Des formes modulaires à une correspondance de Langlands p-adique

Benjamin Schraen
sous la direction de Christophe Breuil

1 Le monde des représentations galoisiennes.

1.1 Qu'est-ce qu'une représentation galoisienne ?

Soit K un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$. On fixe $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K, noté $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, est le groupe des automorphismes de corps de $\overline{K}$ dont la restriction à K est l'identité. C'est un groupe infini, on le munit usuellement de la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie la moins fine pour laquelle les applications

$$\sigma_x : \begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) & \longrightarrow & \overline{K} \\ g & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

sont continues pour tout $x \in \overline{K}$, $\overline{K}$ étant muni de sa topologie discrète. Si L est un sous-corps de $\overline{K}$ contenant K, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ constitué des éléments dont la restriction à L est l'identité, c'est un sous-groupe fermé. Si H est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, on note $\overline{K}^H$ le sous-corps de $\overline{K}$ des éléments x tels que

$$\forall \sigma \in H,\ \sigma(x) = x.$$

Enfin on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-corps de $\overline{K}$ contenant K et $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. La théorie de Galois peut alors se résumer ainsi :

Théorème 1 (Galois) *Les applications* $L \longmapsto \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ *et* $H \longmapsto \overline{K}^H$ *sont des bijections réciproques entre* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{G}$*. De plus,*

- $L \in \mathcal{C}$ *est une extension finie de* K *si et seulement si le groupe* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ *est d'indice fini dans* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *;*
- $L \in \mathcal{C}$ *est galoisienne (stable pour l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$*) si et seulement si* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ *est distingué dans* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *;*
- $L \in \mathcal{C}$ *est une extension finie de* K *si et seulement si* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ *est ouvert dans* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *;*
- $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *est un groupe profini, c'est-à-dire qu'en tant que groupe topologique, il s'identifie à la limite projective de ses quotients finis, c'est en particulier un groupe compact.*

Ainsi on voit que la connaissance du groupe de Galois est équivalente à la connaissance des extensions algébriques de K, c'est par exemple ce genre de considérations qui permet l'étude de la résolubilité des équations polynomiales.

Il est alors naturel d'étudier les représentations du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, la correspondance de Galois faisant intervenir la topologie de ce groupe, il vaut même mieux se restreindre aux représentations topologiques.

Pour avoir une idée de la complexité de la chose, considérons par exemple les représentations galoisiennes de dimension 1 à coefficients dans $\mathbb{C}$. Elles correspondent aux caractères continus de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $\mathbb{C}^\times$ et caractérisent uniquement l'abélianisé de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, c'est donc la théorie du corps de classes qui donne des outils d'approche. Si $K = \mathbb{Q}$ la théorie du corps de classe est à peu près équivalente au théorème de Kronecker-Weber :

Théorème 2 (Kronecker-Weber, [Jan]) *Toute extension abélienne finie de $\mathbb{Q}$ est incluse dans une extension cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_n)$.*

Ainsi les caractères complexes de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ correspondent aux caractères de Dirichlet, qui contiennent déjà une information arithmétique très conséquente.

Pour étudier la partie non abélienne du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ il faut donc s'intéresser à des représentations de dimension ≥ 2. Même lorsque $K = \mathbb{Q}$ on est encore loin d'avoir achevé ce programme, nous nous bornerons donc désormais à parler du cas où $K = \mathbb{Q}$. Quand il s'agit de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ nous ne considèrerons que des représentations de dimension finie, en effet comme ce groupe est compact, toute représentation topologique dans un espace de Hilbert se décompose en somme hilbertienne de représentations irréductibles de dimension finie (voir pour ce résultat [Wei] par exemple). Dans le cas où les représentations sont prises à coefficients dans $\mathbb{C}$, on est finalement ramené à étudier des représentations linéaires de groupes finis. En effet cela vient du fait que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et $\mathbb{C}$ ont des topologies très différentes. On peut montrer facilement que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petit : il existe un voisinage V de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\{1\}$ est le seul sous-groupe inclus dans V. À la différence, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est profini, il possède donc une base de voisinages de l'identité constituée de sous-groupes ouverts. Ainsi toute représentation continue ρ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ se factorise à travers un quotient fini. Ce n'est pas pour autant que ces représentations sont bien connues, il reste des questions ouvertes dont la plus célèbre est la conjecture d'Artin, qui prédit que la fonction L attachée à une telle représentation non triviale est holomorphe.

1.2 Le corps des nombres p-adiques

Les représentations galoisiennes à coefficients dans $\mathbb{C}$ sont donc les représentations des groupes de Galois finis, elles ne sont pas très adaptées pour étudier des situations comme celles des « tours » d'extensions finies de $\mathbb{Q}$, c'est à dire des suites croissantes d'extensions de $\mathbb{Q}$. C'est une des raisons d'introduire les représentations galoisiennes à coefficients dans des corps p-adiques (des extensions du corps $\mathbb{Q}_p$), en effet ces corps ont une topologie totalement discontinue, il est donc plus probable que leur topologie se mélange à celle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Une autre raison est que ce sont ces représentations que nous donne la géométrie. Nous expliquerons cela plus loin, pour l'instant rappelons ce que sont ces corps.

Une valeur absolue sur un corps K est une application $|\cdot| : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que
- $\forall x, y \in K\ |xy| = |x||y|$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\forall x, y \in K\ |x + y| \leq |x| + |y|$.

Toute norme définit une topologie métrisable par la distance $d(x, y) = |x - y|$, on dit que deux valeurs absolues sont équivalentes si elles définissent la même topologie. Si $\widehat{K}$ est le complété de K pour cette topologie, $\widehat{K}$ possède une unique structure de corps topologique prolongeant celle de K et $|\cdot|$ se prolonge de façon unique en une valeur absolue de $\widehat{K}$.

Sur $\mathbb{Q}$, il y a la valeur absolue usuelle $|x|_\infty = \max\{x, -x\}$. Le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette valeur absolue est $\mathbb{R}$. Cependant il en existe d'autres (on oublie toujours la valeur absolue triviale valant 1 sur $\mathbb{Q}^\times$) : soit p un nombre premier, pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on pose $|x|_p = p^{-v_p(x)}$. La fonction $|\cdot|_p$ est appelée valeur absolue p-adique. On note alors $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette valeur absolue. La valeur absolue $|\cdot|_p$ a la propriété particulière de vérifier l'inégalité ultramétrique, c'est-à-dire que pour x et y dans $\mathbb{Q}_p$, on a

$$|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Une conséquence de cette inégalité est que les boules (ouvertes ou fermées) de $\mathbb{Q}_p$ sont à la fois ouvertes et fermées, tout point possède donc une base de voisinages ouverts et fermés : la topologie de $\mathbb{Q}_p$ est totalement discontinue. De plus $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, |x|_p \leq 1\}$ est un anneau de valuation discrète complet, son idéal maximal est engendré par p : tout élément de $\mathbb{Z}_p$ s'écrit de façon unique up^n où u est inversible dans $\mathbb{Z}_p$ et $n \in \mathbb{N}$, $|up^n|_p = p^{-n}$. Enfin on a

$$\mathbb{Z}_p \simeq \varprojlim_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},$$

c'est en particulier un groupe profini.

Voyons maintenant un exemple où les corps p-adique apparaissent naturellement comme corps de coefficients de représentations galoisiennes. Soient A et B deux réels tels que le polynôme $X^3 + AX + B$ ait trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$ (ce qui revient à $4A^3 + 27B^2 \neq 0$), alors la courbe E d'équation homogène $Y^2Z - X^3 - AXZ^2 - BZ^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}})$ est ce qu'on appelle une courbe elliptique (il s'agit de l'union de la courbe de $\overline{\mathbb{Q}}^2$ d'équation $Y^2 = X^3 + AX + B$ et du point à l'infini $(0, 1, 0)$). L'intérêt des courbes elliptiques est que l'on peut les munir d'une structure de groupe algébrique. Plus précisément on a le résultat suivant :

Théorème 3 *Il existe une unique structure de groupe abélien sur E dont l'élément neutre est le point à l'infini $(0,1,0)$ et telle que la multiplication m et l'inverse i soient des morphismes de variétés algébriques sur $\mathbb{Q}$.*

Il serait un peu compliqué de définir exactement ce que l'on entend par « morphisme de variété algébrique sur $\mathbb{Q}$ », nous admettrons donc juste que cela implique que ces applications commutent à l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur E, en effet E étant définie par une équation à coefficients dans $\mathbb{Q}$, elle est stable par l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\overline{\mathbb{Q}}^2$. Il en résulte donc que la multiplication, $[N] : C \longrightarrow C$ par N commute également à l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, en particulier son noyau $E[N]$ est stable sous cette action. Enfin on peut montrer par des considérations de géométrie algébrique que ces morphismes $[N]$ sont surjectifs et de noyau $E[N]$ isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Choisissons maintenant un nombre premier ℓ. Pour tout $n \geq 1$, l'application $[\ell] : E[\ell^{n+1}] \longrightarrow E[\ell^n]$ est un morphisme de groupes surjectif. On définit le module de Tate en ℓ de E par :

$$T_\ell(E) = \varprojlim_n E[\ell^n],$$

où les flèches de transition sont données par la multiplication $[\ell]$. D'après ce qui précède, on a (non canoniquement) :

$$T_\ell(E) \simeq \mathbb{Z}_\ell^2.$$

Les actions de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ commutant aux flèches de transition, on obtient une action ρ_ℓ de ce groupe sur la limite projective. Enfin si on pose $V_\ell(E) = T_\ell(E) \bigotimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, $\rho_\ell(v \otimes a) = \rho_\ell(v) \otimes a$

définit une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $V_\ell(E)$. Ainsi $V_\ell(E) \simeq \mathbb{Q}_\ell^2$ et il est facile de voir que cette action est continue pour les deux topologies profinies. On obtient donc une représentation

$$\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell).$$

On peut montrer que cette représentation ne se factorise jamais à travers un quotient fini.

En général on peut obtenir de telles représentations de toute variété propre et lisse sur $\mathbb{Q}$, mais il faut aller les chercher dans la cohomologie étale de la variété, le cas que l'on vient de voir en est un cas particulier. Pour des précisions et des démonstration sur ce qui concerne les courbes elliptiques, on pourra se reporter au livre de Silverman [Sil].

1.3 Représentations locales

Nous allons maintenant voir comment « décomposer » ces représentations en nous ramenant au même problème mais pour des corps complets. Soit p un nombre premier. On choisit une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ du corps $\mathbb{Q}_p$, on note alors $\mathbb{Q}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, c'est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. La valeur absolue $|\cdot|_p$ se prolonge alors de façon unique en une valeur absolue de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On notera D_p le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ constitué des σ vérifiant $|\sigma(x)|_p = |x|_p$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. On l'appelle le groupe de décomposition en p.

Remarque : D'un point de vue schématique, D_p est le stabilisateur du point (p) pour l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.
La densité de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ permet de prolonger l'action de D_p à $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et fournit ainsi un isomorphisme topologique $D_p \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

Étudions maintenant le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Si on note $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}_p}$, c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $|x|_p \leq 1$, $\mathcal{O}_p$ est un anneau local de corps résiduel isomorphe à $\overline{\mathbb{F}_p}$. Comme l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ stabilise $\mathcal{O}_p$ et son idéal maximal, elle induit une action sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ fixant $\mathbb{F}_p$, et donne un morphisme de groupes :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p).$$

On peut montrer sans trop de difficultés que ce morphisme est surjectif, et son noyau I_p est un sous-groupe fermé appelé sous-groupe d'inertie en p. Une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ est dite non ramifiée si sa restriction à I_p est triviale, autrement dit si elle peut se factoriser à travers le quotient $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$. Les représentations non ramifiées sont particulièrement intéressantes car le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ est très simple. En effet $\overline{\mathbb{F}_p}$ est un corps parfait de caractéristique p et le morphisme $x \longmapsto x^p$ est donc un automorphisme de ce corps fixant $\mathbb{F}_p$, on l'appelle automorphisme de Frobenius et on le note Frob_p. $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ est alors topologiquement isomorphe à

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

la complétion profinie de $\mathbb{Z}$, au moyen d'un isomorphisme envoyant 1 sur Frob_p. Une représentation non ramifiée est alors entièrement déterminée par l'endomorphisme image de Frob_p.

Pour qu'une notion soit intéressante, il ne suffit pas qu'elle soit simple à manipuler il faut aussi qu'elle serve à quelque chose, et c'est justement le cas de la notion de représentation non ramifiée. Car si ρ est une représentation ℓ-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ provenant de la géométrie (apparaissant dans la cohomologie étale d'une variété propre et lisse), on sait qu'elle est non ramifiée en presque tous les nombres premiers, c'est une conséquence des théorèmes de changement de base en cohomologie étale. Plus précisément elle est non ramifiée en tous les premiers différents de ℓ pour lesquels la variété a bonne réduction. Pour les courbes elliptiques, la réciproque est même vraie : c'est le critère de Néron-Ogg-Shavarevitch, une courbe elliptique a bonne réduction en un nombre premier p si et seulement s'il existe $\ell \neq p$ premier tel que ρ_ℓ soit non ramifiée.

1.4 Monodromie ℓ-adique

La partie du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ qui reste mystérieuse est le groupe d'inertie I_p, cependant on peut en extraire un quotient relativement simple : la partie modérément ramifiée. On a en fait une suite exacte :

$$1 \longrightarrow P \longrightarrow I_p \xrightarrow{t} \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 1,$$

où P est un pro-p-groupe, c'est-à-dire une limite projective de groupes finis d'ordre une puissance de p. De ceci on obtient le théorème de monodromie ℓ-adique (dû à Grothendieck) :

Théorème 4 *Soit ρ : $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation continue dans un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie, $\ell \neq p$. Il existe un sous-groupe ouvert J de I_p auquel la restriction de ρ est unipotente. En particulier il existe un unique opérateur nilpotent N tel que pour tout sous-groupe ouvert $J \subset I_p$ auquel la restriction de ρ est unipotente,*

$$\forall g \in J \; \rho(g) = \exp(N t_\ell(g)).$$

L'unicité de l'opérateur N et des propriétés du morphisme t_ℓ donnent la formule suivante :

$$\rho(g) N \rho(g)^{-1} = \chi_\ell(g) N,$$

pour $g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. χ_ℓ désigne le caractère cyclotomique, il est définit par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur les racines ℓ^n-ième de l'unité :

$$g \cdot \zeta_{\ell^n} = \zeta_{\ell^n}^{\chi_\ell(g)}.$$

L'opérateur N s'appelle l'opérateur de monodromie associé à la représentation ρ. Pour une preuve, on pourra se reporter à l'appencide de [ST68].

1.5 Théorie de Fontaine et monodromie p-adique

Si maintenant on s'intéresse aux représentations du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, les choses se compliquent considérablement, en effet la topologie du groupe d'inertie sauvage se mélange très bien à la topologie p-adique et on obtient beaucoup plus de représentations. C'est pourquoi Jean-Marc Fontaine, en s'inspirant des travaux de Tate, Serre, Sen ... a défini plusieurs sous-catégories de représentations de ce groupe : Hodge-Tate, De Rham, semi-stables, cristallines ... Sur chacune de ces catégories, il a défini un foncteur à valeurs dans une catégorie de modules munis de structures supplémentaires, opérateur de Frobenius, de monodromie, filtration etc., où les objets sont beaucoup plus faciles à classer. Dans les bons cas, ces foncteurs sont pleinement fidèles. Soit L une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$, on note L_0 la sous-extension non ramifiée maximale de L. On note σ_0 l'endomorphisme de Frobenius absolu de L_0 (via l'isomorphisme $\mathrm{Gal}(L_0/\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{Gal}(k_L/\mathbb{F}_p)$).

Définition 1 *On appelle $(\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p), \varphi, N)$-module filtré un L_0-espace vectoriel M de dimension finie muni d'une filtration décroissante exhaustive $(\mathrm{Fil}_n M)_{n\in\mathbb{Z}}$, d'un opérateur « de Frobenius » φ injectif et σ_0-semi-lineaire, d'un opérateur linéaire nilpotent N vérifiant $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ discrète semi-linéaire commutant à φ, N et stabilisant la filtration.*

Fontaine a construit un foncteur D_{st} de la catégorie des représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ dans la catégorie des (φ, N)-modules filtrés sur L_0. Une représentation est alors dite semi-stable si $\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{L_0} D_{st}(V)$, on note Rep_{st} la catégorie des représentations semi-stables de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. D_{st} induit alors un foncteur pleinement fidèle de Rep_{st} dans la catégorie des (φ, N)-modules filtrés.

Une représentation p-adique V est dite potentiellement semi-stable s'il existe une extension finie L de $\mathbb{Q}_p^{nr}$ (l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$) telle que V soit semi-stable comme représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$, le (φ, N)-module associé est alors muni d'une action discrète de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ qui en fait un $(\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p), \varphi, N)$-module filtré noté $D_{pst}(V)$. Le foncteur D_{pst} est pleinement fidèle sur la catégorie Rep_{pst} des représentations potentiellement semi-stable.

Enfin une représentation semi-stable est dite cristalline si l'opérateur N associé est nul.

Pour un résumé plus détaillé de tout ceci, on pourra consulter [Ber04].

2 Correspondance de Langlands locale et formes modulaires.

2.1 Correspondance de Langlands locale

Le groupe de Weil-Deligne est une modification du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ qui permet d' « algébriser » les représentations à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$, c'est-à-dire d'oublier sa topologie et de pouvoilr le remplacer par exemple par $\mathbb{C}$. En fait nous n'avons pas besoin de définir exactement ce groupe. On appelle groupe de Weil le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ constitué des éléments dont l'image dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ est une puissance entière du Frobenius. On le munit de l'unique topologie induisant la topologie naturelle de I_p et la topologie discrète sur le quotient par I_p (isomorphe à $\mathbb{Z}$). On appelle alors représentation de Weil-Deligne la donnée d'un couple (ρ, N) où ρ est une représentation de$\mathrm{W}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ triviale sur un sous-groupe ouvert de I_p et N un endomorphisme nilpotent tel que

$$\rho(F)N\rho(F)^{-1} = \chi_p(F)N,$$

pour F un Frobenius.

La théorie du corps de classe donne lieu à une vraie bijection entre caractères du groupe de Weil et caractères de $\mathbb{Q}_p^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$. On a le même genre de correspondance pour la dimension 2, connue sous le nom de « correspondance de Langlands locale pour GL_2 ». Cette correspondance met en jeu les représentations F-semi-simples de Weil-Deligne de dimension 2 (les images des Frobenius sont semi-simples) et les représentations irréductibles et admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Tout est dans le « admissible ». Considérons k un corps algébriquement isomorphe à $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans un k-espace vectoriel V est dite lisse si pour tout $v \in V$, le stabilisateur de v est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Elle est dite admissible si elle est lisse et que de plus, pour tout sous-groupe ouvert H, l'espace V^H des vecteurs fixés par H est de dimension finie.

Dans sa thèse, Tate a associé à tout caractère χ de $F^\times$ une fonction L et un facteur $\epsilon(\chi, \psi)$, où ψ est un caractère fixé du groupe additif F. Jacquet et Langlands ont de même associé à toute représentation ρ admissible et irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ une fonction $L(\rho)$ et un facteur $\epsilon(\rho, \psi)$. De plus la classe d'isomorphisme de ρ est entièrement déterminée par la connaissance des $L(\rho \otimes \chi, \psi)$ et $\epsilon(\rho \otimes \chi, \psi)$ pour tout caractère χ de $F^\times$.

La correspondance de Langlands locale s'exprime alors de la façon suivante :

Théorème 5 *Il existe une unique bijection associant à toute représentation ρ de Weil-Deligne F-semi-simple et de dimension 2 une représentation $\pi(\rho)$ irréductible admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, telle que :*
- *$\pi(\rho) \simeq \pi(\rho')$ si et seulement si $\rho \simeq \rho'$;*
- *pour tout caractère χ du groupe de Weil, on ait $\pi(\rho \otimes \chi) \simeq \pi(\rho) \otimes \pi(\chi)$ où $\pi(\chi)$ est le caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$ associé via la théorie du corps de classes ;*
- *les facteurs L et ϵ de ρ et $\pi(\rho)$ coïncident.*

2.2 Formes modulaires

On note $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. Le groupe $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur $\mathbb{H}$ par homographies, plus précisément pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Les formes modulaire sont alors des fonctions holomorphes sur $\mathbb{H}$ vérifiant des conditions de symétries par rapport au groupe Γ avec en plus une condition « à l'infini ».

Définition 2 *Une forme modulaire de poids $k \in \mathbb{Z}$ est une fonction holomorphe f sur $\mathbb{H}$ telle que*

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z\right) = (cz+d)^k f(z),$$

et qui est de plus holomorphe à l'infini.

Une forme modulaire vérifie la périodicité $f(z+1) = f(z)$, on peut donc la développer en série de Fourier :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n,$$

où $q = e^{2i\pi z}$. Dire que f est holomorphe à l'infini signifie alors $a_n = 0$ pour $n < 0$. Si de plus $a_0 = 0$ on dit que la forme modulaire est cuspidale. On note $S_k(\Gamma)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids k.

Les formes modulaires peuvent également être vues comme des sections holomorphes de certains fibrés en droite sur une surface de Riemann, une courbe modulaire. Le théorème de Riemann-Roch permet alors de montrer que les espaces $S_k(\Gamma)$ sont de dimension finie et permet de calculer leur dimension. Le plus petit k pour lequel $S_k(\Gamma)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ est $k = 12$, et $S_{12}(\Gamma)$ est de dimension 1. L'unique élément de cet espace pour lequel $a_1 = 1$ est la fonction Δ définie par :

$$\Delta(z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}.$$

La célèbre fonction τ de Ramanujan est la fonction qui donne les coefficients de Fourier de cette fonction :

$$\Delta(z) = q + \sum_{n \geq 2} \tau(n) q^n.$$

Ces coefficients sont des entiers qui vérifient des relations de congruences assez étranges au premier coup d'oeil :

$$\begin{array}{ll}
\tau(p) \equiv 1 + p^{11}\,[2^5] & \text{si}\, p \neq 2 \\
\tau(p) \equiv p^2 + p^9\,[3^3] & p \neq 3 \\
\tau(p) \equiv p^{41} + p^{-30}\,[5^3] & p \neq 5 \\
\tau(p) \equiv p + p^4\,[7] & p \neq 7 \\
\tau(p) \equiv 0\,[23] & p \neq 23,\ \left(\dfrac{p}{23}\right) = -1 \\
\tau(p) \equiv 2\,[23] & p \neq 23,\ p = u^2 + 23v^2 \\
\tau(p) \equiv -1\,[23] & p \neq 23, \left(\dfrac{p}{23}\right) = 1,\ \forall u, v\, p \neq u^2 + 23v^2 \\
\tau(p) \equiv 1 + p^{11}\,[691] & p \neq 691
\end{array}$$

Pour expliquer ces étranges résultats, Serre a conjecturé l'existence d'une représentation galoisienne de dimension 2 associée à la forme modulaire Δ. Son existence a été prouvée par Deligne ([Del69]) en la réalisant dans la cohomologie étale d'une courbe modulaire. Bien sûr ce genre de résultat vaut pour beaucoup d'autres formes modulaires, les nouvelles formes, de poids variés, mais par simplicité nous l'énonçons uniquement pour Δ.

Théorème 6 *Soit ℓ un nombre premier. Il existe une unique représentation $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$ non ramifiée en dehors de ℓ et telle que pour tout nombre premier p différent de ℓ,*

$$\mathrm{Tr}(\rho(\mathrm{Frob}_p)) = \tau(p)$$
$$\det(\rho(\mathrm{Frob}_p)) = p^{11}.$$

Donnons juste une idée d'utilisation de ce théorème pour expliquer ces congruences. Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ étant compact, il stabilise un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau et donc on peut considérer la représentation à image dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$. En réduisant alors modulo ℓ, on obtient une représentation $\overline{\rho}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$. Or la condition sur le déterminant nous apprend que l'image de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ dépend de son intersection avec $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$. Swinnerton-Dyer a en fait montré dans [SD73] que si cette image ne contient pas $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$, elle est contenu dans un sous-groupe de Borel ou dans un sous-groupe de Cartan (c'est le cas pour $\ell = 23$). Dans le cas Borel, on peut supposer, quitte à faire un changement de base, que les éléments de l'image sont de la forme $\begin{pmatrix} a & \star \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Les coefficients a et d sont alors des caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on peut montrer que ce sont nécessairement des puissances de χ_ℓ. Combiné au fait que $ad(\mathrm{Frob}_p) = p^{11}$ on obtient

$$\tau(p) = \mathrm{Tr}(\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_p)) = p^k + p^{11-k}\,[\ell].$$

En utilisant cette interprétation, Swinnerton-Dyer a montré que pour les autres nombres premiers, on ne pouvait pas trouver de congruences simples de ce type.

Pour une étude approfondie des formes modulaires dans un cadre plus général, on pourra consulter [Shi], ou le plus récent [DS].

Une forme modulaire telle Δ est un objet arithmétique « global », de même que la représentation ρ qui lui est associée. Cependant on peut étudier ρ localement, c'est-à-dire qu'on peut étudier les restrictions à différents groupes de décomposition. Notons ρ_p une restriction de ρ à un groupe de décomposition en p, sa classe d'isomorphisme ne dépend que du nombre premier p. La question se pose alors de savoir si on peut retrouver directement l'information locale portée par ρ_p du côté modulaire, ou comment décomposer la forme cuspidale Δ ? C'est l'objet de la section suivante.

2.3 Formes modulaires et représentations lisses

Pour tout $N \in \mathbb{N}^\times$, on note $\Gamma(N)$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ consitué des matrices congrues à l'identité modulo N. C'est un sous-groupe distingué de $\Gamma(1)$ et le quotient $\Gamma(1)/\Gamma(N)$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. On peut définir comme précédemment l'espace des formes modulaires cuspidales $S_k(\Gamma(N))$ pour tout sous-groupe de congruence $\Gamma(N)$, on doit cependant remplacer la notion d'annulation à l'infini par « annulation aux pointes » mais nous ne détaillerons pas ce point (voir [Shi]). Tout ce dont nous avons besoin est de savoir que ces espaces sont aussi de dimension finie (et le théorème de Riemann Roch permet encore de calculer leur dimension pour $k > 1$). Si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$, et f est une fonction sur le demi-plan de Poincaré, on définit $f|_\alpha$ par

$$f|_\alpha(z) = (\det(\alpha))^{\frac{k}{2}}(cz+d)^{-k} f(\alpha \cdot z).$$

Il se trouve que si $f \in S_k(\Gamma(N))$, pour $\alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$, il existe $M \in \mathbb{N}^\times$ tel que $f|_\alpha \in S_k(\Gamma(M))$, on obtient donc une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$ sur l'espace

$$V = \varinjlim_N S_k(\Gamma(N)).$$

L'espace des vecteurs fixés par $\Gamma(N)$ est l'espace $S_k(\Gamma(N))$ qui est de dimension finie, on voit donc que si on munit le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$ de l'unique topologie qui en fait un groupe topologique pour lequel les sous-groupes $\Gamma(N)$ sont ouverts, V est une représentation admissible de ce groupe.

La complétion de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$ pour cette topologie est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}$ désignant l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f} = \{(x_p) \in \prod \mathbb{Q}_p,\ x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ sauf pour un nombre fini de } p\}$$

V est donc finalement une représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$. La forme Δ engendre alors une sous-représentation admissible de ce groupe, que nous admettrons être irréductible (c'est une conséquence du « théorème de multiplicité un »), nous la notons $\pi(\Delta)$.

Désignons par $\pi_p(\Delta)$ le sous-espace fixé par le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})^p = \prod'_{\ell \neq p} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$, c'est une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour presque tout nombre premier p, la représentation $\pi_p(\Delta)$ est « non ramifiée », ce qui signifie qu'elle possède une droite stabilisée par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On retrouve alors $\pi(\Delta)$ en prenant le produit tensoriel restreint des $\pi_p(\Delta)$ par rapport à une famille de tels vecteurs « non ramifiés ».

Il semble que l'on ait exhibé une décomposition de Δ en composantes locales : les $\pi_p(\Delta)$. La question que l'on se pose alors est : ces objets sont-ils les bons ? Autrement dit, quelle information locale $\pi_p(\Delta)$ nous donne-t-elle du côté galoisien ? On aimerait qu'elle détermine ρ_p et rien de plus. C'est en fait presque le cas. La correspondance de Langlands locale permet d'associer à $\pi_p(\Delta)$ une représentation F-semi-simple de dimension 2 $\rho(\pi_p(\Delta))$ du groupe de Weil-Deligne de $\mathbb{Q}_p$.

Du côté galoisien, si $p \neq \ell$, le théorème de monodromie ℓ-adique nous permet d'associer à ρ_p une représentation du groupe de Weil-Deligne qui caractérise entièrement ρ_p. Si $p = \ell$, la théorie de Fontaine nous donne aussi une représentation du groupe de Weil-Deligne. En effet on peut montrer que ρ_p est potentiellement semi-stable (cristalline dans le cas de Δ), et on obtient une représentation de Weil-Deligne en identifiant l'opérateur φ^{-1} sur l'espace $D_{st}(V)$ avec l'action de Frobenius. Dans tous les cas notons $\sigma(\rho_p)$ la représentation de Weil-Deligne associée. Le résultat suivant montre que les constructions côté modulaire et côté galoisien sont les mêmes, il est dû à Langlands, Deligne, Carayol et T. Saito ([Car86], [Sai97]).

Théorème 7 $\sigma(\pi_p(\Delta))$ *est la F-semi-simplifiée de* $\sigma(\rho_p)$ *pour tout nombre premier* p.

Remarquons que si $\ell \neq p$, $\pi_p(\Delta)$ détermine entièrement la représentation ρ_p, ou au moins sa F-semi-simplifiée, mais il est de toutes façons conjecturé que ρ_p est toujours F-semi-simple. Cependant pour $p = \ell$ ce n'est pas le cas, car bien que le foncteur D_{st} soit pleinement fidèle dans la catégorie des (φ, N)-modules filtrés, il ne l'est pas dans la catégories des (φ, N)-modules et la correspondance de Langlands locale ne nous donne pas la filtration !

3 À la recherche de la filtration perdue.

3.1 Correspondance de Langlands p-adique

Supposons que V soit une représentation p-adique de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ semi-stable et non cristalline de poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$. Dans ce cas le (φ, N)-module associé $D_{st}(V)$ a la forme suivante (quitte à tordre par un caractère) :

- $D_{st}(V) = \overline{\mathbb{Q}_p}e_1 \bigoplus \overline{\mathbb{Q}_p}e_2$;
- $\varphi(e_1) = p^{\frac{k}{2}}e_1$, $\varphi(e_2) = p^{\frac{k}{2}-1}e_2$;
- $Ne_1 = e_2$;
- $\mathrm{Fil}_0 D_{st}(V) = D_{st}(V)$, $\mathrm{Fil}_1 D_{st}(V) = \mathrm{Fil}_{k-2} D_{st}(V) = \overline{\mathbb{Q}_p}(e_1 + \mathcal{L}e_2)$, Fil_{k-1} $D_{st}(V) = \{0\}$.

Comme la représentation de Weil-Deligne associée oublie la filtration, pour caractériser la classe de la représentation V, il manque juste le scalaire $\mathcal{L}$.

L'idée de Breuil est qu'il faut remplacer la correspondance de Langlands locale classique entre représentations de Weil-Deligne et représentations admissibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par une « correspondance de Langlands p-adique » entre représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et représentations continues de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur des espaces de Banach p-adiques. Encore une fois la catégorie des représentations continues de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur des Banach p-adiques n'est pas idéale, c'est pour cela que Schneider et Teitelbaum ont défini dans [ST02] une sous-catégorie de représentations admissibles.

Un peu plus précisément on s'attend à avoir la situation suivante, conjecturée par Breuil :

Conjecture 1 *À toute représentation potentiellement semi-stable de dimension* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, *on peut associer une représentation continue admissible de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $B(V)$, *de telle sorte que :*

- $B(V)$ *soit topologiquement irréductible si et seulement si* V *est irréductible ;*
- $B(V)$ *est isomorphe à* $B(W)$ *si et seulement si* V *est isomorphe à* W *;*
- *le sous-espace des vecteurs lisses associé à* $B(V)$ *correspond à la représentation lisse admissible* $Lisse(V)$ *associé à* V *par la correspondance locale classique.*

3.2 Constructions et conjectures

Christophe Breuil a proposé, dans certains cas, des candidats pour ces espaces $B(V)$. Tout d'abord en tensorisant $Lisse(V)$ par une représentation algébrique, on ajoute une information équivalente aux poids de Hodge-Tate de V. Si $\lambda_1 < \lambda_2$ sont les poids de Hodge-Tate de V, on note $Alg(V)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de plus haut poids $(\lambda_1, \lambda_2 - 1)$. $Alg(V) \otimes Lisse(V)$ est une représentation localement algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (au sens de [Pra01]), dans certains cas elle détermine alors complètement la classe d'isomorphisme de V, mais pas toujours. On veut alors construire les espaces $B(V)$ comme des complétions de $Alg(V) \otimes Lisse(V)$ par rapport à des $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-réseaux ($L$ désigne une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant $\sqrt{p}$ sur laquelle $Lisse(V)$ est définie).

Si V est cristalline irréductible, la classe d'isomorphisme de $D_{pst}(V) = D_{cris}(V)$ est uniquement déterminée par la représentation de Weil-Deligne $WD(V)$ et les poids de Hodge-Tate, donc par $Alg(V) \otimes Lisse(V)$. On s'attend alors à ce que tous les $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-réseaux de cette représentation soient commensurables, et que le complété $B(V)$ par rapport à cette classe de réseaux induise une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dont les vecteurs localement algébriques redonnent $Alg(V) \otimes Lisse(V)$. Christophe Breuil et Laurent Berger l'ont effectivement prouvé dans [BB04].

Si V est semi-stable irréductible, la classe d'isomorphisme de $D_{pst}(V)$ dépend cette fois-ci d'un paramètre supplémentaire $\mathcal{L}(V) \in \overline{\mathbb{Q}_p}$. Dans [Bre04], Christophe Breuil a défini une famille $(\pi_V(\mathcal{L}))$ de réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de $Alg(V) \otimes Lisse(V)$ paramétrée par $\mathcal{L} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$. On note $B(V)$ le complété de $Alg(V) \otimes Lisse(V)$ pour le réseau de $\mathcal{L}$-paramètre $\mathcal{L}(V)$. Il montre dans le même article que cette conjecture est vraie pour une famille infinie de $\mathcal{L}$ par des méthodes globales. Pierre Colmez a montré dans [Col04] par une méthode purement locale que pour toutes les valeurs de $\mathcal{L}$, les $B(V)$ sont bien des espaces de Banach admissibles et irréductibles pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, que le sous-espace des vecteurs localement algébriques est $Alg(V) \otimes Lisse(V)$ et que $B(V)$ est isomorphe à $B(V')$ si et seulement si V est isomorphe à V'.

3.3 La méthode de Colmez

La technique utilisée par Colmez, reprise par Breuil et Berger dans le cas cristallin irréductible repose sur une construction appelée (φ, Γ)-modules, qui remonte à Fontaine. De même que pour D_{st}, D_{cris}, D_{dR}, on peut définir un foncteur D pleinement fidèle de la catégorie des représentations p-adiques (de dimension finie) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/)$ dans la catégorie des (φ, Γ)-modules, expliquons ce qu'est un (φ, Γ)-module.

On note $\mathcal{E}^{\dagger}_{\mathbb{Q}_p}$ l'espace des séries formelles

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n$$

à coefficients bornées dans $\mathbb{Q}_p$ tels que

$$\lim_{n \to -\infty} a_n = 0.$$

$\mathcal{E}^{\dagger}_{\mathbb{Q}_p}$ est muni d'un opérateur φ et d'une action du groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ vérifiant

$$\varphi(X) = (1+X)^p - 1,\ \gamma \cdot X = (1+X)^{\chi_p(\gamma)} - 1,$$

où γ est un générateur topologique de Γ.

Définition 3 *On appelle (φ, Γ)-module, $\mathcal{E}^{\dagger}_{\mathbb{Q}_p}$-module de type fini muni d'un opérateur φ semi-linéaire et d'une action de Γ également semi-linéaire commutant à φ.*

L'intérêt des (φ, Γ)-module est que le foncteur D est pleinement fidèle sur la catégorie des représentations galoisiennes p-adiques tout entière et pas juste sur certaines sous-catégories bien choisies.

Pour V représentation galoisienne p-adique, on peut munir le (φ, Γ)-module $D(V)$ d'un opérateur ψ, inverse à gauche de φ. On peut alors construire l'espace $(\varprojlim_\psi D(V))^b$ consitué des suites d'éléments de $D(V)$ qui sont bornées pour la topologie faible et telles que $\psi(x_{n+1}) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'intérêt principal de cette construction réside dans les résultats suivant.

Théorème 8 (Colmez) *Si V est semi-stable non cristalline de dimension 2,*

$$B(V)^\star \simeq (\varprojlim_\psi D(V))^b.$$

Théorème 9 (Berger, Breuil) *Si V est cristalline irréductible de dimension 2,*

$$B(V)^\star \simeq (\varprojlim_\psi D(V))^b.$$

Corollaire 1 *Si V est semi-stable ou cristalline irréductible, l'espace $B(V)$ est non réduit à zéro, irréductible et admissible.*

Remarquons une bizarrerie. On peut munir intrinsèquement l'espace $(\varprojlim_\psi D(V))^b$ d'une action du sous-groupe de Borel supérieur $B_2(\mathbb{Q}_p)$ et montrer que l'isomorphisme ci-dessus est $B_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. $(\varprojlim_\psi D(V))^b$ est donc a fortiori muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, cependant on ne parvient pas à interpréter l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sans passer par la description de $B(V)$. C'est pourquoi il paraît compromis de définir directement les espaces $B(V)$ comme duaux des $(\varprojlim_\psi D(V))^b$, ce qui aurait permis une définition unifiée des $B(V)$.

3.4 Réalisation dans la cohomologie

Un problème qui se pose, si une telle correspondance existe réellement, est de voir où se réalisent de telles représentations continues admissibles. Dans le cas lisse classique, la représentation $\pi_p(f)$ associée à une forme modulaire f de poids k et de niveau N se réalise dans la cohomologie d'une tour de courbes modulaires :

$$\varinjlim_r H^1_p(Y_0(Np^r), Sym^{k-2}\overline{\mathbb{Q}_p}^2).$$

L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur cet espace étant lisse, il est assez clair qu'on ne va pas y trouver les Banach admissibles attendus. Le candidat est en fait le groupe de cohomologie étale complétée :

$$\widehat{H}^1(Y_1(N)) = \varprojlim_n \varinjlim_r H^1(Y_1(N;p^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

Emerton a montré dans [Eme05] que cet espace est bien un Banach admissible muni d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Cette attente est étayée par certains cas démontrés. Par exemple Breuil a démontré dans [Bre03] que si π_p provient d'une forme modulaire propre nouvelle de caractère central trivial telle que $\sigma_p(f)$ est semi-stable non cristalline, il existe un unique $\mathcal{L}$ tel que $B(\sigma\rho_p(f))$ se plonge dans l'adhérence de $Sym^{k-2}\overline{\mathbb{Q}_p}^2 \otimes \pi_p$ dans $\widehat{H}^1(Y_1(N))$. Des résultats partiels dans le cas cristallin non irréductible ont aussi été obtenus par Breuil et Emerton dans [BE05].

Remarquons que joint au résultat de Colmez, ceci permet de conjecturer un lien entre la cohomologie étale complétée d'une courbe modulaire et les (φ, Γ)-modules associés aux représentations p-adique apparaissant dans sa cohomologie.

Références

[BB04] L. Berger et C. Breuil – « Représentations cristallines irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », disponible sur http ://www.ihes.fr/˜breuil, 2004.

[BE05] C. Breuil et M. Emerton – « Représentation ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global », disponible sur http ://www.ihes.fr/˜breuil, 2005.

[Ber04] L. Berger – « An introduction to the theory of p-adic representations », 2004.

[Bre03] C. Breuil – « Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée », disponible sur http ://www.ihes.fr/˜breuil, 2003.

[Bre04] — , « Invariant $\mathcal{L}$ et série spéciale p-adique », *Ann. Scient. de l'E.N.S.* **37** (2004), p. 559–610.

[Bum98] D. Bump – *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 55, Cambridge University Press, 1998.

[Car86] H. Carayol – « Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de hilbert », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **19** (1986), p. 409–468.

[Col04] P. Colmez – « Une correspondance de Langlands p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2 », disponible sur http ://www.math.jussieu.fr/˜colmez/publications.html, 2004.

[Del69] P. Deligne – « Formes modulaires et représentations ℓ-adiques », Séminaire Bourbaki, no. 355, Février 1969.

[DS] F. Diamond et J. Shurman – *A First Course in Modular Forms*, GTM, Springer.

[Eme05] M. Emerton – « On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms », disponible sur http ://www.math.northwestern.edu/˜emerton/preprints.html, 2005.

[Jan] G. J. Janusz – *Algebraic number fields.*

[Pra01] D. Prasad – « Locally algebraic representations of p-adic groups », *Representation theory* **5** (2001), Appendix to *$U(g)$-finite locally analytic representations.*

[Sai97] T. Saito – « Modular Forms and p-adic Hodge Theory », *Inventiones mathematicae* **129** (1997), p. 607–620.

[SD73] H. Swinnerton-Dyer – « On ℓ-adic representations and congruences for coefficients of modular forms », Lect. Notes in Math., vol. 350, 1973, in Modular Fonctions of one variable, III.

[Shi] G. Shimura – *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University Press.

[Sil] J. H. Silverman – *The arithmetic of elliptic curves*, Springer.

[ST68] J.-P. Serre et J. Tate – « Good reduction of abelian varieties », *Ann. of Math.* **88** (1968), p. 492–517.

[ST02] P. Schneider et J. Teitelbaum – « Banach space representations and Iwasawa theory », *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[Wei] A. Weil – *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann.