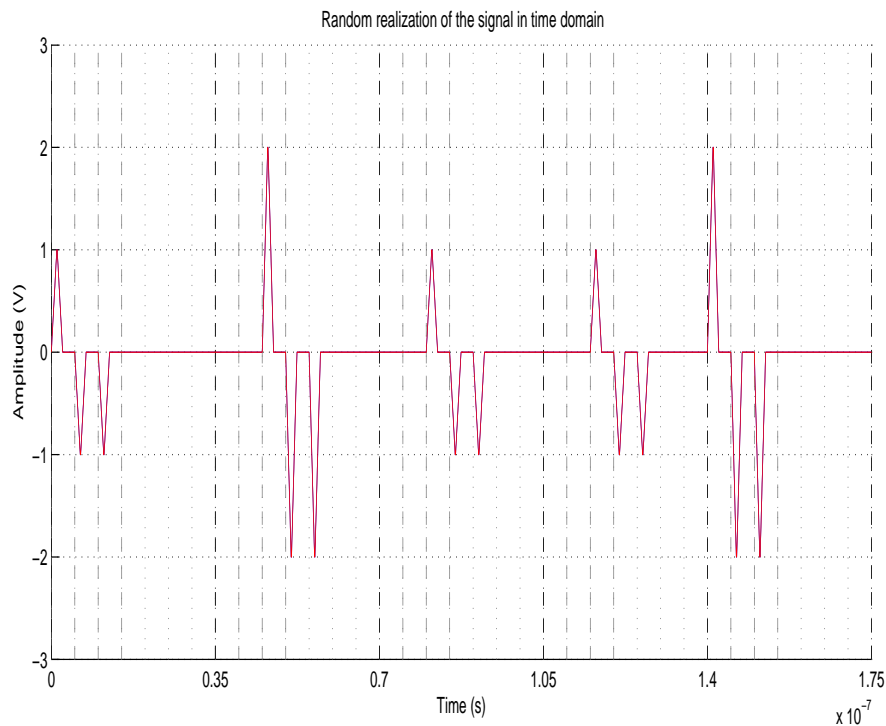


FIG. 3.14 – `PulseSpectra('filter','tri','ds',[1,-1,-1],'pam',[1,2],'ppm','time',5)`

Isolation des raies ponctuelles

Une question pourtant essentielle n'a pas encore été abordée dans ce rapport : celle de la manière de représenter graphiquement la mesure finie μ_X obtenue. La manière la plus simple et la plus significative est bien sûr de tracer sa densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette méthode est cependant inapplicable lorsque μ_X admet des atomes (c'est à dire des points $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\mu_X(\{x\}) > 0$), ce qui est le cas pour nous à cause des raies spectrales dues au spectre de Bartlett μ_N de la grille régulière.

Nous avons donc choisi de représenter graphiquement les diracs discrets par les triangles extrêmement fins mais d'aire constante dont ils sont la limite formelle : nous nous ramenons ainsi à une densité continue tout en respectant la cohérence des poids énergétiques relatifs de ces diracs. Néanmoins, si cette représentation ne convient pas à l'utilisateur, il peut ajouter à la liste des arguments le mot-clé `'dualplot'` pour séparer sur deux graphes distincts les raies spectrales (représentées par des flèches sans unités) et la partie à densité (courbe continue). Les pourcentages des contributions respectives de ces deux graphes à l'énergie totale sont alors précisés afin que l'utilisateur puisse tout de même se faire une idée de la quantité d'énergie concentrée en chacune des raies spectrales.

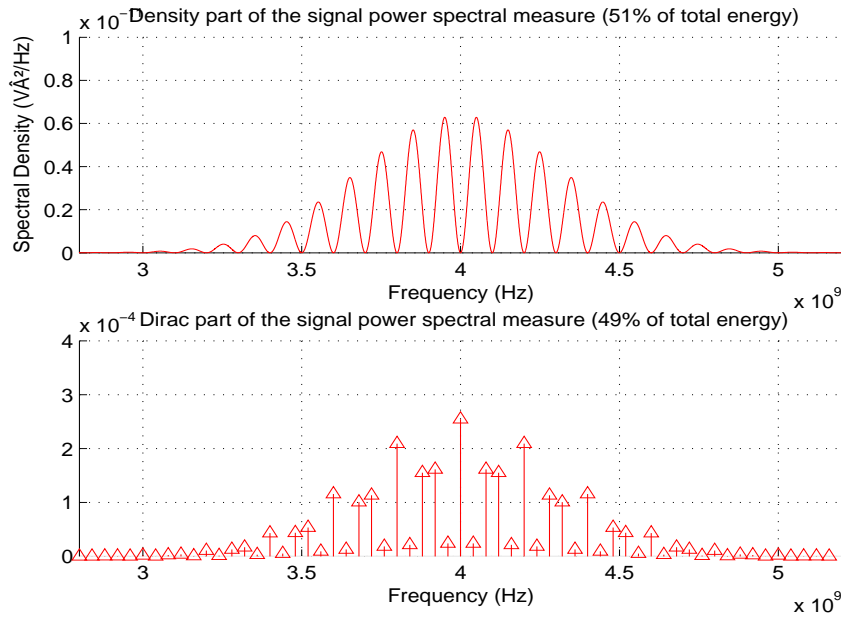


FIG. 3.15 – Isolation des raies → `PulseSpectra('filter','gws','ppm','dualplot')`

Réglages divers de l'affichage

Fenêtre fréquentielle : Nous avons longuement insisté dans le chapitre précédent

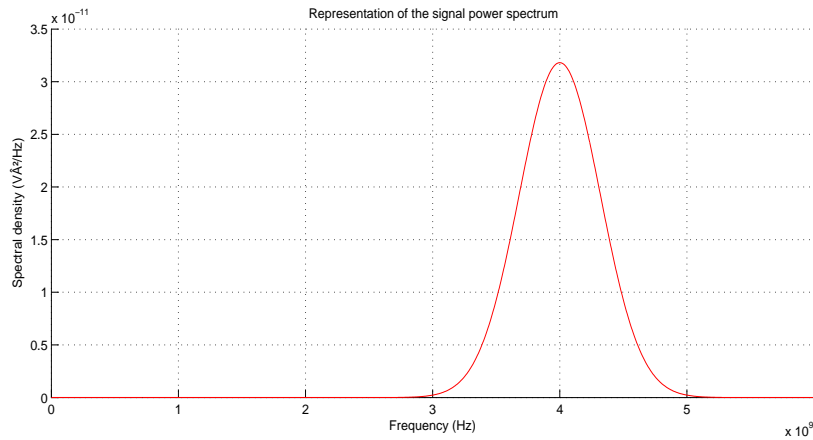


FIG. 3.16 – `PulseSpectra('filter','gws','pam','freq',[0,6e9])`

sur la nécessité d'une procédure d'ajustement automatique de la fenêtre fréquentielle afin qu'elle s'adapte à l'étendue réelle du spectre cherché. Nous laissons toutefois à l'utilisateur la possibilité de spécifier lui-même l'intervalle qui l'intéresse (afin qu'il puisse zoomer sur une zone spectrale bien particulière ou bénéficier au contraire de la vue d'ensemble d'un large domaine) en spécifiant le mot-clé `'freq'` immédiatement suivi de l'intervalle souhaité en Hz .

Résolution fréquentielle et temporelle : au début du chapitre précédent, nous avons exprimé la résolution fréquentielle R_f comme le produit entre la période t_S de la grille et un entier positif q que l'on pouvait choisir aussi grand que l'exigeait la précision souhaitée (formule 3.2). Ce facteur de qualité, qui correspond précisément au nombre de points à prendre en compte entre chacune des raies spectrales très rapprochées constituant le spectre de Bartlett de la grille régulière, est personnalisable grâce au mot-clé 'freqres' suivi de la valeur entière choisie, pour le cas où la valeur prédéfinie de 30 se révélerait insuffisante ou au contraire trop coûteuse en calculs. Il en est de même de la résolution temporelle ('timeres').

Choix de l'unité pour la densité spectrale : la densité spectrale est, nous l'avons vu, homogène à une amplitude au carré par unité de fréquence, d'unité $V^2.Hz^{-1}$. Toutefois, il est fréquent en physique des signaux d'adopter une unité logarithmique : le décibel dB, ou mieux ici le dBm défini par $\log(P/P_m)$ où P est la grandeur énergétique concernée et P_m une constante de même unité (pour des raisons d'homogénéité) conventionnellement égale à 10^{-3} (le m dans dBm correspond en fait au préfixe 'milli'). Le mot-clé 'dbm' indique au programme qu'il lui faut effectuer les calculs et la représentation du spectre cherché en dBm. Le spectre prend alors une forme tout à fait différente, comme l'illustre la figure 3.17.

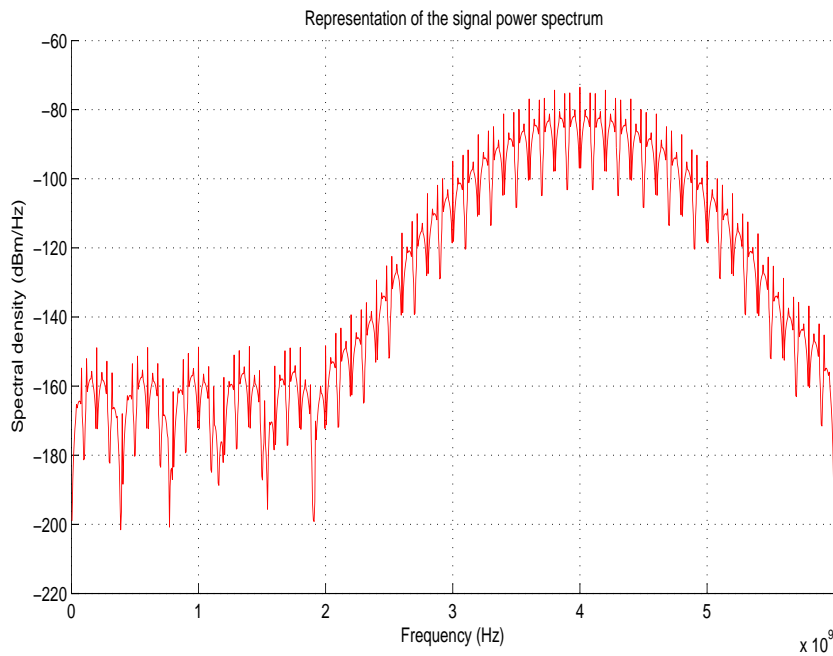


FIG. 3.17 — `PulseSpectra('filter','gws','ppm','dbm','freq',[0,6e9])`

Couleur des graphes et taille des polices : il est enfin possible de régler la couleur des graphes et/ou la taille des textes de légendes par les mots-clé 'color' et 'font', respectivement suivis de la décomposition RGB normalisée de la couleur choisie (rouge [0,1,1] par défaut) et de l'entier correspondant à la taille de police choisie.

Conclusion

Récapitulation

Faute d'outils théoriques suffisamment puissants, ingénieurs, biologistes et physiciens ont été contraints de renoncer à l'analyse énergétique systématisée des flots d'informations qu'ils manipulent au quotidien. Partant en effet de la forme définitive – complexe, difficile d'accès et oubliée des transformations physiques l'ayant engendrée – que finissent par revêtir ces signaux aléatoires, la mesure spectrale de puissance ne peut s'obtenir que difficilement et très ponctuellement : le raisonnement théorique malheureusement non constructif qui garantit son existence ne laisse effectivement guère d'autre choix qu'une identification hasardeuse propre à chaque cas particulier. S'imposait donc une révolution radicale de la manière d'aborder les liens entre ces champs réels d'impulsions aléatoires, leur modèle mathématique (processus stochastiques à valeurs complexes) et la représentation énergétique cherchée (mesure spectrale de puissance).

Nous avons montré qu'il était possible d'aborder les premiers d'une manière remarquablement modulaire : ajouts successifs, à partir d'un support régulier de base, des diverses informations à envoyer ainsi que des différents effets de dégradation que le canal est susceptible d'engendrer, puis obtention du signal définitif par filtrage. Tout l'enjeu, dès lors, a été de transposer cette décomposition modulaire inhérente aux signaux réels d'abord dans l'univers de leurs modèles mathématiques, puis jusque dans le monde des spectres énergétiques eux-mêmes.

Puisque la nouveauté consistait à voir les premiers comme le résultat d'une série d'étapes intermédiaires, il nous a naturellement fallu doter les deux autres univers des objets formels correspondants à ces maillons (processus ponctuels simples localement finis pour l'un, mesure spectrale de Bartlett pour l'autre) puis traduire en opérations mathématiques applicables directement à ces derniers (marquage et formule isométrique fondamentale) les transformations physiques reliant entre elles les différentes étapes dans la réalité. Ne restait plus alors, pour que la transposition modulaire soit totale, qu'à exhiber les formules équivalant, dans ces deux univers, au filtrage produisant en bout de chaîne le signal définitif (convolution impulsionnelle et formule de filtrage impulsionnel).

C'est alors finalement jusque dans le monde de l'informatique que nous avons prolongé cette remarquable transposition de la structure modulaire des signaux à codage impulsionnel, puisqu'en rendant algorithmiques les relations spectrales découlant de la formule isométrique fondamentale, nous avons pu implémenter un analyseur spectral systématisant le calcul en temps linéaire de la distribution statistique de l'énergie propagée en fonction des choix de codage effectués et de l'environnement modélisé, puis la représentation graphique adaptée des résultats le long de la bande fréquentielle.

Perspectives ouvertes

La conception de systèmes de communications à distance sur Ultra Wide Band constitue la motivation majeure de ce projet informatique : en rendant possible la prévision théorique directe de l'allure des spectres engendrés, et donc l'optimisation de la qualité de la transmission compte-tenu du profil des perturbations par le milieu de propagation et des limitations spectrales officiellement en vigueur², l'analyse spectrale informatisée devrait permettre la mise au point de systèmes de communication de masse à débit extrêmement élevé même dans les environnements les plus hostiles à la propagation convenable des signaux.

Outre cette première perspective, dont l'importance est évidente dans un monde où la transmission en temps réel de l'Information sous toutes ces formes est devenue capitale, les applications possibles sont nombreuses dans tous les domaines où l'on s'intéresse à la répartition statistique de manifestations ponctuelles aléatoires dans un espace quelconque : les concepteurs de réseau de téléphones sans fil, par exemple, utilisent depuis peu des processus ponctuels spatio-temporels pour modéliser les configurations probables des usagers et mettre en place un système efficace de relais de l'Information en fonction de ces dernières. Les outils analytiques développés ici suscitent également l'intérêt croissant des neuro-biologistes : les propriétés statistiques du second ordre auxquelles ils donnent accès de manière systématique devraient grandement simplifier les recherches expérimentales ayant pour objectif d'établir une correspondance exacte entre les stimuli nerveux générés et l'information qu'ils visent à transmettre.

²telles que la courbe maximale puissance/fréquence imposée par la Federal Communications Commission aux Etats-Unis pour éviter les interférences avec le système GPS de l'armée.

Quatrième partie

Mémoire de M2 : Convergence locale de graphes aléatoires et convergences des croyances en milieu cyclique

Table des Matières

4	L’algorithme “Bonus Propagation”	82
4.1	Le problème de l’affectation optimale	82
4.2	Un algorithme de propagation des croyances	83
4.3	Vitesse asymptotique de convergence : énoncé du résultat	84
5	Topologie de la convergence locale	86
5.1	L’espace topologique \mathcal{G}^*	86
5.2	Métrisabilité de la convergence locale	87
5.3	Caractérisation de la relative compacité	89
5.4	Séparabilité et complétude	90
6	Convergence des croyances sur le graphe infini limite	92
6.1	Le graphe infini limite	92
6.2	Convergence en distribution	93
6.3	Convergence forte	96
7	Retour au cas fini : comportement asymptotique sur $\mathcal{K}_{n,n}$	100
7.1	Continuité vis-à-vis de la convergence locale	100
7.2	Vitesse de convergence et complexité asymptotique	103

Introduction

Directement inspirée de la célèbre “cavity method” dont l’invention a rendu possible le calcul heuristique de l’énergie libre dans les modèles de verres de spins en physique statistique, la propagation des croyances est une stratégie algorithmique non-rigoureusement fondée mais redoutablement efficace pour l’optimisation décentralisée de certaines fonctionnelles macroscopiques définies sur de gigantesques systèmes discrets lorsque l’évaluation exhaustive se voit condamnée par le nombre exponentiel des configurations globales possibles et l’interdépendance extrêmement complexe des choix microscopiques engendrant ces dernières : proportion maximale de clauses simultanément satisfiables au sein d’une large formule booléenne, taille minimale d’un ensemble d’arêtes recouvrant les sommets d’un immense graphe, etc.

Essentiellement, la méthode consiste à simuler l’évolution parallèle de “croyances” locales par le biais desquelles les variables mutuellement dépendantes échangent périodiquement, de manière autonome et décentralisée, les estimations courantes de leurs contributions respectives au résultat global. À chaque étape, l’intégration adéquate des estimations reçues permet à chacune de ces variables d’ajuster le choix de son propre état et de mettre-à-jour en conséquence ses croyances personnelles avant de les diffuser à nouveau à tout son voisinage de dépendance. L’itération se poursuit jusqu’à ce que les décisions individuelles issues de ces confrontations locales successives finissent par s’accorder (“convergence des croyances”) et qu’émerge alors spontanément, à l’échelle macroscopique, la structure collective optimale visée.

À priori, l’atteinte de l’état stationnaire correspondant à la solution cherchée n’est garantie qu’après un nombre d’étapes égal à la taille du plus long chemin orienté dans le graphe des dépendances locales, quantité que la présence du moindre cycle repousse évidemment à l’infini. Néanmoins, les configurations successivement obtenues lors de l’exécution forcée de ce type d’algorithme sur certains graphes cycliques semblent encore converger relativement bien vers le point-fixe visé, et ce à une vitesse parfois remarquable. Au point, d’ailleurs, que c’est sur ces mécanismes que sont aujourd’hui fondées la plupart des technologies de décodage et de correction d’erreurs (turbocodes) équipant les dernières générations de téléphones mobiles, et que certains raffinements tout récents (“replica-symmetry method” et “survey propagation”) se montrent d’une efficacité inégalée pour la résolution approchée de problèmes NP-complets aussi célèbres que la satisfiabilité ou le k-coloriage.

Les perspectives alléchantes que pourrait offrir la compréhension théorique de ces mécanismes algorithmiques exceptionnels ont récemment motivé de nombreux travaux sur les modalités précises et rigoureuses d’une telle convergence : conditions suffisantes, vitesse asymptotique, influence des conditions initiales, stabilité stochastique, etc. Toutefois, l’absence d’outils véritablement adaptés rend le problème ardu et restreint les réponses positives à quelques rares cas isolés. Dans cette optique, une idée nouvelle consiste à exploiter la notion topologique de convergence locale pour mettre en évidence une structure limite au sein du système complexe étudié puis remplacer alors, de façon parfaitement rigoureuse, l’étude asymptotique de la pro-

pagation des croyances lorsque le nombre de particules qui composent le système tend vers l'infini par l'analyse directe de cette même propagation sur le système infini limite. C'est à la mise-en-œuvre de cette méthode innovante, dans le cas du problème de l'affectation optimale de n tâches à n agents, qu'est consacré le présent mémoire.

Au-delà de la simple convergence de l'algorithme proposé, nous nous sommes penché sur la question – cruciale d'un point-de-vue algorithmique – de la vitesse asymptotique de cette convergence lorsque la taille n du problème tend vers l'infini et avons pu établir le résultat contre-intuitif suivant : le nombre d'itérations requises afin que la configuration adoptée approxime l'optimum cherché avec une précision quelconque fixée reste borné indépendamment de la taille n du problème, ce qui induit une complexité totale seulement quadratique à comparer au $O(n^3)$ du meilleur algorithme exact connu à ce jour (Edmond-Karp).

Outre les avantages que pourrait offrir l'implémentation de cette nouvelle stratégie performante dans les diverses applications pratiques où la résolution rapide et distribuée de larges instances du problème de l'affectation optimale intervient de manière cruciale, nous espérons que la méthode de preuve utilisée ici pourra, dans une optique plus vaste, constituer un cas d'étude aisément reproductible et systématisable pour la compréhension théorique des phénomènes de convergence des croyances en milieu cyclique et la conception d'algorithmes décentralisés toujours plus efficaces dans un monde où la taille gigantesque des réseaux, la complexité de leur architecture et les modifications locales imprévisibles qui redessinent sans cesse ces structures confèrent aux mécanismes d'émergence et d'organisation spontanée une importance de plus en plus déterminante.

Chapitre 4

L’algorithme “Bonus Propagation”

Dans ce premier chapitre, nous présentons brièvement le problème de l’affectation optimale puis décrivons l’algorithme distribué dont ce mémoire a pour objectif de démontrer les performances exceptionnelles, en un sens que nous rendons précis dès la fin de cette section.

4.1 Le problème de l’affectation optimale

Comme nous l’avons annoncé en introduction, le problème algorithmique qui nous occupe ici est celui de l’affectation optimale de n tâches à n agents. Il consiste simplement, étant donnée une matrice de coûts $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, en la détermination d’une permutation π de $[[1;n]]$ dont le coût total

$$c(\pi) := \sum_{i=1}^n c_{i,\pi(i)}$$

est minimal. Il existe une formulation équivalente de ce problème dans le langage des graphes valués, fondée sur la notion de couplage :

Définition 17 (couplage couvrant). *On appelle couplage sur un graphe non-orienté $G = (V, E)$ un ensemble $M \subseteq E$ d’arêtes n’ayant deux-à-deux aucune extrémité en commun.*

Un sommet $x \in V$ est alors dit couvert par M s’il est extrémité d’une arête de M .

Lorsque tous les sommets de G sont couverts par M , on dit que M est un couplage couvrant sur G .

Enfin, si le graphe G est valué (c’est à dire muni d’une application $|\cdot|_G: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ attribuant une longueur $|e|_G$ à chaque arête $e \in E$), on appellera poids du couplage M la somme des valuations de ses éléments.

Notons que l’existence d’un couplage couvrant n’est pas toujours garantie. Un cycle de taille impaire, par exemple, ne contiendra jamais de couplage couvrant. Le graphe biparti complet équilibré de taille $2n$ (désormais noté $\mathcal{K}_{n,n}$) qui fera l’objet de notre étude en a en revanche exactement $n!$, chacun d’eux correspondant de manière évidente à une permutation de $[[1, n]]$. Quant-aux couplage couvrants sur les arbres enracinés finis, ils existeront toujours pourvu bien-sûr que l’on autorise les feuilles à n’être pas couvertes.

Le problème de l’affectation optimale de taille n se réduit alors tout naturellement à la détermination d’un couplage couvrant de poids minimal (le célèbre “Minimal-Weight-Matching Problem”, ou MWM) sur le graphe biparti $\mathcal{K}_{n,n}$ convenablement valué : l’un des deux ensembles de sommets représente les n tâches, l’autre les n agents, et l’on value chacune des

n^2 arêtes reliant une tâche i à un agent j par le coût $c_{i,j}$ de l'attribution correspondante. Le meilleur algorithme connu à ce jour pour MWM est celui d'Edmonds-Karp, qui utilise le théorème min-cut / max-flow (c.f. par exemple [TCS03]) pour déterminer une solution exacte en temps $O(|E||V|)$. Cela permet de résoudre le problème de l'affectation optimale en temps $O(n^3)$; le but de ce mémoire est de démontrer que la propagation des croyances peut faire beaucoup mieux.

4.2 Un algorithme de propagation des croyances

Conformément à la présentation rapide que nous avons donnée de la propagation des croyances en introduction, il s'agit ici de trouver une règle pertinente d'élaboration, de mise-à-jour et d'interprétation des messages au niveau des sommets de $\mathcal{K}_{n,n}$ de telle sorte que l'ensemble des informations reçues par l'un quelconque de ces derniers (disons la racine, de toute façon le problème est symétrique et les messages circuleront en pratique en parallèle dans toute les directions) puisse le guider vers le voisin auquel il est connecté dans le couplage optimal. Analysons d'abord le cas plus simple où le graphe sous-jacent est un arbre enraciné : le problème MWM s'y trouve posséder une structure récursive dont il est plus aisé de déduire un algorithme exact de propagation de croyances. Nous tenterons ensuite de faire circuler les mêmes messages sur le graphe cyclique qui nous intéresse. Pour T arbre valué fini de racine \emptyset , et x nœud de T , notons :

- T_x l'arbre valué formé par x et sa descendance dans T , de racine x et de valuation la restriction naturelle de celle de T ;
- $M(T)$ le poids minimal d'un couplage couvrant sur T (c'est-à-dire couvrant tous les sommets à l'éventuelle exception des feuilles) ;
- $M_x(T)$ le poids minimal d'un couplage couvrant sur T contenant l'arête $\{\emptyset; x\}$;
- $\overline{M}(T)$ le poids minimal d'un couplage sur T ne couvrant pas \emptyset mais couvrant tous les autres sommets à l'éventuelle exception des feuilles ;

Supposant le couplage optimal unique (hypothèse qui sera soigneusement justifiée plus tard), il s'agit alors de déterminer le voisin $\pi^*(\emptyset)$ auquel la racine est couplée. Notant \sim la relation d'adjacence, il découle immédiatement des définitions ci-dessus que, pour tout arbre fini T non réduit à sa racine \emptyset , de valuation $|\cdot|$:

$$(i) \pi^*(\emptyset) = \arg \min_{x \sim \emptyset} M_x(T); \quad (iii) \overline{M}(T) = \sum_{x \sim \emptyset} M(T_x);$$

$$(ii) M(T) = \min_{x \sim \emptyset} M_x(T); \quad (iv) M_x(T) = |\{\emptyset, x\}| + \overline{M}(T_x) + \sum_{y \sim \emptyset, y \neq x} M(T_y).$$

Combinant (iii) et (iv) et notant $B(T) := M(T) - \overline{M}(T)$ le "bonus" relatif offert par la décision de relier la racine au plus offrant de ses fils plutôt que de la laisser libre, il vient :

$$M_x(T) = \overline{M}(T) + |\{\emptyset, x\}| - B(T_x),$$

et en réinjectant dans (i) et (ii), on obtient finalement les deux relations fondamentales :

$$\pi_T^*(\emptyset) = \arg \min_{x \sim \emptyset} \{ |\{\emptyset, x\}| - B(T_x) \}; \quad (4.1)$$

$$B(T) = \min_{x \sim \emptyset} \{ |\{\emptyset, x\}| - B(T_x) \}. \quad (4.2)$$

Ainsi la résolution récursive du problème MWM sur un arbre fini fait-elle naturellement apparaître des quantités duales pertinentes : les bonus $B(T_x)$, capables par la relation de récurrence (4.2) de se propager localement le long des arêtes depuis les feuilles où ils sont trivialement nuls jusqu’à la racine, puis de révéler finalement à cette dernière, conformément au critère (4.1), le sommet auquel elle doit se voir connectée pour réaliser le couplage de poids minimal. Il est maintenant naturel de tenter de généraliser cette propagation acyclique des croyances au cas d’un graphe valué G quelconque.

Plus précisément, on définit l’algorithme *BP* (“Bonus Propagation”) de la manière suivante : initialement, tous les messages sont fixés à zéro ; ensuite à chaque étape $k \geq 1$, chaque sommet x de G utilise les informations qu’il a reçues à l’étape précédente pour élaborer et envoyer à tout voisin direct $y \sim x$ un nouveau message $m_G^k(x \rightarrow y)$ selon la règle de mise-à-jour heuristiquement déduite du cas acyclique :

$$\begin{cases} m_G^0(x \rightarrow y) & := 0 ; \\ m_G^{k+1}(x \rightarrow y) & := \min_{z \sim x, z \neq y} \left\{ |\{z, x\}|_G - m_G^k(z \rightarrow x) \right\}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Finalement, on connecte chaque sommet x au voisin $\pi_G^k(x)$ dont le message est le plus convaincant en un sens analogue à celui du critère (4.1) :

$$\pi_G^k(x) := \arg \min_{y \sim x} \left\{ |\{x, y\}|_G - m_G^k(y \rightarrow x) \right\}. \quad (4.4)$$

Pour un nombre k fixé d’étapes, *BP* appliqué à $G = \mathcal{K}_{n,n}$ est clairement de complexité quadratique, mais rien ne garantit a priori que l’application $\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k$ ainsi déterminée ait un rapport quelconque, même de manière approximative, avec le couplage couvrant de poids minimal cherché. Les simulations numériques encouragent cependant à croire que l’heuristique fondamentale de la “cavity method”, selon laquelle la récurrence exacte définie dans le cas d’un arbre se comporte encore relativement bien en présence de cycles, est ici valable. De manière tout-à-fait remarquable, BAYATI, SHAH ET SHARMA ([BSS05]) sont récemment parvenus à donner une preuve rigoureuse de ces observations empiriques exceptionnelles : pour toute valuation de \mathcal{K}_n rendant unique le couplage couvrant optimal $\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*$, la suite $(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k)_{k \geq 0}$ converge effectivement, malgré la présence de cycles, vers $\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*$.

La question – cruciale d’un point de vue algorithmique – qui se pose maintenant est naturellement celle de la vitesse de convergence, et plus particulièrement de sa dépendance asymptotique en la taille n du problème : comment évolue le nombre d’itérations nécessaires à l’atteinte de l’état stationnaire cherché lorsque la taille du graphe sur lequel est exécuté l’algorithme tend vers l’infini ? À notre connaissance, aucun résultat n’est connu sur ce dernier sujet et la complexité asymptotique de l’algorithme est un problème ouvert.

4.3 Vitesse asymptotique de convergence : énoncé du résultat

Évidemment, la vitesse de convergence de l’algorithme BP dépend de l’instance particulière considérée, c’est-à-dire ici de la matrice spécifiant les coûts $(c_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ des diverses attributions possibles. La seule façon véritablement pertinente de gérer ce phénomène bien connu en théorie de la complexité consiste à s’intéresser au comportement statistique de l’algorithme lorsque les données sont générées aléatoirement. Le modèle stochastique le plus naturel consiste sans aucun doute ici à considérer des coûts indépendants et uniformes sur $[0, 1]$; le

problème MWM étant absolument invariant par multiplication de tous ces coûts par un même scalaire, rien ne nous empêche cependant d'attribuer aux arêtes du graphe $\mathcal{K}_{n,n}$ associé des poids n fois plus élevés, renormalisation qui se verra pleinement justifiée plus tard.

Avant toute chose, observons que les couplages couvrants sur $\mathcal{K}_{n,n}$ ont presque sûrement des poids deux-à-deux distincts, ce qui nous autorise bien à parler du couplage $\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*$ de poids minimal. En effet, si π et π' sont deux couplages distincts, on a :

$$\pi \text{ et } \pi' \text{ ont même poids} \iff \sum_{x \in \mathcal{K}_{n,n}} |\{x, \pi(x)\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} - \sum_{x \in \mathcal{K}_{n,n}} |\{x, \pi'(x)\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} = 0,$$

et l'on reconnaît là l'équation d'appartenance, pour le vecteur des n^2 poids aléatoires, à un certain sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^{n^2} , événement de probabilité évidemment nulle.

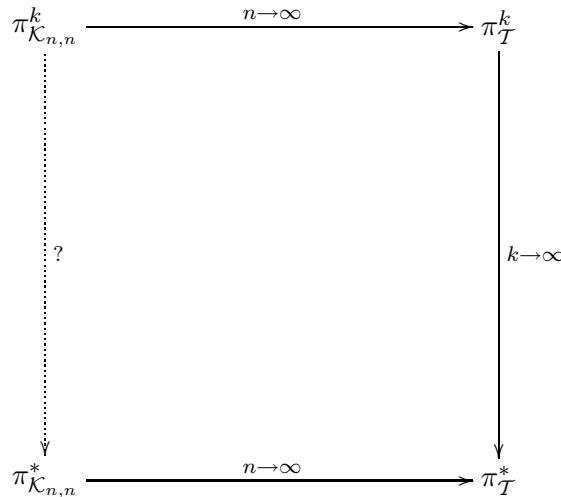
L'étude de la vitesse de convergence de l'algorithme suppose implicitement la donnée d'un moyen pertinent de mesure de la distance à la solution cherchée : ce sera tout naturellement ici la proportion (aléatoire) d'affectations erronées :

$$d(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*) := \frac{1}{2n} \text{card} \left\{ x \in \mathcal{K}_{n,n}, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(x) \neq \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*(x) \right\}.$$

De manière tout-à-fait remarquable, les simulations numériques effectuées sur des entrées aléatoirement générées tendent à suggérer que le nombre d'étapes nécessaires à l'atteinte d'une précision aussi fine que voulue reste borné indépendamment de la taille n du graphe considéré ! En d'autres termes :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[d(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*) \right] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (4.5)$$

L'objectif de ce mémoire est précisément de démontrer ces performances algorithmiques exceptionnelles. Essentiellement, la méthode consistera à remplacer l'analyse asymptotique du comportement de BP lorsque la taille n du graphe $\mathcal{K}_{n,n}$ tend vers l'infini par l'étude exacte de ce comportement sur le graphe infini limite \mathcal{T} que la notion topologique de "convergence locale" aura naturellement fait apparaître, comme résumé par le diagramme suivant :



Chapitre 5

Topologie de la convergence locale

Comme nous l'avons déjà laissé entendre, le graphe aléatoire sur lequel est exécuté l'algorithme admet une structure locale limite remarquable lorsque sa taille tend vers l'infini, en un sens rendu précis et rigoureux par les récents travaux d'Aldous et Steele ([Ald01],[AS03],[Ste02]). C'est à cette notion topologique baptisée "convergence locale" que nous consacrons le présent chapitre. Dans tout ce qui suit, \mathcal{V} est un ensemble dénombrable fixé une fois pour toutes.

5.1 L'espace topologique \mathcal{G}^*

Définition 18 (Graphe géométrique). *Rappelons qu'un **graphe enraciné** sur l'ensemble \mathcal{V} est un triplet $G = (V, \emptyset, E)$ où :*

- V est une partie de \mathcal{V} (l'ensemble des **sommets**);
- \emptyset est un élément particulier de V (la **racine**);
- E est un ensemble de paires sur V (les **arêtes**).

Lorsque chaque arête $e \in E$ est en outre muni d'une longueur $|e|_G > 0$, on dit que G est **valué**. Cette valuation induit aussitôt une (semi-)distance naturelle¹ sur V .

Pour $\varrho > 0$, on appelle ϱ -**restriction** de G , noté $[G]_\varrho$, le graphe obtenu en supprimant de G tous les sommets situés à distance plus que ϱ de la racine, et l'on dit que ϱ est un **point de continuité** de G s'il n'existe pas de sommet à distance exactement ϱ de la racine.

Enfin, on dit que G est **localement fini** si ses ϱ -restrictions, $\varrho > 0$ sont toutes finies, et l'on note \mathcal{G}^* l'ensemble des **graphes géométriques** sur \mathcal{V} , c'est-à-dire des graphes enracinés, et valués sur \mathcal{V} connexes et localement finis.

Nous pouvons dès-à présent munir \mathcal{G}^* d'une notion de convergence rendant compte de manière pertinente de ce qui se passe à un niveau purement local, "au voisinage" de la racine :

Définition 19 (Convergence locale). *On dit qu'une suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}^{*\mathbb{N}}$ **converge localement** vers $G \in \mathcal{G}^*$, noté :*

$$G_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{G}^*} G$$

¹La distance entre deux sommets est simplement l'infimum (éventuellement infini) des longueurs des chemins qui relient ces derniers.

si pour tout point de continuité ϱ de G , il existe un rang n_ϱ à partir duquel les $[G_n]_\varrho$ sont isomorphes² à $[G]_\varrho$ et si l'on peut en outre choisir les isomorphismes $\gamma_n: [G]_\varrho \rightarrow [G_n]_\varrho, n \geq n_\varrho$ de telle sorte que pour toute arête e de $[G]_\varrho$:

$$|\gamma_n(e)|_{G_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |e|_G.$$

Le but du reste de cette seconde partie est de construire une distance qui métrise la convergence locale et rende l'espace métrique obtenu séparable et complet. Il nous a semblé pertinent de reproduire ici ce travail personnel car le résultat – systématiquement admis dans les articles d'Aldous et Steele – est d'une importance théorique cruciale : il valide en effet l'utilisation de tous les théorèmes classiques propres à la convergence de mesures sur les espaces polonais. La lecture de ces démonstrations n'est toutefois absolument pas indispensable à la compréhension du reste du mémoire.

5.2 Métrisabilité de la convergence locale

Nous commençons par introduire une première distance sur \mathcal{G}^* , tout-à-fait naturelle mais encore trop forte pour métriser le caractère local – essentiel – de la notion de convergence que nous venons de définir. Pour $G = (V, \varnothing, E)$ et $G' = (V', \varnothing', E')$ dans \mathcal{G}^* , on pose :

$$d_0(G, G') := \inf_{\gamma: G \rightarrow G'} \|\gamma\|,$$

où l'infimum est pris sur tous les isomorphismes γ de G vers G' (avec la convention habituelle qu'il vaut $+\infty$ sur l'ensemble-vide), et où l'**amplitude** $\|\gamma\|$ est définie par :

$$\|\gamma\| := \sup_{e \in E} \left| |\gamma(e)|_{G'} - |e|_G \right|.$$

Il est facile de voir que l'application d_0 ainsi définie est symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire. Quant à la positivité, $d_0(G, G') = 0$ si et seulement si G et G' sont **indistingables**, au sens où ils constituent deux représentations strictement équivalentes du même graphe formel. Aussi l'ensemble \mathcal{G}^* sera-t'il désormais systématiquement quotienté par cette relation. Il découle immédiatement des définitions qu'une suite $(G_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{G}^{*\mathbb{N}}$ converge vers $G \in \mathcal{G}^*$ si et seulement si les ϱ -restrictions correspondantes convergent au sens de d_0 pour tout point de continuité ϱ de G . Cette observation conduit au théorème suivant :

Théorème 8 (Métrisabilité de la convergence locale).

(i) L'application suivante est une distance sur \mathcal{G}^* :

$$d: G, G' \mapsto \int_0^\infty e^{-\varrho} \left(1 \wedge d_0([G]_\varrho, [G']_\varrho) \right) d\varrho.$$

(ii) Cette distance métrise la convergence locale :

$$G_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{G}^*} G \iff d(G_n, G) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

²On appelle isomorphisme de $G = (V, \varnothing, E)$ vers $G' = (V', \varnothing', E')$ toute bijection $\gamma: V \rightarrow V'$ préservant la racine ($\gamma(\varnothing) = \varnothing'$) et la structure ($\forall (x, y) \in V, \{\gamma(x), \gamma(y)\} \in E' \Leftrightarrow \{x, y\} \in E$).

Démonstration. (i) Par locale finitude, les points de discontinuité d'un graphe géométrique G sont en nombre fini dans tout compact de \mathbb{R}^+ , de sorte que la fonction $\varrho \mapsto d_0(\lceil G \rceil_\varrho, \lceil G' \rceil_\varrho)$ est en réalité constante par morceaux (et continue à droite); en particulier, elle est mesurable et l'intégrale est donc bien définie. Les propriétés de symétrie et d'inégalité triangulaire découlent immédiatement de celles de d_0 . Pour la stricte positivité enfin, il s'agit simplement d'établir que deux graphes géométriques $G = (V, \varnothing, E)$ et $G' = (V', \varnothing', E')$ sont indistingables dès que leurs ϱ -restrictions le sont pour tout $\varrho > 0$. Supposons donc donné, pour tout rayon entier n , un isomorphisme $\gamma_n: \lceil G \rceil_n \rightarrow \lceil G' \rceil_n$ préservant la valuation, et déduisons-en un isomorphisme $\gamma: G \rightarrow G'$ qui la préserve encore.

Écrivons $V = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$ (le cas V fini est trivial). On peut construire par récurrence³ une suite $(\Phi_k)_{k \geq 1}$ d'applications strictement croissantes de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* telle que pour tout $k \geq 1$, les isomorphismes $(\gamma_{\Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_k(n)})_{n \geq 1}$ coïncident sur $\{x_1, \dots, x_k\}$. Définissons finalement $\gamma(x_k)$ comme l'image commune de x_k par les $(\gamma_{\Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_k(n)})_{n \geq 1}$. Pour tout couple d'entiers $p, q \geq 1$, on peut alors écrire :

$$\begin{cases} \gamma(x_p) &= \gamma_{\Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_{p \vee q}(1)}(x_p); \\ \gamma(x_q) &= \gamma_{\Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_{p \vee q}(1)}(x_q), \end{cases}$$

si bien que les propriétés d'injectivité et de préservation de la racine, de la structure et des longueurs de l'application γ ainsi définie se déduisent immédiatement de celles des $(\gamma_n)_{n \geq 1}$. Quant à la surjectivité, il suffit d'observer que la restriction de γ à chaque $\lceil G \rceil_\varrho$ injecte les sommets de ce dernier dans ceux de $\lceil G' \rceil_\varrho$ (conservation des longueurs) et que ces deux ensembles finis ont par hypothèse même cardinal.

(ii) Nous avons déjà observé que $G_n \xrightarrow{\mathcal{G}^*} G$ si et seulement si pour tout point de continuité ϱ de G , $d_0(\lceil G_n \rceil_\varrho, \lceil G \rceil_\varrho) \rightarrow 0$. Il s'agit donc de montrer que cette dernière condition est équivalente à $d(G_n, G) \rightarrow 0$. Le sens direct est une conséquence immédiate du théorème de convergence de Lebesgue. Réciproquement, supposons $d(G_n, G) \rightarrow 0$ et considérons un point de continuité ϱ_0 de G . Par la remarque initiale, celui-ci est inclus dans un ouvert $]\varrho_-; \varrho_+[$ sur lequel $\lceil G \rceil_\varrho = \lceil G \rceil_{\varrho_0}$, et $\varrho \mapsto 1 \wedge d_0(\lceil G_n \rceil_\varrho, \lceil G \rceil_\varrho)$ est constante sur chacun des sous-intervalles de $]\varrho_-; \varrho_+[$ délimités par les points de discontinuité de G_n ; de plus, elle ne peut être strictement inférieure à 1 que sur un seul au plus de ces sous-intervalles⁴. Notant I_n ce dernier (éventuellement vide) et $l(I_n)$ sa longueur, tout cela s'écrit :

$$\varrho_+ - \varrho_- - l(I_n) \leq \int_{\varrho_-}^{\varrho_+} 1 \wedge d_0(\lceil G_n \rceil_\varrho, \lceil G \rceil_\varrho) d\varrho$$

Le terme de droite est trivialement majoré par $e^{\varrho_+} d(G_n, G)$ qui tend vers zéro par hypothèse, de sorte que $l(I_n) \rightarrow \varrho_+ - \varrho_-$; ainsi I_n finit par contenir ϱ_0 et l'on peut aussitôt écrire :

$$\int_{\varrho_-}^{\varrho_+} 1 \wedge d_0(\lceil G_n \rceil_\varrho, \lceil G \rceil_\varrho) d\varrho = l(I_n) \times d_0(\lceil G_n \rceil_{\varrho_0}, \lceil G \rceil_{\varrho_0}) + \varrho_+ - \varrho_- - l(I_n),$$

d'où l'on tire finalement bien que $d_0(\lceil G_n \rceil_{\varrho_0}, \lceil G \rceil_{\varrho_0}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. □

³Supposant $\Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}$ déjà construites, il existe par connexité $n_k \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que $x_k \in \lceil G \rceil_{\Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_{k-1}(n_k)}$; par préservation des longueurs la suite $(\gamma_{\Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_{k-1}(n)}(x_k))_{n \geq n_k}$ est alors à valeurs dans $\lceil G' \rceil_{\Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_{k-1}(n_k)}$ qui est fini : on peut donc bien en extraire une sous-suite $(\gamma_{\Phi_1 \circ \dots \circ \Phi_k(n)}(x_k))_{n \geq 1}$ constante.

⁴Sur deux intervalles différents les $\lceil G_n \rceil_\varrho$ ont des tailles distinctes et $\lceil G \rceil_{\varrho_0}$ ne peut donc leur être simultanément isomorphe.

5.3 Caractérisation de la relative compacité

Pour établir la convergence d'une suite d'éléments dans un espace métrique, il est extrêmement utile de disposer d'une caractérisation explicite de la relative compacité.

Théorème 9 (Caractérisation de la relative compacité). *Une partie $K \subseteq \mathcal{G}^*$ est relativement compacte dans \mathcal{G}^* si et seulement si pour tout $\varrho > 0$ fixé :*

- (i) *le degré des sommets est uniformément majoré sur $\{\lceil G \rceil_\varrho; G \in K\}$;*
- (ii) *la longueur des arêtes est uniformément majorée sur $\{\lceil G \rceil_\varrho; G \in K\}$;*
- (iii) *la longueur des arêtes est uniformément minorée sur $\{\lceil G \rceil_\varrho; G \in K\}$ par un réel > 0 .*

La preuve du théorème se fonde sur le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit K une partie de \mathcal{G}^* vérifiant (i), (ii) et (iii). Alors pour tout $\varrho > 0$, l'ensemble $\{\lceil G \rceil_\varrho, G \in K\}$ est relativement compact pour la distance d_0 .*

Démonstration du lemme. Soit $(G_n)_{n \geq 1}$ une suite quelconque d'éléments de K . D'abord, les $(\lceil G_n \rceil_\varrho)_{n \geq 1}$ ont des degrés uniformément majorés par le critère (i) et un diamètre d'au plus $\lceil \frac{2\varrho}{\eta_\varrho} \rceil$ arêtes où η_ϱ est le minorant fourni par le critère (iii). Par conséquent leur taille est uniformément bornée : ils ne peuvent ainsi adopter, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de structures distinctes, et l'on peut donc extraire une première sous-suite infinie $(\lceil G_{\varphi(n)} \rceil_\varrho)_{n \geq 1}$ dont les éléments sont tous isomorphes. Cela signifie qu'il existe une famille $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ d'isomorphismes d'un même graphe $G = (V, \emptyset, E)$ non-encore valué vers les $\lceil G_{\varphi(n)} \rceil_\varrho, n \geq 1$. Notant alors ℓ_n le vecteur fini-dimensionnel des $|\gamma_n(e)|_{G_{\varphi(n)}}, e \in E$, la suite $(\ell_n)_{n \geq 1}$ est, par les critères (ii) et (iii), à valeurs dans un compact de $]0; +\infty[^E$, si bien que l'on peut en extraire une sous-suite $(\ell_{\psi(n)})$ convergeant vers un certain $\ell \in]0; +\infty[^E$. C'est exactement dire que $d_0(\lceil G_{\varphi \circ \psi(n)} \rceil_\varrho, G) \rightarrow 0$, où l'on a valué G par le vecteur limite ℓ . \square

Démonstration du théorème. Le sens direct est aisé : en effet, si l'une de ces trois conditions n'était pas satisfaite toute sous-limite d'une suite $(G_n)_{n \geq 1}$ bien choisie contiendrait aussitôt, selon le cas, un nombre infini de sommet, une arête de longueur infinie ou une arête de longueur nulle, contredisant la définition-même de \mathcal{G}^* . Réciproquement, supposons les trois conditions vérifiées et considérons une suite quelconque $(G_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de K . Grâce au lemme, on peut construire par extraction diagonale une sous-suite $(G_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ telle que pour tout k , la suite des k -restrictions $(\lceil G_{\varphi(n)} \rceil_k)_{n \geq 1}$ soit d_0 -convergente :

$$\forall k \geq 1, d_0 \left(\lceil G_{\varphi(n)} \rceil_k, G_\infty^{(k)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5.1)$$

Aussitôt, les limites $(G_\infty^{(k)})_{k \geq 1}$ forment une suite consistante⁵ de graphes enracinés et valués (finis) dont on peut considérer la réunion croissante $G = (V, \emptyset, E) = \bigsqcup_{k \geq 1} G_\infty^{(k)}$. Il découle aisément de (5.1) que $\lceil G \rceil_\varrho \subseteq G_\infty^{(\lceil \varrho \rceil + 1)}$ pour tout $\varrho > 0$, de sorte que G est bien localement fini, donc dans \mathcal{G}^* . Nous pouvons désormais conclure la preuve en montrant :

$$G_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{G}^*} G. \quad (5.2)$$

⁵Au sens où pour tout $k \geq 1$, $G_\infty^{(k)}$ se plonge dans $G_\infty^{(k+1)}$ (noté $G_\infty^{(k)} \subseteq G_\infty^{(k+1)}$) i.e. il existe un morphisme injectif du premier vers le second conservant les longueurs.

Soient donc ϱ un point de continuité de G et $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $\lceil G \rceil_{\varrho-\eta} = \lceil G \rceil_{\varrho} = \lceil G \rceil_{\varrho+\eta}$ (η existe par locale finitude de G). La convergence (5.1) nous fournit une suite d'isomorphismes $\left(\gamma_n : G_{\infty}^{(\lceil \varrho \rceil + 1)} \rightarrow \lceil G_{\varphi(n)} \rceil_{\lceil \varrho \rceil + 1} \right)_{n \geq n_0}$ dont l'amplitude $\| \gamma_n \|$ tend vers zéro. La restriction de chacun de ces γ_n aux sommets de $\lceil G \rceil_{\varrho}$ est aussitôt un isomorphisme de $\lceil G \rceil_{\varrho}$ vers la restriction naturelle de $\lceil G_{\varphi(n)} \rceil_{\lceil \varrho \rceil + 1}$ aux sommets images, et son amplitude tend à fortiori vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Or pour n assez grand ces sommets images se trouvent être exactement ceux de $\lceil G_{\varphi(n)} \rceil_{\varrho}$. En effet, l'image par γ_n d'un chemin élémentaire reliant un sommet x de $G_{\infty}^{(\lceil \varrho \rceil + 1)}$ à la racine est un chemin élémentaire de $G_{\varphi(n)}$ reliant $\gamma_n(x)$ à la racine, et puisque $\| \gamma_n \| \rightarrow 0$ les longueurs de ces chemins finissent par différer d'au plus η , entraînant ainsi $\gamma_n(\lceil G \rceil_{\varrho}) = \lceil G_{\varphi(n)} \rceil_{\varrho}$. Cela prouve la convergence (5.2). \square

5.4 Séparabilité et complétude

La séparabilité de \mathcal{G}^* est immédiate. En effet, l'ensemble dénombrable $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}^*$ des graphes connexes finis de valuation rationnelle est dense dans \mathcal{G}^* , puisqu'étant donnés $G \in \mathcal{G}^*$ et $\varepsilon > 0$, on peut toujours choisir ϱ_0 tel que $e^{-\varrho_0} \leq \varepsilon$ et considérer le graphe $G_0 \in \mathcal{D}$ obtenu à partir de $\lceil G \rceil_{\varrho_0}$ en tronquant rationnellement les longueurs des arêtes à une précision ε , de sorte que :

$$d(G, G_0) \leq e^{-\varrho_0} + \int_0^{\varrho_0} e^{-\varrho} \left(1 \wedge d_0(\lceil G \rceil_{\varrho}, \lceil G_0 \rceil_{\varrho}) \right) d\varrho \leq 2\varepsilon.$$

Malheureusement, l'espace métrique (\mathcal{G}^*, d) tel que nous l'avons construit n'est pas complet. Par exemple, la suite $(G_n)_{n \geq 1}$ des graphes à deux sommets respectivement reliés par une arête de longueur $1/n$ est clairement de Cauchy pour la distance d puisque :

$$\forall n, m \geq 1, d(G_n, G_m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|,$$

mais elle n'est pas convergente car la longueur de son unique arête contredit le point (iii) du critère de relative compacité. Pour remédier à cela, modifions quelque-peu la distance d_0 en posant pour $G = (V, \varnothing, E)$ et $G' = (V', \varnothing', E')$ dans \mathcal{G}^* :

$$\tilde{d}_0(G, G') := \inf_{\gamma: G \rightarrow G'} \sup_{e \in E} \left| \ln |\gamma(e)|_{G'} - \ln |e|_G \right|,$$

Théorème 10 (Complétude). *L'application*

$$\tilde{d} : G, G' \mapsto \int_0^{\infty} e^{-\varrho} \left(1 \wedge \tilde{d}_0(\lceil G \rceil_{\varrho}, \lceil G' \rceil_{\varrho}) \right) d\varrho$$

est une distance sur \mathcal{G}^ qui métrise la convergence locale et rend l'espace obtenu complet.*

Rappelons avant tout que relative compacité et séparabilité sont des notions topologiques : elle ne dépendent pas du choix de la distance utilisée pour métriser la topologie considérée, si bien que tous les résultats précédents demeureront parfaitement valables dans $(\mathcal{G}^*, \tilde{d})$.

Démonstration. La preuve du fait que \tilde{d} est une distance qui métrise la convergence locale est la-même que pour d . Soit maintenant $(G_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{G}^*, \tilde{d})$. On peut en extraire une sous-suite $(G_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ telle que $\forall n \geq 1, d(G_{\varphi(n)}, G_{\varphi(n+1)}) \leq 2^{-n}$. Par Fubini :

$$\int_0^{\infty} e^{-\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 \wedge \tilde{d}_0(\lceil G_{\varphi(n)} \rceil_{\varrho}, \lceil G_{\varphi(n+1)} \rceil_{\varrho}) \right) d\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{d}(G_{\varphi(n)}, G_{\varphi(n+1)}) < \infty.$$

Par conséquent, la série sous l'intégrale converge pour presque tout ϱ . Puisqu'une telle série ne peut contenir qu'un nombre fini de termes ≥ 1 , il existe un rang n_ϱ au delà duquel les graphes $[G_{\varphi(n)}]_\varrho, n \geq n_\varrho$ sont tous isomorphes, et le premier critère du théorème 1 est aussitôt vérifié. Notant alors, pour tout $n \geq n_\varrho$, $\gamma_n^\varrho : [G_{\varphi(n)}]_\varrho \rightarrow [G_{\varphi(n+1)}]_\varrho$ un isomorphisme réalisant le minimum dans la définition de $\tilde{d}_0([G_{\varphi(n)}]_\varrho, [G_{\varphi(n+1)}]_\varrho)$, la suite $(\ln |\gamma_n^\varrho \circ \dots \circ \gamma_{n_\varrho}^\varrho(e)|_{G_{\varphi(n)}})_{n \geq n_\varrho}$ est de Cauchy pour toute arête e de $[G_{\varphi(n_\varrho)}]_\varrho$, donc en particulier bornée, ce qui assure l'existence de réels $\eta_\varrho^-, \eta_\varrho^+ > 0$ tels que $\eta_\varrho^- \leq |e|_{G_{\varphi(n)}} \leq \eta_\varrho^+$ pour tout $n \geq 1$ et toute arête e de $[G_{\varphi(n)}]_\varrho$. Ainsi le critère de relative compacité du théorème 1 est satisfait pour presque tout ϱ donc pour tout ϱ par monotonie, ce qui garantit la convergence d'une certaine sous-suite $(G_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \geq 1}$ puis celle de $(G_n)_{n \geq 1}$ elle-même puisqu'elle est de Cauchy. \square

Chapitre 6

Convergence des croyances sur le graphe infini limite

La notion de convergence locale étant désormais parfaitement définie, nous pouvons énoncer le théorème de convergence vers le PWIT démontré par Aldous dans [Ald92] et systématisé dans [Ste02]. Comme nous allons le voir tout de suite, ce résultat exhibe une structure locale limite explicite pour les graphes bipartis aléatoirement valués $\mathcal{K}_{n,n}$ que nous avons naturellement associés au dilemme de l'affectation optimale au début de ce mémoire, de sorte que nous pouvons espérer remplacer l'analyse asymptotique de la propagation des croyances lorsque la taille n du graphe sous-jacent tend vers l'infini par l'étude directe du phénomène sur cette structure infinie limite.

6.1 Le graphe infini limite

Nous noterons \mathcal{V} l'ensemble des mots finis sur l'alphabet des entiers strictement positifs. “.” représentera l'opération de concaténation usuelle sur ces mots, \emptyset le mot-vide, \mathcal{V}^* l'ensemble \mathcal{V} privé de \emptyset , et pour tout $v \in \mathcal{V}^*$, \hat{v} le mot obtenu en ôtant à v sa dernière lettre. Nous commençons par définir la fameuse structure aléatoire limite exhibée par Aldous :

Définition 20 (Le PWIT). *Posant $\mathcal{E} := \{\{v, v.i\}; v \in \mathcal{V}, i \in \mathbb{N}^*\}$, on appelle PWIT (pour “Poisson Weighted Infinite Tree”) tout graphe géométrique aléatoire \mathcal{T} isomorphe à l'arbre infini complet $(\mathcal{V}, \emptyset, \mathcal{E})$ et tel que les longueurs $(|\{v, v.i\}_{\mathcal{T}}|_{i \geq 1})$ des arêtes-filles de chaque sommet $v \in \mathcal{V}$ forment un processus de Poisson¹ homogène d'intensité 1 sur la demi-droite \mathbb{R}^+ , ces processus étant eux-mêmes indépendants lorsque v varie.*

Il est aisé de vérifier qu'un tel arbre aléatoire est bien p.s. localement fini donc dans \mathcal{G}^* , et nous pouvons enfin énoncer le théorème de convergence vers le PWIT.

Théorème 11 (Convergence vers le PWIT, Aldous, [Ald01]). *Rappelons que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{K}_{n,n}$ est le graphe aléatoire obtenu en valuant les n^2 arêtes du graphe biparti équilibré de taille $2n$ par des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[0; n]$. Alors :*

$$\mathcal{K}_{n,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{T},$$

¹On rappelle qu'un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$ sur \mathbb{R}^+ est une famille $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires positives et croissantes dont les incréments $X_{i+1} - X_i$, $i \geq 1$ sont des variables aléatoires indépendantes de distribution exponentielle de paramètre λ , i.e de densité $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$.

au sens usuel de la convergence en loi dans un espace polonais, i.e. $\mathbb{E}[\varphi(\mathcal{K}_{n,n})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi(\mathcal{T})]$ pour toute fonction $\varphi: \mathcal{G}^* \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et continue pour la topologie de la convergence locale.

Il s'agit maintenant d'étudier l'algorithme BP lorsqu'il est exécuté sur cet arbre infini limite. Plus précisément, nous désirons déterminer le comportement asymptotique des messages aléatoires $(m_{\mathcal{T}}^k(i \rightarrow \emptyset))_{i \geq 1}$ parvenant à la racine lorsque le nombre k d'itérations tend vers $+\infty$. Rappelons que ces messages sont définis inductivement par la récurrence :

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, m_{\mathcal{T}}^{k+1}(v \rightarrow \dot{v}) := \inf_{i \geq 1} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^k(v.i \rightarrow v) \right\}. \quad (6.1)$$

L'invariance spatiale du PWIT assure qu'ils ont à chaque étape k la même distribution dans tout l'arbre. Si F dénote la queue² de cette distribution à un instant donné, un calcul immédiat (c.f. [Ald01]) montre que celle obtenue à l'étape suivante par application de (6.1) est :

$$TF : x \mapsto \exp \left(- \int_{-x}^{+\infty} F(t) dt \right). \quad (6.2)$$

Cela définit un opérateur T sur l'espace \mathcal{D} des queues de distributions étendues, i.e. des fonctions $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ décroissantes et continues à gauche, et il s'agit maintenant d'étudier sa dynamique. Cette question se trouve englober un problème ouvert soulevé par Aldous dans un ouvrage récent sur les équations distributionnelles récursives ([Ald05, open problem 62]) : celui du domaine d'attraction de l'unique point-fixe non-dégénéré³ de T , à savoir la loi logistique

$$F^* : x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}. \quad (6.3)$$

Le résultat que nous allons maintenant démontrer répond partiellement à ce problème ouvert.

6.2 Convergence en distribution

Dans cette section, nous déterminons précisément le comportement asymptotique des itérées successives $(T^k F)_{k \geq 1}$ de l'opérateur T pour une large classe de distributions initiales $F \in \mathcal{D}$ qui inclue en particulier la fonction $t \mapsto \mathbf{1}_{\{t < 0\}}$ correspondant aux messages initialement nuls de l'algorithme BP. D'abord, T est clairement décroissant, au sens où :

$$F \leq G \text{ sur tout } \mathbb{R} \Rightarrow TG \geq TF \text{ sur tout } \mathbb{R}. \quad (6.4)$$

Cela suggère d'étudier plutôt l'itérée seconde, croissante. Celle-ci admet une infinité de points-fixes : Notant en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, θ_t l'opérateur défini par $\theta_t F : x \mapsto F(x - t)$, on a

$$T \circ \theta_t = \theta_{-t} \circ T, \quad (6.5)$$

si bien que $T^2(\theta_t F^*) = \theta_t(T^2 F^*) = \theta_t F^*$. Ces points-fixes joueront, on le devine, un rôle crucial dans l'étude de la dynamique de T . Introduisons-donc, pour $F \in \mathcal{D}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{F}(x) := x + \ln \left(\frac{F(x)}{1 - F(x)} \right) \in [-\infty, +\infty], \quad (6.6)$$

de sorte que $F(t) = F^* \left(t + \widehat{F}(t) \right)$. Étudions alors l'évolution de l'amplitude des variations de cette transformée sous l'action de T .

²Rappelons que la queue de distribution d'une v.a. réelle X est la fonction $F: x \rightarrow \mathbb{P}(X > x)$.

³C'est-à-dire tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$, étant ainsi la queue d'une v.a. finie p.s.

Lemme 2. Soit $F \in \mathcal{D}$. On suppose \widehat{F} bornée. Alors $\widehat{T^2 F}$ l'est aussi, et on a même :

$$\sup_{\mathbb{R}} \widehat{T^2 F} \leq \sup_{\mathbb{R}} \widehat{F} \quad \text{et} \quad \inf_{\mathbb{R}} \widehat{T^2 F} \geq \inf_{\mathbb{R}} \widehat{F}$$

De plus, ces inégalités sont strictes dès que \widehat{F} n'est pas constante.

Démonstration. Les inégalités larges découlent immédiatement de la croissance de T^2 :

$$m \leq \widehat{F} \leq M \Leftrightarrow \theta_m F^* \leq F \leq \theta_M F^* \Rightarrow \theta_m F^* \leq T^2 F \leq \theta_M F^* \Leftrightarrow m \leq \widehat{T^2 F} \leq M,$$

Si \widehat{F} n'est pas constante, alors par continuité à gauche elle est majorée sur un intervalle $]a, b[$ par un réel m strictement plus petit que son suprémum M . Pour tout $x \geq -a$, on a alors :

$$\begin{aligned} TF(x) &= \exp\left(-\int_{-x}^{+\infty} F(u)du\right) \\ &\geq \exp\left(-\int_{-x}^a \theta_M F^*(u)du\right) \exp\left(-\int_a^b \theta_m F^*(u)du\right) \exp\left(-\int_b^{\infty} \theta_M F^*(u)du\right) \\ &= \kappa \times T(\theta_M F^*)(x) \quad \text{avec} \quad \kappa := \exp\left(\int_a^b (\theta_M F^* - \theta_m F^*)(u)du\right) > 1. \end{aligned}$$

Appliquant à nouveau T , il vient pour tout réel x :

$$\begin{cases} x \leq a \Rightarrow T^2 F(x) \leq \exp\left(-\kappa \int_{-x}^{+\infty} T(\theta_M F^*)(u)du\right) = (\theta_M F^*(x))^\kappa; \\ x \geq a \Rightarrow T^2 F(x) \leq \exp\left(-\int_{-x}^{-a} T(\theta_M F^*)(u)du\right) (\theta_M F^*(a))^\kappa = \kappa' \times \theta_M F^*(x), \end{cases}$$

où $\kappa' := (\theta_M F^*(a))^{\kappa-1} < 1$. Bien-sûr, on peut majorer strictement ces deux bornes par $\theta_M F^*(x)$ et obtenir ainsi $\widehat{T^2 F}(x) < M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais c'est trop grossier pour garantir que l'inégalité reste stricte en $\pm\infty$. En fait, ces deux bornes donnent plus précisément :

$$\begin{cases} x \leq a \Rightarrow \widehat{T^2 F}(x) \leq x + \ln\left(\frac{(\theta_M F^*(x))^\kappa}{1 - (\theta_M F^*(x))^\kappa}\right) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} M - \ln \kappa < M; \\ x \geq a \Rightarrow \widehat{T^2 F}(x) \leq x + \ln\left(\frac{\kappa' \times \theta_M F^*(x)}{1 - \kappa' \times \theta_M F^*(x)}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} M + \ln \kappa' < M. \end{cases}$$

Cela garantit bien $\sup_{\mathbb{R}} \widehat{T^2 F} < M$, et l'autre inégalité s'obtient de la même façon. \square

Lemme 3. Soit $F \in \mathcal{D}$. On suppose \widehat{F} bornée. Alors pour tout $k \geq 3$, $\widehat{T^k F}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et la famille des dérivées $\{(\widehat{T^k F})', k \geq 3\}$ est uniformément intégrable sur \mathbb{R} .

Démonstration. Par hypothèse, $\theta_{-M} F^* \leq F \leq \theta_M F^*$ pour un certain $M \geq 0$, et aussitôt :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \theta_{-M} F^* \leq T^k F \leq \theta_M F^*. \quad (6.7)$$

D'autre part, pour tout $k \geq 1$, $T^k F$ est 1-lipschitzienne, de sorte que $T^{k+1} F$ est \mathcal{C}^1 avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T^{k+1} F'(x) = -T^{k+1} F(x) T^k F(-x).$$

Fixons désormais $k \geq 3$: à son tour, $\widehat{T^k F}$ est bien de classe \mathcal{C}^1 et l'on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\widehat{T^k F})'(x) = \frac{1 - T^k F(x) - T^{k-1} F(-x)}{1 - T^k F(x)}.$$

(6.7) nous permet de dominer ce quotient par $x \mapsto \frac{e^{2M}-1}{1+e^{x+M}}$ indépendamment de k , ce qui garantit déjà l'uniforme intégrabilité en $+\infty$. Quant à l'autre côté, le numérateur est \mathcal{C}^1 et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, |1 - T^k F(x) - T^{k-1} F(-x)| &= \left| \int_{-\infty}^x T^{k-1} F(-u) (T^k F(u) - T^{k-2} F(u)) du \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^x \theta_M F^*(-u) (\theta_M F^*(u) - \theta_{-M} F^*(u)) du. \end{aligned}$$

Cela suffit amplement pour l'uniforme intégrabilité en $-\infty$ puisque cette intégrale est aisément majorée par une constante fois e^{2x} tandis que le dénominateur est seulement en e^{-x} . \square

Nous en savons à présent assez pour démontrer le résultat principal de cette sous-section :

Théorème 12 (Convergence en distribution sur le PWIT). *Soit $F \in \mathcal{D}$. On suppose qu'il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\widehat{T^{k_0} F}$ est bornée. Alors les suites de fonctions $(\widehat{T^{2k} F})_{k \geq 0}$ et $(\widehat{T^{2k+1} F})_{k \geq 0}$ convergent uniformément sur \mathbb{R} vers deux fonctions constantes opposées l'une de l'autre. En particulier, notant γ et $-\gamma$ ces constantes, on a, uniformément sur \mathbb{R} :*

$$\begin{cases} T^{2k} F & \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \theta_\gamma F^*; \\ T^{2k+1} F & \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \theta_{-\gamma} F^*. \end{cases}$$

Démonstration. Sans perte de généralités on peut supposer $k_0 = 0$. Comme d'habitude, l'hypothèse \widehat{F} garantit l'existence de $t \geq 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \theta_{-t} F^* \leq T^k F \leq \theta_t F^*. \quad (6.8)$$

Par le lemme 2, les suites bornées $(\inf_{\mathbb{R}} \widehat{T^{2k} F^*})_{k \geq 1}$ et $(\sup_{\mathbb{R}} \widehat{T^{2k} F^*})_{k \geq 1}$ sont respectivement croissante et décroissante, donc convergentes. Notons m et M leurs limites respectives. Les $T^{2k} F$, $k \geq 1$ étant clairement 1-lipschitzienne, le théorème d'Ascoli garantit leur relative compacité pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et l'on peut donc extraire une sous-suite convergente :

$$T^{2\varphi(k)} F \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F_\infty.$$

Cette convergence entraîne celle des $\widehat{T^{2\varphi(k)} F}$ vers \widehat{F}_∞ puisque sur tout compact de \mathbb{R} l'encadrement uniforme (6.8) maintient les $T^{2\varphi(k)} F$ dans un compact de $]0; 1[$ sur lequel on peut invoquer l'uniforme continuité de $y \mapsto \ln \frac{y}{1-y}$. Dès lors, un simple passage à la limite garantit $m \leq \widehat{F}_\infty \leq M$. Ces inégalités sont en fait optimales. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ le lemme 3 garantit l'existence d'un compact K_ε tel que pour tout $k \geq 3$:

$$\begin{cases} \inf_{\mathbb{R}} \widehat{T^{\varphi(k)} F} & \geq \inf_{K_\varepsilon} \widehat{T^{\varphi(k)} F} - \varepsilon; \\ \sup_{\mathbb{R}} \widehat{T^{\varphi(k)} F} & \leq \sup_{K_\varepsilon} \widehat{T^{\varphi(k)} F} + \varepsilon, \end{cases}$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$, il vient donc $\inf_{\mathbb{R}} \widehat{F}_{\infty} \leq m + \varepsilon$ et $\sup_{\mathbb{R}} \widehat{F}_{\infty} \geq M - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où il résulte bien que $\inf_{\mathbb{R}} \widehat{F}_{\infty} = m$ et $\sup_{\mathbb{R}} \widehat{F}_{\infty} = M$. Par ailleurs, il est facile de voir que la restriction de T à $\{F \in \mathcal{D}, -t \leq \widehat{F} \leq t\}$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, de sorte que :

$$T^{2(\varphi(k)+1)} F \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T^2 F_{\infty}.$$

Mais aussitôt, le raisonnement précédent implique $\inf_{\mathbb{R}} \widehat{T^2 F_{\infty}} = m$ et $\sup_{\mathbb{R}} \widehat{T^2 F_{\infty}} = M$, et la seconde partie du lemme 2 entraîne donc $m = M$. C'est exactement dire que la suite $(\widehat{T^{2k} F})_{k \geq 0}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction constante, et la propriété (6.5) assure enfin la convergence uniforme de $(\widehat{T^{2k+1} F})_{k \geq 0}$ vers la fonction constante opposée. \square

Avant de clore cette section, remarquons juste que le cas $F: t \mapsto \mathbf{1}_{\{t < 0\}}$ correspondant à la situation de l'algorithme BP satisfait bien l'hypothèse du théorème, puisque l'on calcule aisément que $T^2 F(t) = e^{-e^t \wedge (1+t)}$, d'où $-1 \leq \widehat{T^2 F} \leq 0$.

6.3 Convergence forte

La convergence que nous venons d'établir est "faible" en ceci qu'elle concerne seulement la distribution des messages et non les messages eux-mêmes tels qu'ils sont effectivement obtenus une fois les données aléatoirement générées. À l'aide d'un couplage stochastique, nous établissons ici leur convergence forte, la seule qui ait vraiment un sens du point-de-vue algorithmique. Rappelons que pour tout sommet v d'un arbre enraciné \mathcal{T} , \mathcal{T}_v désigne le sous-arbre de \mathcal{T} engendré par v et toute sa descendance. L'invariance spatiale du PWIT et l'indépendance des sous-arbres disjoints fournissent un candidat naturel pour la limite, si elle existe, des configurations successivement adoptées par BP :

Définition 21 (Configuration stationnaire). *On appelle **configuration stationnaire** sur un PWIT $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \emptyset, \mathcal{E})$ toute famille de variables aléatoires $(m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$ satisfaisant :*

- *l'invariance spatiale : les $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}), v \in \mathcal{V}^*$ sont identiquement distribués ;*
- *l'indépendance des sous-arbres : pour tout $v \in \mathcal{V}^*$, $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v})$ est indépendant des longueurs des arêtes qui ne sont pas dans \mathcal{T}_v et pour tout $v \in \mathcal{V}$ les familles de v.a. $(m_{\mathcal{T}}^*(u \rightarrow \dot{u}))_{u \in \mathcal{T}_{v,i}}$ sont indépendantes lorsque i varie dans \mathbb{N}^* ;*
- *la stationnarité : $\forall v \in \mathcal{V}^*, m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}) = \inf_{i \geq 1} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^*(v.i \rightarrow v) \right\}$ p.s.*

L'existence d'un PWIT muni d'une telle configuration est assurée par le théorème de consistance de Kolmogorov : pour tout $k \geq 1$, on peut en effet construire les k premières générations d'un PWIT et, indépendamment, une famille $(m^*(v \rightarrow \dot{v}))_{|v|=k}$ de variables i.i.d. de loi F^* , puis définir récursivement les $m^*(v \rightarrow \dot{v})_{1 < |v| < k}$ par la relation (6.1) ; l'invariance spatiale et l'indépendance des sous-arbres découlent immédiatement de la définition du PWIT et de l'égalité $TF^* = F^*$. Finalement, les distributions jointes $(|\{v, \dot{v}\}|_{\mathcal{T}}, m^*(v \rightarrow \dot{v}))_{1 < |v| \leq k}$ ainsi spécifiées sont bien consistentes et le théorème de Kolmogorov s'applique donc.

Toutefois, rien ne garantit a priori la mesurabilité de la configuration $(m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$ ainsi obtenue vis-à-vis de la tribu engendrée par les longueurs des arêtes : le problème –

soulevé par Aldous dans [Ald01] puis généralisé dans [Ald05] – est de savoir si l’influence de la condition extérieure $(m^*(v \rightarrow \dot{v}))_{|v|=k}$ imposée à la frontière dans la construction de Kolmogorov disparaît lorsque cette frontière s’éloigne à l’infini. De manière remarquable, cette propriété cruciale baptisée **endogénéité** a récemment été établie ([Ban02]), impliquant au passage l’unicité de la configuration stationnaire lorsqu’elle existe. Nous allons nous appuyer sur ce résultat pour démontrer à présent la convergence forte de l’algorithme BP sur le PWIT :

Théorème 13 (Convergence forte sur le PWIT). *Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \emptyset, \mathcal{E})$ un PWIT. Alors, à une constante additive $\gamma \in \mathbb{R}$ près, les configurations successivement obtenues au cours de l’exécution de BP sur \mathcal{T} convergent dans L^1 vers la configuration stationnaire :*

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, \begin{cases} m_{\mathcal{T}}^{2k}(v \rightarrow \dot{v}) & \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^1} m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}) - \gamma; \\ m_{\mathcal{T}}^{2k+1}(v \rightarrow \dot{v}) & \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{L^1} m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}) + \gamma. \end{cases}$$

De plus, les réponses successives de BP à la racine convergent en probabilité vers la réponse à la racine associée à cette configuration stationnaire :

$$\pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{i \geq 1} \left\{ |\{\emptyset, i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^k(i \rightarrow \emptyset) \right\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{proba}} \pi_{\mathcal{T}}^*(\emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{i \geq 1} \left\{ |\{\emptyset, i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^*(i \rightarrow \emptyset) \right\}.$$

Démonstration. Notons γ la constante additive apparaissant dans le théorème de convergence faible pour la distribution initiale $F: t \mapsto \mathbf{1}_{\{t < 0\}}$. Vue l’équation de mise-à-jour (6.1), décaler tous les messages initiaux d’une même constante additive a pour seul effet de décaler tous les messages pairs de cette même constante et tous les messages impairs de la constante opposée. On peut donc supposer $\gamma = 0$ sans perte de généralité. L’existence d’une configuration stationnaire n’étant pas a priori garantie sur le PWIT \mathcal{T} considéré, nous ne pouvons vérifier directement la convergence des suites $m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v})$ vers les limites annoncées ; passons donc plutôt par le critère de Cauchy. Fixons pour cela $\varepsilon > 0$ et montrons que pour k assez grand :

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, \sup_{s, t \geq k} \mathbb{E} \left[\left| m_{\mathcal{T}}^s(v \rightarrow \dot{v}) - m_{\mathcal{T}}^t(v \rightarrow \dot{v}) \right| \right] \leq 3\varepsilon. \quad (6.9)$$

Notre théorème de convergence faible assure l’existence d’un entier k_0 assez grand pour que $\theta_{-\varepsilon} F^* \leq T^{k_0} F \leq \theta_{\varepsilon} F^*$. Par un résultat classique, on peut représenter presque-sûrement ces inégalités en loi, c’est-à-dire qu’il existe un espace probabilisé $E_1 = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ sur lequel sont définies une v.a. X de loi $T^{k_0} F$ et deux v.a. X^-, X^+ de loi F^* vérifiant

$$p.s., X^- - \varepsilon \leq X \leq X^+ + \varepsilon.$$

D’autre part, nous avons vu que le théorème de Kolmogorov nous autorise à construire un espace probabilisé $E_2 = (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ sur lequel vit un PWIT $\tilde{\mathcal{T}}$ muni d’une configuration stationnaire $(m_{\tilde{\mathcal{T}}}^*(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$. Plaçons-nous alors sur l’espace produit $(\bigotimes_{v \in \mathcal{V}} E_1) \otimes E_2$ où sont conjointement définis le PWIT $\tilde{\mathcal{T}}$, sa configuration stationnaire et des copies indépendantes $(X_v^-, X_v, X_v^+)_{v \in \mathcal{V}}$ du triplet (X^-, X, X^+) . Sur $\tilde{\mathcal{T}}$, lançons simultanément trois instances de l’algorithme BP ne différant que par les conditions initiales utilisées :

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, \begin{cases} m_{\tilde{\mathcal{T}}}^{0,-}(v \rightarrow \dot{v}) & := X_v^-; \\ m_{\tilde{\mathcal{T}}}^0(v \rightarrow \dot{v}) & := X_v; \\ m_{\tilde{\mathcal{T}}}^{0,+}(v \rightarrow \dot{v}) & := X_v^+, \end{cases}$$

et comparons les configurations $(m_{\mathcal{T}}^{k,-}(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$, $(m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v}))_{v \neq \emptyset}$ et $(m_{\mathcal{T}}^{k,+}(v \rightarrow \dot{v}))_{v \neq \emptyset}$ respectivement obtenues. Par anti-monotonie et anti-homogénéité de la règle de mise-à-jour (6.1), les inégalités $X_v^- - \varepsilon \leq X_v \leq X_v^+ + \varepsilon$ se propagent, au sens où p.s. :

$$\forall k \geq 0, \forall v \in \mathcal{V}^*, \quad \begin{cases} m_{\mathcal{T}}^{2k,-}(v \rightarrow \dot{v}) - \varepsilon & \leq m_{\mathcal{T}}^{2k}(v \rightarrow \dot{v}) & \leq m_{\mathcal{T}}^{2k,+}(v \rightarrow \dot{v}) + \varepsilon ; \\ -m_{\mathcal{T}}^{2k+1,+}(v \rightarrow \dot{v}) - \varepsilon & \leq m_{\mathcal{T}}^{2k+1}(v \rightarrow \dot{v}) & \leq -m_{\mathcal{T}}^{2k+1,-}(v \rightarrow \dot{v}) + \varepsilon. \end{cases}$$

En particulier, cela implique pour tout $k \geq 0$ et tout $v \in \mathcal{V}^*$:

$$\begin{aligned} & \sup_{s,t \geq k} \mathbb{E} \left[\left| m_{\mathcal{T}}^s(v \rightarrow \dot{v}) - m_{\mathcal{T}}^t(v \rightarrow \dot{v}) \right| \right] \\ & \leq 2 \sup_{t \geq k} \mathbb{E} \left[\left| m_{\mathcal{T}}^t(v \rightarrow \dot{v}) - m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}) \right| \right] \\ & \leq 2 \sup_{t \geq k} \left\{ \mathbb{E} \left[\left| m_{\mathcal{T}}^{t,+}(v \rightarrow \dot{v}) - m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}) \right| \right] + \mathbb{E} \left[\left| m_{\mathcal{T}}^{t,-}(v \rightarrow \dot{v}) - m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}) \right| \right] + \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Or par un simple argument de martingale, l'endogénéité assure la convergence dans L^2 des v.a. logistiques $m_{\mathcal{T}}^{k,+}(v \rightarrow \dot{v})$ et $m_{\mathcal{T}}^{k,-}(v \rightarrow \dot{v})$ vers $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v})$, de sorte que le majorant dans l'inégalité ci-dessus tend vers 2ε lorsque $k \rightarrow \infty$. Pour obtenir (6.9) sur le PWIT initial \mathcal{T} , il ne reste alors plus qu'à remarquer que par construction :

$$\left(m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v}) \right)_{k \geq 0} \stackrel{(\text{loi})}{=} \left(m_{\mathcal{T}}^{k+k_0}(v \rightarrow \dot{v}) \right)_{k \geq 0}.$$

La suite $(m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v}))_{k \geq 0}$ est donc convergente dans L^1 pour tout $v \in \mathcal{V}^*$. Vérifions maintenant que les limites $(m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v}))_{v \in \mathcal{V}^*}$ forment une configuration stationnaire sur \mathcal{T} . L'invariance spatiale et l'indépendance des sous-arbres sont immédiates ; quant-à la stationnarité, on a par définition pour tout $v \in \mathcal{V}^*$:

$$m_{\mathcal{T}}^{k+1}(v \rightarrow \dot{v}) = \inf_{i \geq 1} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^k(v.i \rightarrow v) \right\},$$

et puisque le membre de gauche converge vers $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v})$ il suffit de vérifier que le membre de droite converge en probabilité vers $\inf_{i \geq 1} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^*(v.i \rightarrow v) \right\}$. C'est bien-sûr le nombre infini de quantités dans l'inf qui pose problème. Pour éviter d'allonger les formules, notons U_i^k et U_i^* , $i \geq 1$ ces dernières. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, tout $i_0 \geq 1$ et tout $k \geq 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \inf_{i \geq 1} U_i^k - \inf_{i \geq 1} U_i^* \right| \geq \varepsilon \right) \leq \mathbb{P} \left(\min_{1 \leq i < i_0} |U_i^k - U_i^*| \geq \varepsilon \right) + \sum_{i=i_0}^{\infty} \mathbb{P}(U_i^* \leq U_1^*) + \sum_{i=i_0}^{\infty} \mathbb{P}(U_i^k \leq U_1^k).$$

Pour tout i_0 fixé le premier terme tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$. Le second terme peut être rendu aussi petit que voulu car la série converge. En effet, son terme général n'est autre que $\mathbb{P}(\xi_{i-1} \leq X_1^* - X_2^*)$, où X_1^* et X_2^* sont i.i.d. de loi F^* et où $(\xi_i)_{i \geq 1}$ sont les points d'un processus de Poisson de paramètre 1 indépendant de X_1^*, X_2^* , or on a bien :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_i \leq X_1^* - X_2^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^{(X_1^* - X_2^*)^+} e^{-x} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} dx \right] = \mathbb{E} \left[(X_1^* - X_2^*)^+ \right] < +\infty.$$

Quant-au dernier terme, le théorème 12 fournit la domination uniforme $\theta_{-M} F^* \leq T F^k \leq \theta_M F^*$ pour un certain $M \geq 0$, si bien que $\mathbb{P}(U_i^k \leq U_1^k)$ est majoré indépendamment de k par $\mathbb{P}(\xi_{i-1} \leq X_1^* - X_2^* + 2M)$, dont la série converge par le même calcul que précédemment.

Attaquons-nous enfin à la convergence de la réponse de BP à la racine. Remarquons que par le lemme de Borel-Cantelli la convergence des séries de terme général $\mathbb{P}(U_i^k \leq U_1^*)$ et $\mathbb{P}(U_i^* \leq U_1^*)$ implique que l'inf des $(U_i^k)_{i \geq 1}$ est p.s. atteint pour tout k , et de même pour l'inf des $(U_i^*)_{i \geq 1}$. Comme ces différentes quantités sont en outre p.s. 2 à 2 distinctes du fait de l'indépendance des différents messages arrivant à la racine, leurs argmin respectifs $\pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset)$ et $\pi_{\mathcal{T}}^*(\emptyset)$ sont parfaitement bien définis. Finalement, pour tout $i_0 \geq 1$ et tout $k \geq 0$:

$$\mathbb{P}\left(\pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset) \neq \pi_{\mathcal{T}}^*(\emptyset)\right) \leq P\left(\arg \min_{1 \leq i < i_0} U_i^k \neq \arg \min_{1 \leq i < i_0} U_i^*\right) + \sum_{i=i_0}^{\infty} \mathbb{P}(U_i^k \leq U_1^k) + \sum_{i=i_0}^{\infty} \mathbb{P}(U_i^* \leq U_1^*),$$

où, de nouveau, les deux derniers termes peuvent être rendus aussi petits que voulu en choisissant i_0 assez grand indépendamment de k , tandis que le premier tend vers zéro par convergence des $m_{\mathcal{T}}^k(i \rightarrow \emptyset)$ vers $m_{\mathcal{T}}^*(i \rightarrow \emptyset)$. \square

Chapitre 7

Retour au cas fini : comportement asymptotique sur $\mathcal{K}_{n,n}$

Dans la première partie, nous avons associé à chaque instance aléatoirement générée du problème de l'affectation optimale de taille n un graphe valué $\mathcal{K}_{n,n}$ sur lequel il s'agissait d'étudier la convergence de certaines "croyances" lorsque n devient grand. La notion topologique introduite en seconde partie a mis en évidence une structure locale limite pour les $\mathcal{K}_{n,n}$, ce qui nous a amenés à étudier l'évolution des croyances sur ce graphe infini. Pour revenir au cas fini, il nous faut à présent justifier l'interversion comportement limite lorsque la taille n du graphe tend vers l'infini/ comportement sur le graphe infini limite. C'est à cette "continuité" de l'algorithme vis-à-vis de la convergence locale qu'est consacrée la dernière partie.

7.1 Continuité vis-à-vis de la convergence locale

L'espace métrique \mathcal{G}^* étant polonais, la convergence en distribution des $(\mathcal{K}_{n,n})_{n \geq 1}$ vers un PWIT \mathcal{T} peut être réalisée au sens presque-sûr par le théorème de représentation de Skohorod :

$$p.s., \mathcal{K}_{n,n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{G}^*} \mathcal{T}. \quad (7.1)$$

Nous aimerions en déduire que le comportement de BP sur $\mathcal{K}_{n,n}$ "converge" vers son comportement sur \mathcal{T} . Pour donner un sens rigoureux à cet énoncé, ré-indexons les sommets de $\mathcal{K}_{n,n}$ par des mots de façon redondante mais plus appropriée à la comparaison des messages entre $\mathcal{K}_{n,n}$ et \mathcal{T} : le mot-vide \emptyset représentera la racine de $\mathcal{K}_{n,n}$ et les entiers $1, 2, \dots, n$ ses n voisins ordonnés par longueur croissante de l'arête qui les relie à elle ; ensuite, par induction, si le mot non-vide v représente le sommet x et \dot{v} le sommet y , les mots $v.1, v.2, \dots, v.(n-1)$ désigneront les $n-1$ voisins de x distincts de y dans $\mathcal{K}_{n,n}$ ordonnés par longueur croissante de l'arête qui les relie à x . Cette définition a bien un sens car les longueurs sur $\mathcal{K}_{n,n}$ sont p.s. 2 à 2 distinctes. En outre, toute arête $\{u, v\} \in \mathcal{E}$ du PWIT est une arête de $\mathcal{K}_{n,n}$ dès que n est assez grand.

Théorème 14 (Comportement asymptotique de BP sur $\mathcal{K}_{n,n}$). *Pour tout $k \geq 0$, les messages générés par BP à l'étape k sur $\mathcal{K}_{n,n}$ et la réponse à la racine de $\mathcal{K}_{n,n}$ déduite de ces messages convergent en probabilité, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers ceux obtenus à l'étape k sur l'arbre limite \mathcal{T} :*

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v \rightarrow \dot{v}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{proba}} m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v}). \quad (7.2)$$

$$\forall k \geq 0, \mathbb{P}\left(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(\emptyset) \neq \pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (7.3)$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur k . L'initialisation est triviale. Supposons désormais acquise la convergence au rang k et fixons $v \in \mathcal{V}^*$. Il s'agit alors de montrer :

$$\min_{1 \leq i < n} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} - m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v.i \rightarrow v) \right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{proba}} \min_{i \geq 1} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}} - m_{\mathcal{T}}^k(v.i \rightarrow v) \right\}. \quad (7.4)$$

Pour raccourcir les calculs, notons $(U_i^n)_{1 \leq i < n}$ les arguments du minimum de gauche et $(U_i)_{i \geq 1}$ celles de droite. La convergence locale de $\mathcal{K}_{n,n}$ vers \mathcal{T} implique $|\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} |\{v, v.i\}|_{\mathcal{T}}$ pour tout $i \geq 1$, de sorte que chaque U_i^n converge en probabilité vers U_i . Cependant, leur nombre non-borné interdit de conclure à la convergence du min vers le min des quantités limites. Nous allons voir qu'en fait seul un nombre fini d'entre elles contribue, au sens où :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\arg \min_{1 \leq i < n} U_i^n \geq i_0\right) \xrightarrow[i_0 \rightarrow \infty]{} 0. \quad (7.5)$$

Cela garantira immédiatement (7.3) et (7.4) car pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left|m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v \rightarrow \dot{v}) - m_{\mathcal{T}}^k(v \rightarrow \dot{v})\right| \geq \varepsilon\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i < i_0} |U_i^n - U_i| \geq \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\arg \min_{1 \leq i < n} U_i^n \geq i_0\right) + \mathbb{P}\left(\arg \min_{i \geq 1} U_i \geq i_0\right), \\ & \text{et } \mathbb{P}\left(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(\emptyset) \neq \pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset)\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\arg \min_{1 \leq i < i_0} U_i^n \neq \arg \min_{1 \leq i < i_0} U_i\right) + \mathbb{P}\left(\arg \min_{1 \leq i < n} U_i^n \geq i_0\right) + \mathbb{P}\left(\arg \min_{i \geq 1} U_i \geq i_0\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant tendre n puis i_0 vers $+\infty$. Reste donc à établir la propriété (7.5). \square

Pour tout mot $v \in \mathcal{V}$, nous noterons $|v|$ sa longueur et $v_1, \dots, v_{|v|}$ les lettres qui le constituent. Enfin, pour tout $0 \leq h \leq |v|$, $v_{\leq h}$ dénotera le préfixe $v_1 \cdots v_h$.

Lemme 4. *Il existe des constantes $(\alpha_h)_{h \geq 1}$ telles que pour tout $v \in \mathcal{V}$, $i \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}^+$:*

$$\mathbb{P}\left(|\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \leq t\right) \leq \alpha_{|v|} \frac{t^i}{i!} e^t \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(|\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \geq t\right) \leq \alpha_{|v|} e^{-\frac{t}{2}} \sum_{q=0}^i \frac{t^q}{q!},$$

uniformément en n dès qu'il est assez grand pour que $v.i$ soit dans $\mathcal{K}_{n,n}$.

Démonstration. Supposons réalisé l'évènement $\{|\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} < t\}$. La séquence des préfixes $(v_{<0}, \dots, v_{\leq |v|})$ représente clairement un chemin issu de la racine dans $\mathcal{K}_{n,n}$. Suivons-le en supprimant au fur et à mesure les cycles rencontrés : nous obtenons ainsi un chemin sans cycle $x = (x_0, \dots, x_k)$ dans $\mathcal{K}_{n,n}$ de longueur $k \leq |v| \wedge (2n - 1)$ reliant la racine au sommet x_k représenté par v . Par l'hypothèse initiale, au moins i arêtes incidentes à x_k dans $\mathcal{K}_{n,n}$ ont une longueur inférieure ou égale à t , et l'évènement suivant est donc réalisé :

$$A_{n,x} := \left\{ \text{card} \left\{ y \neq x_{k-1}, |\{x_k, y\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \leq t \right\} \geq i - 1 \right\},$$

Fixons maintenant $0 \leq j < k$: par construction l'arête orientée (x_j, x_{j+1}) est représentée par un certain $(v_{\leq p-1}, v_{\leq p})$ ($1 \leq p \leq |v|$). Or le nombre d'arêtes incidentes à $v_{\leq p-1}$ ayant une longueur strictement inférieure à celle de $\{v_{\leq p-1}, v_{\leq p}\}$ vaut exactement v_p ou $v_p - 1$, selon que l'arête-père tombe ou non dans cette catégorie. Aussi l'évènement suivant est-il réalisé :

$$B_{n,x}^j := \bigcup_{p=1}^{|v|} \left\{ \text{card} \left\{ y \neq x_0, \dots, x_k, |\{x_j, y\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} < |\{x_j, x_{j+1}\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \right\} \in [v_p - k, v_p] \right\}.$$

Puisque toutes les arêtes considérées sont 2-à-2 distinctes, les évènements $A_{n,x}, B_{n,x}^0, \dots, B_{n,x}^{k-1}$ sont indépendants une fois le chemin $x = (x_0, \dots, x_k)$ fixé, et l'on trouve aisément :

$$\mathbb{P}(A_{n,x}) \leq \frac{t^i}{i!} e^t \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B_{n,x}^j) \leq \frac{(|v| + 1)^3}{n}.$$

Sommant finalement sur tous les $x = (x_1, \dots, x_k)$ possibles (il y en a moins que n^k), il vient :

$$\mathbb{P} \left(|\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \leq t \right) \leq \sum_{k=0}^{|v|} n^k \mathbb{P} \left(A_{n,x} \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} B_{n,x}^j \right) \leq \frac{t^i}{i!} e^t \sum_{k=0}^{|v|} (|v| + 1)^{3k}.$$

La seconde borne s'obtient de la même façon, en remplaçant " $\geq i - 1$ " par " $\leq i$ " dans $A_{n,x}$. \square

Lemme 5. *Pour tout $k \geq 0$, il existe des constantes $(\beta_{k,h})_{h \geq 0} > 0$ et $(t_{k,h})_{h \geq 0}$ telles que :*

$$\forall v \in \mathcal{V}^*, \forall t \geq t_{k,|v|}, \mathbb{P} \left(\left| m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v \rightarrow \dot{v}) \right| \geq t \right) \leq e^{-\beta_{k,|v|} t}, \quad (7.6)$$

uniformément en n dès qu'il est assez grand pour que v soit dans $\mathcal{K}_{n,n}$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur k . L'initialisation est triviale. Fixons à présent $k \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété (7.6) vérifiée pour une famille $(t_{k,h}, \beta_{k,h})_{h \geq 0}$ donnée. La borne supérieure découle aisément du lemme 5 puisque pour tout $v \in \mathcal{V}^*$ et tout $t \geq t_{k,|v|+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(m_{\mathcal{K}_{n,n}}^{k+1}(v \rightarrow \dot{v}) \geq t \right) &= \mathbb{P} \left(\min_{1 \leq i < n} \{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} - m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v.i \rightarrow v) \} \geq t \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(|\{v, v.1\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \geq \frac{t}{2} \right) + \mathbb{P} \left(m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v.1 \rightarrow v) \leq -\frac{t}{2} \right) \\ &\leq \alpha_{|v|} (1+t) e^{-\frac{t}{4}} + e^{-\beta_{k,|v|+1} t}, \end{aligned}$$

La domination exponentielle de la partie inférieure de la queue est un peu plus difficile à établir. Pour tout $v \in \mathcal{V}^*$ et tout $t \geq t_{|v|+1,k}$, écrivons, toujours par le lemme 5 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(m_{\mathcal{K}_{n,n}}^{k+1}(v \rightarrow \dot{v}) \leq -t \right) &= \mathbb{P} \left(\min_{1 \leq i < n} \{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} - m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v.i \rightarrow v) \} \leq -t \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P} \left(|\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \leq r_i(t) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P} \left(m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v.i \rightarrow v) \geq t + r_i(t) \right), \\ &\leq \alpha_{|v|} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(r_i(t))^i}{i!} e^{r_i(t)} + e^{-\beta_{k,|v|+1} t} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta_{k,|v|+1} r_i(t)}, \end{aligned}$$

où les inégalités sont valables pour tout choix des quantités $r_i(t) \geq 0$. Notre preuve se réduit donc finalement à la question : peut-on choisir ces quantités de façon que les deux contraintes suivantes soient simultanément satisfaites ?

(i) les $r_i(t)$ sont assez grands pour que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left(e^{-\beta_{k,|v|+1}t} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta_{k,|v|+1}r_i(t)} \right) < 0;$$

(ii) les $r_i(t)$ sont assez petits pour que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(r_i(t))^i}{i!} e^{r_i(t)} \right) < 0$.

La réponse est oui. En effet, en cherchant $r_i(t)$ de la forme $\delta i e^{-\gamma t}$ avec $\gamma, \delta > 0$ on obtient :

$$\frac{1}{t} \log \left(e^{-\beta_{k,|v|+1}t} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta_{k,|v|+1}r_i(t)} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \gamma - \beta_{k,|v|+1},$$

de sorte qu'il suffit de choisir $\gamma < \beta_{k,|v|+1}$ pour satisfaire la contrainte (i). Quant-à (ii), on a :

$$\frac{1}{t} \log \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(r_i(t))^i}{i!} e^{r_i(t)} \right) = \frac{1}{t} \log \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\delta i e^{-\gamma t})^i}{i!} e^{\delta i e^{-\gamma t}} \right) \leq -\gamma + \frac{1}{t} \log \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\delta i e^{\delta})^i}{i!} \right).$$

Il suffit donc de rendre la série de droite convergente, ce qui est possible puisqu'en choisissant δ assez petit pour que $\delta e^{\delta} < 1$, la formule de Stirling donne :

$$\frac{(\delta i e^{\delta})^i}{i!} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(\delta e^{\delta-1})^i}{\sqrt{2\pi i}}. \quad \square$$

Nous pouvons alors justifier l'hypothèse (7.5) utilisée dans notre preuve du théorème 14. Fixons en effet $k \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathcal{V}^*$, et choisissons $\delta > 0$ tel que $\delta e^{\delta-1} < 1$. Pour t assez grand :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\arg \min_{1 \leq i < n} \left\{ |\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} - m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v.i \rightarrow v) \right\} \geq i_0 \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(m_{\mathcal{K}_{n,n}}^{k+1}(v \rightarrow v) \geq t \right) + \sum_{i=i_0}^{n-1} \mathbb{P} \left(|\{v, v.i\}|_{\mathcal{K}_{n,n}} \leq \delta i \right) + \sum_{i=i_0}^{n-1} \mathbb{P} \left(m_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(v.i \rightarrow v) \geq \delta i - t \right) \\ & \leq e^{-\beta_{k+1,|v|}t} + \alpha_{|v|} \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{(\delta i e^{\delta})^i}{i!} + \sum_{i=i_0}^{\infty} e^{-\beta_{k,|v|+1}(\delta i - t)}, \end{aligned}$$

et il suffit pour conclure de faire tendre i_0 puis t vers $+\infty$.

7.2 Vitesse de convergence et complexité asymptotique

Nous sommes enfin en mesure de démontrer le résultat annoncé au début de ce mémoire :

Théorème 15. *[Vitesse asymptotique de convergence] L'algorithme décentralisé BP résout avec une précision moyenne aussi fine que voulue le problème de l'affectation optimale de taille n en un nombre constant d'itérations seulement, indépendamment de n ! C'est-à-dire :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[d(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*) \right] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Il en résulte une complexité totale seulement quadratique à comparer au $O(n^3)$ du meilleur algorithme exact connu à ce jour.

Démonstration. Rappelons le remarquable résultat de convergence locale d'Aldous ([Ald92, Ald01]) : l'application $\pi_{\mathcal{T}}^*$ définie à partir d'une configuration stationnaire $m_{\mathcal{T}}^*(v \rightarrow \dot{v})_{v \in \mathcal{V}^*}$ sur un PWIT \mathcal{T} comme expliqué dans la section 3.3 est un couplage sur \mathcal{T} et il est optimal au sens où :

$$\left(\mathcal{K}_{n,n}, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}}^*), \quad (7.7)$$

Le théorème de représentation de Skohorod nous permet de réaliser p.s. cette convergence en loi, et il suffit alors, pour obtenir le résultat, d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[d(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k, \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*)\right] &= \frac{1}{2n} \sum_{x \in \mathcal{K}_{n,n}} \mathbb{P}\left(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(x) \neq \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*(x)\right) = \mathbb{P}\left(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(\emptyset) \neq \pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*(\emptyset)\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset) \neq \pi_{\mathcal{T}}^*(\emptyset)\right) + \mathbb{P}\left(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^k(\emptyset) \neq \pi_{\mathcal{T}}^k(\emptyset)\right) + \mathbb{P}\left(\pi_{\mathcal{K}_{n,n}}^*(\emptyset) \neq \pi_{\mathcal{T}}^*(\emptyset)\right). \end{aligned}$$

puis de prendre la \limsup lorsque $n \rightarrow \infty$ et de faire enfin tendre $k \rightarrow \infty$: le premier terme devient nul par la convergence forte établie en troisième partie (théorème 13) ; le second disparaît également par la continuité de l'algorithme établie plus haut (théorème 14). Quant au troisième, il s'annule simplement par la réalisation p.s. de la convergence (7.7). \square

Bibliographie

- [Ald92] D. Aldous. Asymptotics in the random assignment problem. *Probability Theory and Related Fields*, 93(4) :507–534, 1992.
- [Ald01] D. Aldous. The $\zeta(2)$ limit in the random assignment problem. *Random Structures Algorithms*, 18 :381–418, 2001.
- [Ald05] D. Aldous. A survey of max-type recursive distributional equations. *Annals of Probability*, 15(2) :1047–1110, 2005.
- [AS03] D. Aldous and J. M. Steele. The objective method : Probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence. *Discrete and Combinatorial Probability*, 2003.
- [Ban02] A. Bandyopadhyay. Bivariate uniqueness in the logistic recursive distributional equation. Technical Report 629, University of California, Department of Statistics, Berkeley, November 2002.
- [Bil95] P. Billingsley. *Probability and Measure*. A Wiley-Interscience Publication, New York, third edition edition, 1995.
- [Bil99] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. A Wiley-Interscience Publication, New York, 1999.
- [BMrs] Pierre Brémaud and Laurent Massoulié. *A course on point processes*. Publication en cours.
- [Bré02] P. Brémaud. *Mathematical principles of signal processing*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [BSS05] M. Bayati, D. Shah, and M. Sharma. Maximum weight matching via max-product belief propagation. *Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory*, 2005.
- [DCD86] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo. *Probability and Statistics*, volume 2. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Gal03] J.-F. Le Gall. *Cours d'intégration et probabilités*. Janvier 2003.
- [GNS06] David Gamarnik, Tomasz Nowicki, and Grzegorz Swirszcz. Maximum weight independent sets and matchings in sparse random graphs. Exact results using the local weak convergence method. *Random Struct. Algorithms*, 28(1) :76–106, 2006.
- [Kal83] O. Kallenberg. *Random measures*. Academic Press, New York, 1983.
- [MP87] M. Mézard and G. Parisi. On the solution of the random link matching problem. *Journal of Physics*, 48 :1451–1459, 1987.
- [PBR05] L. Massoulié P. Brémaud and A. Ridolfi. Power spectra of random spike fields and related processes. *Journal of Applied Probabilities*, 2005.

- [Rid05] A. Ridolfi. *Power spectra of random spikes and related complex signals*. PhD thesis, School of Computer and Communications Sciences - Ecole Polytechnique de Lausanne, 2005.
- [Ste02] J. M. Steele. *Minimal Spanning Trees for Graphs with Random Edge Lengths*. in *Mathematics and Computer Science II : Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [SV87] A. A. M. Saleh and R. A. Valenzuela. A statistical model for indoor multipath propagation. *IEEE Journal on selected areas in communications*, SAC-5(2), february 1987.
- [Tal06] M. Talagrand. The Parisi formula. *Annals of Mathematics*, 163(1) :221–263, 2006.
- [TCS03] R. Rivest T. Cormen, C. Leiserson and C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, second edition, 2003.
- [THCS04] R. L. Rivest T. H. Cormen, C. E. Leiserson and C. Stein. *Introduction à l'algorithmique*. Dunod, Paris, 2004.
- [WSS05] M. Z. Win W. Suwansantisuk and L.A. Shepp. On the performance of wideband-width signal acquisition in dense multipath channels. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 2005.