Introduction au domaine de recherche : sur l'existence de variétés localements CAT(0) n'admettant pas de lissage riemannien.

Thibault SALL,

encadré par Gérard Besson

Table des matières

Introduction

Trouver une classification complète des variétés est un des problèmes majeurs de géométrie et topologie depuis le début du siècle. Henri Poincaré, qui a énoncé la célèbre conjecture au début des années 1900 démontrée récemment par Grigori Perelman, pensait initialement que l'homologie permettait de classer entièrement les variétés, avant de découvrir sa fameuse sphère homologique, appelée espace dodécaédrique de Poincaré, qu'on peut construire à partir du dodécaèdre en identifiant chaque face avec la face opposée par la rotation d'angle minimum qui superpose ces deux faces. C'est une variété de dimension 3 possédant les mêmes groupes d'homologie que la 3-sphère mais qui n'est pas homéomorphe à la sphère.

Il s'avère en fait que les questions de classification des variétés sont très différentes selon qu'on travaille en petites dimensions (plus petite que 3) ou en grandes dimensions (au-delà de 5 pour les variétés différentielles ou au-delà de 4 pour les variétés topologiques) :

1. en grandes dimensions, les variétés sont classées de manière algébrique grâce à la théorie de la chirurgie (on y étudie le fait que certaines applications soient cobordantes à des équivalences d'homotopies, ce qui se traduit par le fait qu'un élément appelé obstruction de chirurgie soit nul ou non dans un certain groupe). Les techniques de chirurgie ne s'appliquent qu'en dimension 5 ou supérieure (ou 4 si on ne s'intéresse qu'à la topologie des variétés), parce que l'outil principal de la théorie (qui permet d'enlever les "défauts d'injections" des immersions) requiert 5 dimensions pour fonctionner (4 dimensions en utilisant une variante due à Casson qui fonctionne pour les variétés topologiques mais plus pour les variétés différentielles) ;
2. en petites dimensions, les variétés sont classées par structures géométriques : en dimension 1 on a une classification triviale des variétés, en dimension 2 cela est dû aux résultats de classification des surfaces et le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann, et en dimension 3 la conjecture de géométrisation de Thurston démontrée par Perelman (par des méthodes d'analyse) permet de décomposer les variétés en somme connexe de variétés "primaires" qui sont de huit types différents.

En dimension 4 cependant, on manque encore aujourd'hui d'outils aussi puissants que ceux-ci, et cela n'est pas dû au hasard : c'est en dimension 4 qu'apparaissent des phénomènes topologiques surprenants comme par exemple :

* pour $n \neq 4$, $\mathbb{R}^n$ possède une unique structure différentielle alors que $\mathbb{R}^4$ en possède une infinité continue (ce résultat est dû à Clifford Taubes mais les premiers exemples de structures lisses sur $\mathbb{R}^4$ non difféomorphes entre elles sont dues à Kirby et Freedman : on les appelle $\mathbb{R}^4$ exotiques),
* en dimension autre que 4, les variétés topologiques compactes admettent un nombre fini de structures lisses distinctes, alors qu'en dimension 4 elles en possèdent une infinité non dénombrable ;
* citons également le fait que la conjecture généralisée de Poincaré, qui s'intéresse à la question de savoir si une variété homotope à une n-sphère est isomorphe (dans une catégorie donnée) à cette sphère, est résolue pour les variétés différentielles dans toutes les dimensions autres que 4.

Comme c'est bien souvent le cas en topologie, les questions de classifications font intervenir des structures additionnelles sur les variétés (structures linéaires par morceaux, différentielles, riemanniennes etc..). Nous nous intéresserons ici à la structure métrique des variétés, et notamment à la "courbure locale" de cellesci : pour les variétés riemanniennes, la courbure sectionnelle permet de mesurer quantitativement le fait que l'objet est "plus ou moins courbé", par exemple si on muni la sphère de rayon r dans l'espace euclidien de sa métrique riemannienne canonique, sa courbure (constante égale à $\frac{1}{r^2}$) est d'autant plus grande que le rayon est petit. La notion de courbure d'une distance est une tentative d'étendre la notion de courbure des variétés riemanniennes aux objets dépourvus de structures différentielles : la courbure d'une distance se définit uniquement en terme de mesure de distances ou d'angles (appelés angles d'Alexandrov) entre les points de l'objet considéré (voir la notion d'espace CAT(κ) section 1 pour la définition d'une distance à courbure $\leq \kappa$), et on vérifie que cette notion de courbure pour une distance "coïncide" avec la notion de courbure pour les variétés riemanniennes. La propriété, pour une variété, d'admettre une distance de courbure majorée (compatible avec la topologie de la variété) est moins contraignante que la propriété d'avoir une structure de variété riemannienne de courbure sectionnelle majorée. La question qui nous intéresse ici est la suivante : une variété munie d'une distance (induisant la topologie de la variété) à courbure négative ou nulle possède-t-elle toujours une structure de variété riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle ? La réponse à cette question dépend bien evidemment de la dimension dans laquelle on travaille, et elle a été résolue dans toutes les dimensions autres que 4 (les différentes réponses sont données dans la section 1), le cas qui nous intéressera ici.

1 Rappels et définitions de géométrie

Soit (X, d) un espace métrique. Une géodésique dans X est une isométrie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans X. On parle de segments géodésiques si I est un intervalle compact et de rayons géodésiques si $I = [0, +\infty[$.
Un triangle géodésique est une courbe simple (i.e une courbe qui ne s'auto-intersecte pas) composée de trois segments géodésiques.
Soit $\mathbb{X}_{\kappa,n}$ la variété riemannienne complète simplement connexe de dimension n et de courbure sectionnelle constante κ. Si Δ est un triangle géodésique de X de sommets x, y, z, il existe un triangle géodésique Δ^* de $\mathbb{X}_{\kappa,n}$, appelé triangle de comparaison et unique à isométrie près, de sommets x^*, y^*, z^* tel que $d(x, y) = d(x^*, y^*)$, $d(z, y) = d(z^*, y^*)$, $d(x, z) = d(x^*, z^*)$. On a alors des isométries envoyant chaque segment géodésique de Δ sur les segments géodésiques de Δ^*. On notera p^* l'image d'un point p par une telle application.

Soit $\kappa \in \mathbb{R}^-$. Les variétés seront toutes supposées compactes et sans bord dans la suite sauf mention du contraire.

Définition 1 (Espace CAT(κ)) *On dit qu'un espace métrique (X, d) géodésique (i.e tout couple de points de X est relié par un segment géodésique) est CAT(κ) si pour tout triangle géodésique $\Delta \subset X$ de sommets y, z, w, pour tout points $p \in [y, z]$ $q \in [y, w]$ on a $d(p, q) \leq d(p^*, q^*)$.*

L'exemple le plus simple d'espace CAT(κ) est donné par les arbres réels : ce sont des espaces métriques uniquement connexe par arc (il existe un et un seul chemin entre deux points de l'espace), dans lequel tout arc est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$. Un triangle géodésique dans un tel espace est un tripode et donc le triangle de comparaison correspondant est plat : un arbre réel est CAT(κ), pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$. L'autre exemple important d'espaces CAT(κ) est donné par les variétés riemanniennes à courbure sectionnelle majorée : on dit qu'un espace métrique (X, d) géodésique est à courbure $\leq \kappa$ ou localement CAT(κ) si tout point de X possède un voisinage qui, muni de la distance induite, est CAT(κ). Un résultat classique de géométrie riemannienne nous donne alors qu'une variété riemannienne est de courbure sectionnelle $K \leq \kappa$ si et seulement si elle est localement CAT(κ) (on retrouve bien le fait que la notion de courbure pour la

distance généralise la notion de courbure pour la métrique riemannienne), et elle est alors CAT(κ) si elle est complète et simplement connexe. On peut également construire des variétés riemanniennes symétriques à courbure négative ou nulle de la manière suivante : si G est un groupe de Lie semisimple (i.e dont l'algèbre de Lie se décompose comme une somme directe d'idéaux simples, c'est-à-dire qui ne contiennent pas d'idéaux non triviaux) de centre trivial et sans facteur compact (les idéaux apparaissant dans la décomposition de l'algèbre de Lie de G sont associés à des sous-groupes immergés de G non compacts), et si K est un sous-groupe compact maximal de G, alors G/K munie de la métrique riemannienne induite par G (G est muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche fixée), est à courbure sectionelle négative ou nulle.
La question qu'on peut alors se poser naturellement est la suivante : une variété munie d'une distance localement CAT(κ) admet-elle forcément une métrique riemannienne à courbure sectionnelle $K \leq \kappa$? Ici nous nous intéresserons au cas des variétés à courbure négative ou nulle, c'est-à-dire le cas où $\kappa = 0$. Cela nous permet de travailler sur les plats (des plongements isométriques de l'espace euclidien $\mathbb{E}_n$ de dimension $n \geq 2$) des variétés en question. En dimension 4 (le sujet principal de ce papier), en étudiant les inclusions des bords à l'infini de ces plats dans le bord à l'infini du revêtement universel de ces variétés, on produira une obstruction au fait d'avoir une métrique riemannienne a courbure négative ou nulle.

En dimension 1 la question est très simple et la réponse à la question est oui : une variété connexe est homéomorphe soit au 1-tore S^1 soit à la droite réelle. Ces deux variétés admettant bien sûr une métrique riemannienne localement CAT(0).
En dimension 2 la réponse est encore oui : les surfaces connexes compactes sans bord sont obtenues comme quotient d'un $\mathbb{X}_{\kappa,2}$, pour $\kappa = +1, 0, -1$, par une action libre d'un sous-groupe discret du groupe des isométries, c'est-à-dire qu'on peut équiper toutes les surfaces de dimension 2 (connexes compactes sans bord) d'une métrique riemannienne à courbure constante (dépendant du genre de la surface). Le revêtement universel d'une variété munie d'une distance localement CAT(0) est un espace CAT(0) et est alors contractile, donc la 2-sphère ne peut pas être munie d'une distance localement CAT(0).
En dimension 3 le résultat est encore valable : c'est une conséquence du théorème de géométrisation de Thurston, qui permet en découpant les variétés selon des tores de se ramener à l'étude de seulement deux types de variétés, voir [DJL] pour une explication de ce résultat.
En dimension 5 ou supérieures par contre la réponse est négative : Davis et Januszkiewicz ont construit dans [DJ] des exemples de variétés localement CAT(0) qui ne possèdent pas de métriques riemanniennes à courbure sectionnelle négative ou nulle.

Il reste donc à s'occuper de la dimension 4, et la réponse a été tranchée négativement par les travaux de Davis, Lafont et Januszkiewicz dans [DJL], dont nous allons ici présenter les résultats. On va donner un schéma de preuve du résultat suivant :

Théorème 1 *Il existe une variété M de dimension 4, compacte, sans bord, qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *M est lissable (homéomorphe à une variété lisse) et possède une distance localement CAT(0),*
2. *le revêtement universel de M, $\tilde{M}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^4$,*
3. *le groupe fondamental $\pi_1(M)$ n'est isomorphe à aucun groupe fondamental de variété riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle.*

On peut trouver une liste d'obstructions au fait d'admettre une structure riemannienne dans [DJL] : en premier lieu la variété doit être lissable, et Davis et Hausmann ont construit dans [DH] des variétés asphériques (i.e dont tous les groupes d'homotopies supérieurs sont nuls ; ces variétés sont caractérisées topologiquement entièrement par leur groupe fondamental par la conjecture de Borel) qui ne sont homotopes à aucune variété lisse en dimension ≥ 8 (en utilisant la "reflection group trick" qui permet de construire, à partir d'un CW complexe fini asphérique des variétés asphériques sans bord qui se rétractent sur ce CW complexe). On peut même trouver dans [DJ] un exemple de variété localement CAT(0) qui ne possède pas de structure *p.l.* (c'est-à-dire que les applications de changements de cartes de l'atlas sont linéaires par morceaux). Enfin, par le théorème de Cartan-Hadamard, une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle a la propriété que son revêtement universel est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc une variété localement CAT(0) dont le revêtement universel n'est pas $\cong \mathbb{R}^n$ ne peut avoir de telle structure riemannienne.

Avant de continuer, rappelons quelques notions basiques de géométrie :

1.1 Bord à l'infini

Soit (X, d) un espace métrique CAT(0). Notons Ray(X) l'ensemble des rayons géodésiques à valeurs dans X, muni de la topologie compacte ouverte (la topologie de la convergence uniforme sur les compacts). Soient $(c, c') \in \mathrm{Ray}(X)^2$: on dit que c et c' sont asymptotes si $\sup_{t\in[0,+\infty]}\{d(c(t), c'(t))\} < \infty$. Cela définit une relation d'équivalence $\sim$ sur Ray(X), et l'espace topologique quotient $\mathrm{Ray}(X)/\sim$ est le bord à l'infini de X, noté $\partial^\infty X$.
Soit x_0 un point de X : pour chaque classe $[c] \in \partial^\infty X$ il existe un unique rayon géodésique c_0 de point base x_0 (i.e $c_0(0) = x_0$) dans $[c]$. On peut ainsi voir le bord à l'infini comme étant l'ensemble des rayons géodésiques de point base x_0, c'est-à-dire l'ensemble des "directions à l'infini" en x_0.

1.2 Quasi-isométrie

Soient X, Y deux espaces métriques :

Définition 2 (Plongement quasi-isométrique) *On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est un (λ, ϵ)-plongement quasi-isométrique si pour tout $(x, y) \in X^2$:*

$$(1/\lambda)d(x, y) - \epsilon \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \epsilon$$

Une quasi-isométrie est un plongement quasi-isométrique tel que pour tout $y \in Y$, il existe un $x \in X$ tel que $d(y, f(x)) \leq \epsilon$. Toute (λ, ϵ) quasi-isométrie f possède un ϵ-quasi inverse g qui est une quasi-isométrie telle que les compositions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont proches de l'identité à ϵ près. Si $(X, dist_X)$ est un intervalle

de $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, on parle de (λ, ϵ) quasi-géodésiques.
Si X est un espace CAT(0) muni d'une action géométrique (i.e isométrique, proprement discontinue et cocompacte) d'un groupe G, alors Milnor a montré que l'application $g \longmapsto g(x_0)$ est une quasi-isométrie de G dans X, pour $x_0 \in X$ un point quelconque et où on a muni G d'une métrique du mot quelconque.

1.3 Espaces à plats isolés

Soit X un espace CAT(0) muni d'une G-action géométrique. Un k-plat dans X est un plongement isométrique totalement géodésique de l'espace euclidien $\mathbb{E}^k$, pour $k \geq 2$ (une ligne géodésique n'est donc pas un plat). On note $\mathrm{Flat}(X)$ l'ensemble des k-plats de X, $k \geq 2$.
Nous allons introduire une définition due à Hruska (cf. [H]), cruciale dans la démonstration du théorème 1, qui permet de "transporter" (voir section 2) les propriétés géométriques du bord à l'infini d'un espace X dit "à plats isolés" sur le groupe G qui agit géométriquement sur X :

Définition 3 (Espace à plats isolés) *On dit que X est à plats isolés s'il contient une famille $\mathcal{F}$ de plats telle que :*

(1) Il existe une constante B tel que tout plat $F \in \mathrm{Flat}(X)$ est contenu dans un B-voisinage $\mathcal{N}_B(F') = \{x \in X,\ d(x, F') < B\}$ d'un plat $F' \in \mathcal{F}$.

(2) Pour tout $k \geq 0$, il existe un nombre $\rho(k) \in \mathbb{R}^+$ tel que pour toute paire de plats distincts $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $\mathcal{N}_k(F_1) \cap \mathcal{N}_k(F_2)$ soit de diametre au plus $\rho(k)$.

(3) L'ensemble des plats de $\mathcal{F}$ soit invariant sous l'action de G.

La propriété d'être à plats isolés n'est pas du tout générique : l'exemple le plus "simple" d'espaces CAT(0) à plats isolés donné dans [HK] s'obtient à partir de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, dont on retire l'intérieur d'une collection particulière d'horoboules disjointes (cf. fonction de Busemann et [HK] pour de plus amples détails).

2 Schéma de preuve

Nous allons construire en section 3 une variété M de dimension 4, lissable, munie d'une distance localement CAT(0) et contenant un tore plat triangulé de dimension 2 totalement géodésique, T^2, qui a la propriété d'être "localement noué" en chaque sommet, c'est-à-dire que si $x \in T^2$ est un sommet de la triangulation de T^2, et si ϵ est suffisamment petit, alors en notant $S(x, \epsilon) \subset M$ la 3-sphère centrée en x et de rayon ϵ, $T^2 \cap S(x, \epsilon) \cong S^1 \hookrightarrow S(x, \epsilon) \cong S^3$ est un noeud non trivial (cf. section 3 pour une définition plus précise). La construction de M nous assurera que son revêtement universel $\tilde{M}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^4$, à plats isolés et que son bord à l'infini $\partial^\infty \tilde{M}$ est homéomorphe à S^3. Le tore plat T^2 se relève alors en un 2-plat F de $\tilde{M}$, et le plongement induit $\partial^\infty F \cong S^1 \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M} \cong S^3$ définit un noeud.

Le point suivant est alors de remarquer que si $\tilde{M}'$ est une variété riemannienne CAT(0) de dimension 4 et $F' \subset \tilde{M}'$ est un 2-plat de $\tilde{M}'$, alors $\partial^\infty F' \simeq S^1 \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}' \simeq S^3$ est un noeud, et que si $p \in F'$ est un point quelconque, alors la rétraction géodésique $\rho : \partial^\infty \tilde{M}' \longrightarrow T^1_p \tilde{M}'$ ($T^1_p \tilde{M}'$ est la sphère unité de l'espace

tangent) est un homéomorphisme qui envoie $\partial^\infty F'$ sur $T^1_p F'$. Cette rétraction permet de faire un lien direct entre la géométrie à l'infini $(\partial^\infty F', \partial^\infty \tilde{M}')$ et la structure locale au voisinage du point p, $(T^1_p F', T^1_p \tilde{M}')$ qui est un noeud trivial. En particulier $\partial^\infty F' \simeq S^1 \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}' \simeq S^3$ est un noeud trivial.
Dans le cas de notre variété M qui n'est pas a priori riemannienne, on montrera section 3 que le noeud $\partial^\infty F \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}$ est non trivial : en effet on a un analogue de rétraction géodésique dans $\tilde{M}$, qui n'est plus un homéomorphisme mais qui en est assez proche pour qu'on puisse comparer la structure topologique locale du plat F dans $\tilde{M}$ et la structure géométrique à l'infini $\partial^\infty F \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}$, et le fait que F est localement noué entrainera que $\partial^\infty F \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}$ est un noeud non trivial. L'argument clé qu'on va alors utiliser est dû à Hruska : le bord à l'infini d'un espace CAT(0) X à plats isolés muni d'une action géométrique d'un groupe G est un invariant quasi-isométrique de ce groupe : (cf. [H] et [HK] théorème 4.1.8)

Théorème 2 (Invariance du bord à l'infini) *Soient X et Y deux espaces CAT(0) munis d'actions géométriques d'un même groupe G. Supposons que X est à plats isolés. Alors Y est également à plats isolés et il existe un homéomorphisme G-équivariant $\rho : \partial^\infty X \longrightarrow \partial^\infty Y$.*

Maintenant, le groupe fondamental de M, $\Gamma = \pi_1(M)$ agit géométriquement sur l'espace CAT(0) à plats isolés $\tilde{M}$. Si, par l'absurde, le point *3.* du théorème 1 n'est pas vérifié, alors il existe une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative M' de même groupe fondamental Γ que M. L'action de Γ sur $\tilde{M}'$ est géométrique et ainsi par le théorème de Hruska les bord à l'infini $\partial^\infty \tilde{M}$ et $\partial^\infty \tilde{M}'$ sont isomorphes par un homéomorphisme Γ-équivariant. Le noeud $\partial^\infty F \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}$ se transporte dans $\partial^\infty \tilde{M}'$: $\partial^\infty F$ est l'ensemble limite de $\pi_1(T^2)$ (c'est-à-dire l'ensemble des points de $\partial^\infty \tilde{M}'$ qui sont dans l'adhérence de $\pi_1(T^2).x$, pour x fixé dans $\tilde{M}'$), et l'existence d'un sous-groupe $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2 \subset \Gamma$ nous donne l'existence d'un 2-plat F' dans $\tilde{M}'$ dont le bord à l'infini $\partial^\infty F'$ est l'ensemble limite $\pi_1(T^2)$ et donc définit un noeud non trivial $\partial^\infty F' \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}'$. L'existence du 2-plat F' vient du théorème suivant, appelé théorème du tore plat (voir [H] théorème 2.6) :

Théorème 3 *Soit $A \subset \Gamma$ un sous-groupe abélien libre de rang m de Γ un groupe agissant géométriquement sur un espace CAT(0) X. Alors il existe un m-plat F de X stabilisé par A, et A agit sur F par translations euclidiennes de quotient un m-tore.*

Maintenant, si $v \in F'$ est un point quelconque, la rétraction géodésique $\rho : \partial^\infty \tilde{M}' \longrightarrow T^1_p \tilde{M}'$ est un homéomorphisme qui envoie le noeud non trivial $\partial^\infty F' \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}'$ sur le noeud trivial $T^1_p F' \hookrightarrow T^1_p \tilde{M}'$: c'est absurde et le point *3.* du théorème 1 est donc vérifié.

3 Construction de la variété

Nous allons maintenant construire la variété M. Avant de continuer, rappelons la définition d'un complexe simplicial et d'un lien dans un complexe :

Complexes simpliciaux

On appelle n-simplexe un polytope de dimension n qui est l'enveloppe convexe de $n+1$ points. Un complexe simplicial K est un ensemble de simplexes tel que :

(1) toute face d'un simplexe de K est un simplexe de K,

(2) l'intersection de deux simplexes σ_1 et σ_2 de K est une face de σ_1 et σ_2.

Si σ est un simplexe d'un complexe simplicial K, on définit le lien $Lk(\sigma, K)$ de σ dans K comme étant le complexe simplicial composé des simplexes de K qui ont σ pour face. Le lien d'un sommet est simplicialement isomorphe (si K et K' sont deux complexes simpliciaux, un morphisme simplicial $f : K \longrightarrow K'$ est une application telle que si $\sigma \in K$ est un simplexe, alors $f(\sigma)$ est un simplexe de K') à l'intersection d'une sphère de rayon petit centrée en ce sommet avec K.

La méthode que nous allons décrire permet de construire un complexe cubique (i.e un complexe cellulaire dont chaque cellule est combinatoirement isomorphe à un cube) dont le lien en chaque sommet est un complexe simplicial donné préalablement. Le lien que nous allons choisir garantira que le complexe cubique est une variété lisse localement CAT(0) dont le revêtement universel est à plats isolés.

3.1 Triangulation de S^3

Une triangulation K (c'est-à-dire un complexe simplicial) est dite drapeau si tout ensemble de sommets de K deux à deux adjacents engendrent un simplexe de K. Autrement dit, le complexe K est entièrement déterminé par son 1-squelette.
Un coin dans une triangulation K est un quadruplet (v_1, v_2, v_3, v_4) de sommets cycliquement ordonnés (v_i est adjacent au suivant cycliquement) tel que (v_1, v_3) et (v_2, v_4) ne sont pas des arêtes. On dit qu'une triangulation est à coins isolés si un sommet appartient à au plus un coin.

Soit $k \cong S^1 \subset S^3$ un noeud quelconque. On a le résultat suivant :

Théorème 4 *Il existe une triangulation L de S^3 qui est drapeau, à coins isolés, et telle que l'union des coins de L est le noeud k (on dit que L est de type k)*

La construction de la triangulation L est détaillée dans [DJL]. Elle repose notamment sur les travaux de Przytycki et Swiatkowski ([PS]) qui ont déterminé une méthode qui prend en entrée une triangulation quelconque et la convertit en une triangulation drapeau sans coins. On décompose alors S^3 en deux parties : un voisinage tubulaire de k et son complémentaire M. On triangule ensuite M d'une manière quelconque (M étant une variété à bord de dimension 3) puis on applique la méthode de [PS] à M. On étend alors cette triangulation à l'intérieur du voisinage tubulaire de k de telle sorte que les seuls coins de la triangulation sont formés par k. La méthode introduite dans [PS] ne marche cependant qu'en dimension ≤ 4, elle ne permet donc pas de fournir d'exemple du type qu'on va construire dans les dimensions ≥ 5.

3.2 Complexe cubulaire P_L

Fixons un noeud non trivial $S^1 \simeq k \hookrightarrow S^3$. On dispose d'une triangulation drapeau sans coins L de S^3 de type k. Notons $V(L)$ l'ensemble des sommets de L et $\#V(L)$ son cardinal. Soit $I = [-1,1]^{\#V(L)}$. Toute face de I s'obtient par translation d'une face (appelée face de type S) de la forme

$$\{(x_1, x_2, ..., x_{V(L)}),\ \text{avec } x_i = 1 \text{ si } i \in S \text{ et } x_j \in [-1,1] \text{ pour } j \notin S\}$$

pour $S \subset V(L)$. Considérons alors $P_L \subset I$ le complexe cubique obtenu en prenant toutes les translatées de faces de type S pour S un sous-ensemble quelconque de $V(L)$ qui engendre un simplexe dans L. Il est immédiat de constater que le lien en chaque sommet de P_L est simplicialement isomorphe à L : par exemple si v est un sommet de P_L, si $\sigma \in Lk(v, P_L)$ est un simplexe quelconque, alors le cône $v * \sigma$ correspond à une face de P_L de type disons $S \subset V(L)$, avec S qui engendre le simplexe de L correspondant à σ. Cela nous donne la bijection voulue.

On muni P_L d'une métrique "plate par morceaux" en rendant chaque face de P_L de dimension k isométrique à $[-1,1]^k \subset \mathbb{X}_{0,k}$, où $\mathbb{X}_{0,k}$ est simplement l'espace euclidien de dimension k muni de sa métrique canonique. Le résultat suivant nous donnera les propriétés voulues pour notre variété $M = P_L$:

Théorème 5 *Soit L un complexe simplicial quelconque et soit P_L le complexe cubulaire correspondant :*

(1) si L est une triangulation lisse d'une n-sphère, alors P_L est une $(n+1)$-variété lisse,

(2) si L est un complexe drapeau, la métrique sur P_L est localement CAT(0).

Le point *(1)* est assez simple à voir : pour vérifier que le complexe cubique P_L est une variété, il suffit de le vérifier en chaque sommet du complexe. Si v est un sommet de P_L, un (petit) voisinage de v est homéomorphe au cône $v * L$ qui est un $(n+1)$-disque, donc P_L est bien une variété. Si en plus L est lisse, alors le cône $v * L$ est lissable (voir [DA] proposition 11.1.3), et ainsi P_L est lisse. Pour comprendre le point *(2)*, remarquez que le complexe L hérite de P_L d'une métrique dite "sphérique" (voir par exemple [ST]) : en effet L est simplicialement isomorphe au lien $Lk(v, P_L)$, qui est simplicialement isomorphe à l'intersection d'une sphère de rayon ϵ petit avec P_L, qui hérite bien d'une métrique de P_L. Maintenant un lemme de Gromov ([DA] appendix I.6.1) nous dit que L muni de sa métrique sphérique est CAT(1) si et seulement si L est drapeau. Un voisinage d'un point $x \in P_L$ est isométrique à un voisinage du sommet d'un cône $C_0(Lk(x, P_L))$ muni d'une métrique particulière (cf. la notion de 0-Cône défini par Bridson et Haefliger dans [BH]). Ces derniers ont montré que ce "0-cône" est CAT(0) si et seulement si $Lk(x, P_L) \cong L$ est CAT(1), ce qui nous donne le résultat voulu.

3.3 Complexe de Davis

Le point suivant est de montrer que le complexe de Davis, qui est le revêtement universel de P_L, noté $\tilde{P_L}$, est difféomorphe à $\mathbb{R}^4$. Le théorème suivant est démontré par D. Stone dans [ST] :

Théorème 6 *Soit M un complexe simplicial à métrique "plate par morceaux", complet et simplement connexe qui est une n-variété compacte sans bord et localement CAT(0). Alors M est p.l-homéomorphe à $\mathbb{R}^n$*

Comme nous travaillons en dimension 4, le fait que M est *p.l.*-homéomorphe à $\mathbb{R}^4$ est équivalent à ce que M soit difféomorphe à $\mathbb{R}^4$. La démonstration de ce résultat rappelle la méthode de Morse : en se fixant un point $P \in M$ et en considérant l'application $\rho(X) = \rho(P, X)$, où ρ est la distance sur M, on étudie les courbes de niveaux de l'application ρ.
Notons $\rho^c = \{x \in M \mid \rho(x) \leq c\}$. Pour c petit, comme M est une variété, ρ^c est un n-disque. Si $c < d$, et s'il n'y a pas de sommets v dans M tel que $\rho(v) \in [c, d]$, alors on commence par montrer que $\rho^c \cong \rho^d$, autrement dit les points "critiques" de ρ possibles sont les sommets de M. En travaillant au voisinage des sommets, on peut alors montrer qu'en fait les sommets ne posent pas de problème. On obtient alors que $M = \bigcup_{c \in \mathbb{R}^+} \rho^c$ est une union croissante de disque. Stallings a alors montré que forcément M est *p.l.* isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (voir [STa]).
En fait le même type de raisonnement que celui donné par Stone permet de montrer que le bord à l'infini du revêtement universel de P_L est homéomorphe à S^3 : en se fixant un point $P^{\in} \tilde{P_L}$, $\partial^\infty \tilde{P_L}$ s'obtient comme limite (le terme correct est limite inverse) de sphère $S(P, r)$, lorsque le rayon r de la sphère tend vers $+\infty$. En faisant augmenter r, la sphère "passe" par des sommets du complexe $\tilde{M}$, et cela se traduit sur la topologie de la sphère par le fait de recoller (somme connexe) le lien de ce sommet sur la sphère.

3.4 Plat "localement noué" de $\tilde{P_L}$

Revenons au complexe cubulaire P_L. Le résultat suivant nous donnera l'existence d'un tore plat "localement noué" dans P_L :

Théorème 7 *Soit L un complexe simplicial et P_L le complexe cubulaire correspondant :*

(1) si L' est un sous-complexe plein de L, alors l'inclusion naturelle induit un plongement totalement géodésique $P_{L'} \subset P_L$,

(2) si L est le joint de deux sous-complexes L_1, L_2, alors P_L est isométrique au produit $P_{L_1} \times P_{L_2}$.

Le point *(1)* vient du fait que si L' est plein, alors il existe une face F de L telle que $P_{L'} = F \cap P_L$. Le point *(2)* est immédiat, en observant qu'on a une bijection entre les simplexes du joint $L_1 * L_2$ et les couples de simplexes (σ_1, σ_2) pour $\sigma_i \in L_i$, et en remarquant qu'une face de type S de P_L est isométrique au produit d'une face de type S_1 de P_{L_1} avec une face de type S_2 de P_{L_2}, où $S = S_1 \cap S_2$.
Comme le coin $k = \square$ de L est un sous-complexe plein, on a un plongement isométrique et totalement géodésique $P_\square \hookrightarrow P_L$, et $\square = S^0 * S^0$ nous donne que $P_\square = P_{S^0} \times P_{S^0}$. Comme $P_{S^0} = S^1$ muni de sa métrique "plate", on a bien un plongement isométrique totalement géodésique d'un tore plat $T^2 \hookrightarrow P_L$. En chaque sommet v de T^2 on a par ailleurs un isomorphisme simplicial $(Lk(v, T^2), Lk(v, P_L)) \cong (k, L)$, d'où le fait que T^2 soit "localement noué". En passant au revêtement universel, on obtient un 2-plat $F \hookrightarrow \tilde{P_L}$, "localement noué" en chaque relevé de sommet de T^2.

4 Géométrie à grande échelle

Le plongement isométrique $F \hookrightarrow \tilde{M}$ induit un plongement des bords à l'infini $\partial^\infty F \cong S^1 \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M} \cong S^3$. En utilisant la propriété que F est "localement noué", nous allons montrer que le noeud induit par le plongement $\partial^\infty F \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}$ est un noeud non trivial.

4.1 $\partial^\infty F \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}$ est un noeud non trivial

Soit $v \in F$. Comme $\tilde{P_L}$ est CAT(0), on a une rétraction géodésique $\rho : \partial^\infty \tilde{P_L} \longrightarrow Lk(v, \tilde{P_L})$, puisque $Lk(v, \tilde{P_L})$ est isomorphe à une sphère de rayon petit centrée en v dans $\tilde{P_L}$. Cette application envoie $\partial^\infty F$ sur $Lk(v, F) \cong S^1$ qui est un noeud non trivial dans $Lk(v, \tilde{P_L}) \cong S^3$, mais le problème est que ρ n'est pas un homéomorphisme. Cependant, on peut montrer (voir [FL]) que ρ est une équivalence d'homotopie propre qu'on peut approcher aussi près qu'on veut par un homéomorphisme.
Pour montrer que $\partial^\infty F \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{P_L}$ est un noeud non trivial, c'est-à-dire que $\partial^\infty \tilde{P_L} \setminus \partial^\infty F$ n'est pas homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}^2$, on montre que $\pi_1(\partial^\infty \tilde{P_L} \setminus \partial^\infty F)$ n'est pas abélien. Cela se fait en décomposant $Lk(v, \tilde{P_L}) \setminus Lk(v, F)$ en deux ouverts, puis en remontant ces deux ouverts sur $\partial^\infty \tilde{P_L} \setminus \partial^\infty F$ grâce à ρ.

Soient $Lk(v, F) \subset N_1 \subset N_2 \subset Lk(v, \tilde{P_L})$ des voisinages réguliers ouverts toriques. Posons $U_2 = N_2 \cong S^1 \times \mathbb{D}^2$ et $U_1 = Lk(v, \tilde{M}) \setminus \overline{N_1}$: $U_1 \cap U_2 \cong N_2 \setminus \overline{N_1} \cong S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$, et $U_1 \cong S^3 \setminus k$, d'où : $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Papakyriakopoulos a montré (voir [Pa], un corollaire d'un lemme de Dehn) que le groupe fondamental du complémentaire d'un noeud dans S^3 est isomorphe à $\mathbb{Z}$ si et seulement si le noeud est trivial. Le théorème d'Hurewicz nous dit que l'abélianisé de $\pi_1(U_1)$ est isomorphe à $H_1(U_1)$, qui, par dualité d'Alexander, est isomorphe à $H^1(S^3 \setminus U_1) = H^1(\overline{N_1}) = \mathbb{Z}$. D'où $\pi_1(U_1)$ n'est pas abélien (sinon il serait égal à $\mathbb{Z}$ contredisant le fait que k est non trivial).
En utilisant le théorème de Seifert Van-Kampen, on obtient :

$$\pi_1(\partial^\infty \tilde{P_L} \setminus \partial^\infty F) \cong \pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2)} \pi_1(U_2)$$

Finalement, en montrant que l'application canonique $\pi_1(U_1) \hookrightarrow \pi_1(U_1 \cap U_2)$ est injective, on obtient que le produit amalgamé contient une copie de $\pi_1(U_1)$, et donc ne peut être abélien.

4.2 Espaces à plats isolés

Notons $\Gamma = \pi_1(M)$. Jusqu'à présent on a réussi à construire une variété M de dimension 4 localement CAT(0), lisse, dont le revêtement universel $\tilde{M}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^4$, et dont le bord à l'infini contient un noeud non trivial $\partial^\infty F \hookrightarrow \partial^\infty \tilde{M}$. On a également une Γ-action géométrique sur $\tilde{M}$: il reste à montrer que $\tilde{M}$ est un espace à plats isolés. Le résultat suivant est dû à Hruska (voir [HK] théorème 1.2.1, qui repose sur les travaux de Drutu et Sapir cf. [DrSp]) :

Théorème 8 *Soit X un espace CAT(0) muni d'une Γ-action géométrique. On a l'équivalence :*

1. *X est à plats isolés,*
2. *Γ est un groupe hyperbolique relativement à une famille de sous-groupes virtuellement abéliens de rang ≥ 2.*

La propriété *2.* est une propriété géométrique sur le graphe de Cayley du groupe Γ, introduite à l'origine par Gromov (des détails sur ce domaine peuvent être trouvés dans [Gr] ou chez Bowditch qui a formalisé l'approche de Gromov dans [Bo] ou encore dans [DrSp]), en fait nous aurons seulement besoin de savoir que par les travaux de Caprace (voir [Ca] corollaire D (ii)), cela équivaut à ce que la triangulation L ne possède pas de sous-complexe plein isomorphe à la suspension d'un complexe K de trois sommets qui est soit l'union disjointe de ces trois sommets, soit l'union disjointe d'une arête et d'un sommet. Comme un tel sous-complexe n'est pas à coins isolés, on a immédiatement la propriété que Γ vérifie *2.*, et donc que $\tilde{M}$ est à plats isolés. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Pour aller plus loin, on pourrait se demander s'il existe des variétés de dimension 4 localement CAT(0), compactes sans bord, telles que le revêtement universel n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^4$, ou encore homéomorphe à $\mathbb{R}^4$ mais pas difféomorphe. La construction proposée ici à partir de complexe métrique ne marche alors plus puisqu'on a vu que forcément le revêtement universel est difféomorphe à $\mathbb{R}^4$.
En dimension plus grandes que 4, la méthode de construction de la triangulation ne marche plus du tout (voir [PS] section 2.2), et l'on ne peut garantir le critère de Caprace pour assurer le fait que le revêtement soit bien à plats isolés (ce qui nous permet d'avoir une obstruction au fait de posséder une structure riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle).
Enfin, si on ne travaille plus en courbure négative ou nulle, [DJL] formule la question ouverte suivante : peut-on construire des exemples de variétés M lisses, localement CAT(-1), avec $\partial^\infty \tilde{M} \cong S^{n-1}$, mais qui ne supporte aucune métrique riemannienne de courbure sectionnelle négative ?

Références

[BH] M. Bridson et A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[BO] B. H. Bowditch. *Relatively hyperbolic groups* preprint, University of Southampton, 1999.

[CA] P. -E. Caprace. *Buildings with isolated subspaces and relatively hyperbolic Coxeter groups,* Preprint disponible sur arXiv :math/0703799.

[DA] M. W. Davis. *The geometry and topology of Coxeter groups,* London Mathematical Society Monographs Series, 32. Princeton University Press, 2008.

[DH] M. Davis et J. -C. Hausmann. *Aspherical manifolds without smooth or PL structure,* dans "Algebraic topology (Arcata, CA, 1986)", pages 135-142, lecture notes in math. 1370. Springer, Berlin, 1989.

[DJ] M. Davis et T. Januszkiewicz. *Hyperbolization of polyhedra,* J. Diff. Geom. 34 (1991), 347-388.

[DJL] M. David, T. Januszkiewicz et J. -F. Lafont. *4-dimensional locally CAT(0)-manifolds with no riemannian smoothings.*

[Dr] A. N. Dranishnikov. *Boundaries of Coxeter groups and simplicial complexes with given links,* J. Pure Appl. Algebra 137 (1999), 139-151.

[DrSp] C. Drutu et M. Sapir. *Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups,* Topology 44 (2005), 959-1058.

[FL] F. T. Farrell et J. -F. Lafont. *Involutions of negatively curved groups with wild boundary behavior.* arXiv.maths/0405261v1, 22 mai 2011.

[Gr] M. Gromov. *Hyperbolic groups,* dans "Essays in group theory," pgs. 75-263. Springer-Verlag, NY, 1987.

[H] G. C. Hruska. *Geometric invariants of spaces with isolated flats,* Topology 44 (2005), 441-458.

[HK] G. C. Hruska et B. Kleiner. *Hadamard spaces with isolated flats,* Geometry and Topology, Volume 9, 1501-1538, 8 august 2005.

[Pa] C. D. Papakyriakopoulos. *On Dehn's Lemma and the asphericity of knots,* Ann. Math. 66 (1957), 1-26.

[PS] P. Przytycki et J. Swiatkowski. *Flag-no-square triangulations and Gromov boundaries in dimension 3,* Groups Geom. Dyn. 3, 453-468, 2009.

[ST] D. A. Stone. *Geodesics in piecewwise linear manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 1-44.

[STa] J. R. Stallings. *The piecewise-linear structure of Euclidean space,* Proc. Cambridge Philos. Soc. 58 (1962), 481-488.