

Introduction au domaine de recherche

Un modèle de carte aléatoire : le collage d'arbres binaires uniformes

Thomas Selig
encadré par Jean-François Marckert

Septembre 2010

Table des matières

1	Introduction et motivation	3
1.1	Cartes : définition	3
1.2	Présentation du modèle	4
1.3	Un court historique de l'étude des cartes	4
2	Arbres discrets	6
2.1	Définition et terminologie	6
2.2	Les arbres vus comme cartes	7
2.3	Codage des arbres : le parcours en profondeur	8
2.4	Arbres de Galton-Watson	8
2.5	Arbres binaires uniformes	9
3	Le collage de deux arbres	9
3.1	Le but	10
3.2	Etude des cycles de m_n	11
3.3	Les étapes restantes	12
	Références	14

1 Introduction et motivation

Nous nous intéressons à un problème d'étude de cartes aléatoires. Si on prend deux arbres binaires avec le même nombre de feuilles, on peut "coller" les feuilles (identifier les sommets), pour obtenir une carte. Si les arbres que l'on considère sont choisis uniformément au hasard parmi les arbres binaires (disons à n feuilles), on obtient un modèle de carte aléatoire. La question informelle qu'on se pose est alors : à quoi ressemble la carte limite ?

Ces limites continues d'objets aléatoires discrets sont beaucoup étudiées en théorie des probabilités. L'exemple le plus connu est bien sûr la convergence des marches aléatoires discrètes vers le mouvement brownien (c'est le théorème de Donsker). L'intérêt de ce genre de recherche est double. D'une part, les objets limites ont souvent des propriétés fort intéressantes en soi. D'autre part, l'étude des structures limites continues permet de déduire des propriétés intéressantes sur les objets discrets.

1.1 Cartes : définition

Il existe plusieurs façons équivalentes d'introduire les cartes, mais nous nous tiendrons ici à celle qui nous paraît la plus visuelle, c'est-à-dire comme graphes plongés sur une surface. Pour en savoir plus sur les différentes définitions, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Mohar et Thomassen [20] (pour une approche combinatoire), ou encore au premier chapitre du livre de Lando et Zvonkin [14] (pour une approche plus algébrique). Puisque le modèle que nous allons étudier est une carte planaire, nous placerons uniquement dans ce cadre. Pour plus de détails dans le cadre général, consulter [19].

Définition 1.1. *Un graphe (fini) $G = (V, E)$ est dit plongé dans la sphère \mathbb{S}^2 si*

- V est un ensemble de points de \mathbb{S}^2 ,
- E est un ensemble de courbes et de lacets simples non-orientés sur \mathbb{S}^2 , dont les extrémités sont le(s) sommet(s) incident(s),
- l'intérieur d'une arête a une intersection vide avec les autres arêtes et sommets de G .

Les ensembles V et E sont appelés ensembles de sommets et d'arêtes du graphe plongé. Le support $\text{supp}(G)$ du graphe plongé est la réunion de ses arêtes et de ses sommets. Les composantes connexes du complémentaire de $\text{supp}(G)$ sont appelées *faces*. On dit qu'une face et une arête sont *incidentes* si l'arête est dans l'adhérence de la face. Le *degré* d'une face est le nombre d'arêtes incidentes à cette face.

Définition 1.2. *Une **carte** (planaire) est un graphe plongé dans \mathbb{S}^2 , considéré à homéomorphisme direct près, tel que ses faces soient homéomorphes à des disques ouverts.*

Remarquons que la condition demandant que les faces soient homéomorphes à des disques ouverts est équivalente, dans le cas des cartes planaires, à ce que le graphe que l'on plonge soit connexe.

La propriété suivante, connue sous le nom de formule d'Euler, est un résultat classique de théorie des graphes (voir par exemple [2]).

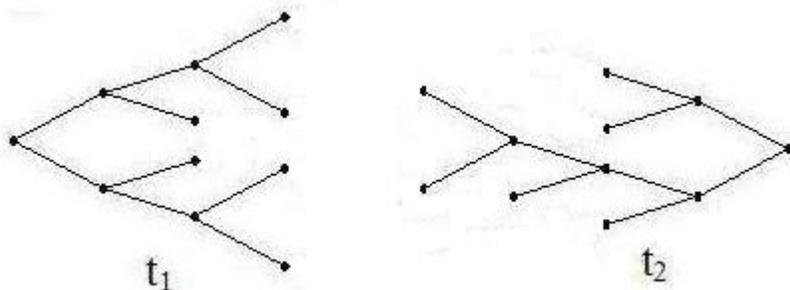
Proposition 1.1. *Soit m une carte, notons V , E , F l'ensemble de ses sommets, arêtes et de ses faces. Alors*

$$|V| + |F| - |E| = 2.$$

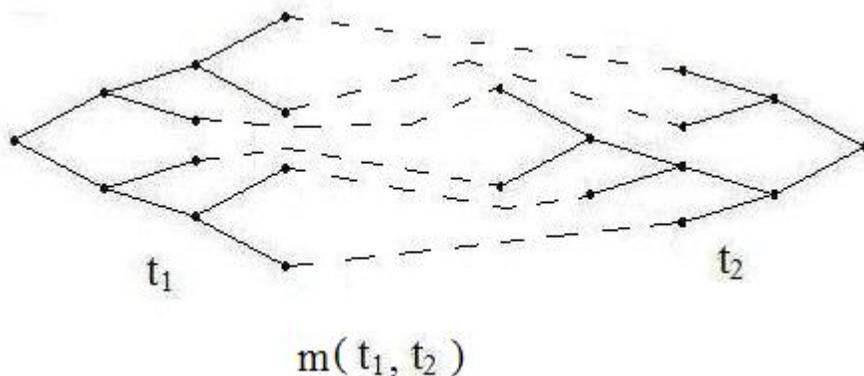
La preuve de ce résultat n'est pas compliquée. On montre d'abord que la formule est vraie pour les arbres (i.e. les cartes à une face), puis qu'effacer une arête ne change pas le terme de gauche de l'égalité.

1.2 Présentation du modèle

Dans cette partie, nous présentons le modèle que nous allons étudier. Pour l'instant ce que nous faisons reste assez informel, mais tout sera formalisé clairement dans la section suivante. Prenons deux arbres binaires (t_1, t_2) avec le même nombre de feuilles (disons n). Ces arbres peuvent être plongés dans le plan (et donc dans la sphère). Nous le faisons de manière à ce que les feuilles soient les unes en face des autres, comme dans la figure ci-dessus.



On colle alors entre elles les feuilles qui sont en face, autrement dit on identifie les sommets. Ceci nous donne une carte, qu'on note $m(t_1, t_2)$. Maintenant, si pour t_1 et t_2 on a pris deux arbres binaires choisis uniformément au hasard et de manière indépendante parmi les arbres binaires à n feuilles, on obtient bien une carte aléatoire : c'est cette carte qu'on va étudier. La figure ci-dessous montre ce procédé de collage.



1.3 Un court historique de l'étude des cartes

Les cartes, comme les graphes ou les arbres, sont des objets très importants en combinatoire. Les premiers problèmes d'énumération de cartes ont été résolus par Tutte [23] dans les années 60. Ensuite, des physiciens théoriciens, en commençant par t'Hooft [13], puis Brézin, Parisi, Itzykson et Zuber [7] ont remarqué un lien avec le calcul d'intégrales matricielles. Citons également à ce sujet un excellent article introducteur de Zvonkin [24] qui présente en détail un exemple de problème liant ces deux domaines.

Cependant, l'énumération de cartes a réellement pris son envol à partir des années 80, avec la découverte de bijections entre les familles de cartes et d'autres familles d'objets combinatoires plus

simples, comme les arbres. Cette méthode fut d'abord développée par Cori et Vauquelin [9] puis par Arquès [3], avant de trouver toute sa puissance dans la thèse de Schaeffer [22].

Plus récemment, la théorie physique de la gravité quantique 2-dimensionnelle a motivé l'étude de la structure géométrique des cartes aléatoires. En fait, c'est l'étude combinatoire mentionnée ci-dessus qui a permis de mieux comprendre la structure limite de ces familles de cartes. Nous allons donner deux exemples de telles utilisations.

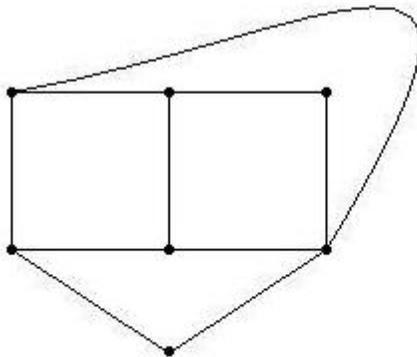
Le premier concerne les quadrangulations, c'est-à-dire les cartes dont toutes les faces ont degré quatre. Notons \mathcal{Q}_n l'ensemble des quadrangulations enracinées¹ à n faces, et \mathcal{T}_n l'ensemble des arbres étiquetés² à n arêtes. Schaeffer construit une bijection de $\mathcal{T}_n \times \{-1, 1\}$ dans \mathcal{Q}_n qui de plus relie les distances dans une quadrangulation aux étiquettes de l'arbre correspondant (consulter [15] par exemple pour plus de détails). Cette bijection permet à Le Gall [15] d'obtenir des résultats du type suivant.

Théorème 1.2. *Soit q_n une variable uniforme dans \mathcal{Q}_n , muni de la distance de graphe d_{q_n} , et conditionnellement à q_n , soit v, v' deux variables i.i.d., uniformes sur l'ensemble des sommets de q_n . Soit aussi (e, Z) un serpent brownien³. Alors*

$$\left(\frac{9}{8n}\right)^{\frac{1}{4}} d_{q_n}(v, v') \longrightarrow \sup Z, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où la convergence a lieu en distribution pour la topologie de Gromov-Hausdorff.

Notons qu'ici le facteur d'échelle est $n^{\frac{1}{4}}$. En fait, beaucoup de travail a été fait sur les quadrangulations, puisque celles-ci sont en un certain sens typiques des cartes quelconques. En effet, il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des quadrangulations enracinées à n faces et l'ensemble des cartes enracinées à n arêtes (voir [15]). Citons en particulier les travaux de Le Gall et Paulin [16], ou de Miermont [18] qui ont montré qu'une limite en loi le long d'une sous-suite des quadrangulations uniformes (correctement renormalisées) est toujours homéomorphe à \mathbb{S}^2 . Ainsi, ils ont justifié (en partie du moins) la conjecture émise par les physiciens selon laquelle sommer sur un grand nombre de quadrangulations (des cartes dont toutes les faces sont de degré 4) revient à intégrer sur une certaine surface.



Une quadrangulation à 5 faces

1. Une carte enracinée est juste la donnée d'une carte et d'une arête orientée distinguée.
2. Un arbre étiqueté est la donnée d'un arbre t et d'une fonction $l : t \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $l(\emptyset) = 0$ et si v est un enfant de v' dans t , alors $|l(v) - l(v')| \leq 1$.
3. Voir [15] pour une définition du serpent brownien.

Le second exemple est dû à Albenque et Marckert [1], et concerne les triangulations itératives. Une triangulation est une carte où toutes les faces sont de degré trois. Si on prend une face ABC dans une triangulation donnée, l'ajout d'un point O dans cette face et des arêtes AO, BO et CO nous donne une nouvelle triangulation avec deux faces de plus. Une triangulation itérative est une triangulation obtenue par itération de ce procédé en partant d'un seul triangle enraciné. Notons Δ_{2n} l'ensemble des triangulations itératives à $2n$ faces. Albenque et Marckert ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 1.3. *Soit M_n uniforme sur Δ_{2n} , m_n l'ensemble de ses sommets et d_{m_n} la distance de graphe associée. Soit e une excursion brownienne normalisée. Alors*

$$\left[m_n, \frac{11}{2} \left(\frac{2}{3n} \right)^{\frac{1}{2}} d_{m_n} \right] \longrightarrow [\mathcal{T}_2, d_{2e}], \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où la convergence a lieu en distribution pour la topologie de Gromov-Hausdorff. Ici, (\mathcal{T}_2, d_{2e}) désigne l'arbre (continu) codé par deux fois l'excursion brownienne (voir [15] pour plus de détails sur la définition).

Ici encore, le point-clé est un résultat de combinatoire. En effet, Albenque et Marckert établissent une bijection entre l'ensemble Δ_{2n} et l'ensemble des arbres ternaires (chaque individu a zéro ou trois enfants) à $3n - 2$ sommets, qui relie la distance sur la triangulation à une certaine fonction de l'arbre correspondant.

Il existe bien sûr de nombreux autres modèles de cartes aléatoires qui ont été étudiés, et pour avoir un bon aperçu de ces travaux nous renvoyons le lecteur à l'article d'Albenque et Marckert [1]. En ce qui concerne notre problème, un certain travail a déjà été accompli dans [6] et [11]. Notons tout de même que les auteurs de ces articles introduisent une structure supplémentaire entre leurs arbres, et donc perdent l'indépendance. Notre modèle paraît plus simple, et peut-être aussi plus naturel. Citons également comme source de motivation les travaux de Bernardi [4] sur les cartes boisées. Ce sont des cartes avec un arbre couvrant distingué, qui peuvent être décrites par des paires d'arbres.

2 Arbres discrets

Afin de mieux comprendre notre modèle de deux arbres collés, essayons d'abord d'étudier précisément les arbres qui constituent notre collage.

2.1 Définition et terminologie

Il existe plusieurs définitions (équivalentes) possibles des arbres. Nous prendrons ici celle de Neveu [21], reprise dans le papier de Le Gall et Duquesne [10]. Notons

$$\mathcal{U} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}^*)^n$$

l'ensemble des mots sur \mathbb{N}^* avec la convention $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$.

Si $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$ est un mot, on notera $h(u) := n$ la hauteur de u , et si $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{U}$ sont deux mots, on écrit $u * v := (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$ pour leur concaténation. Par convention $u * \emptyset = \emptyset * u = u$.

Définition 2.1. Un *arbre discret, ordonné, enraciné* est un sous-ensemble fini $t \subset \mathcal{U}$, qui vérifie :

1. $\emptyset \in t$.
2. Si $u * j \in t$ pour un certain $u \in \mathcal{U}$ et $j \in \mathbb{N}$, alors $u \in t$.
3. Pour tout $u \in t$, il existe $k_u(t) \in \mathbb{N}$ tel que $u * j \in t$ si et seulement si $1 \leq j \leq k_u(t)$.

Remarquons que la condition 2 nous dit que si un individu v est dans l'arbre, alors son parent aussi. Remarquons aussi que l'entier $k_u(t)$ correspond au nombre d'enfants de l'individu u dans l'arbre t .

Notation et terminologie :

Nous noterons \mathcal{T} l'ensemble des arbres discrets, ordonnés, enracinés. A partir de maintenant, nous les appellerons simplement *arbres*.

Si $t \in \mathcal{T}$, nous noterons $|t|$ son cardinal. Ses éléments seront appelés *sommets* ou *noeuds*. Si $u \in t$ est tel que $k_u(t) = 0$ (u n'a pas d'enfant), nous dirons que u est une *feuille* de t . Sinon, c'est un *noeud interne*. Le sommet \emptyset est appelé la *racine* de l'arbre. Si $u = v * w$ pour un certain $u, v \in t$ et $w \in \mathcal{U}$, on dit que v est un *ancêtre* de u . Si $u, v \in t$, on notera $u \wedge v$ pour leur plus grand ancêtre commun, c'est-à-dire

$$u \wedge v = \max\{w \in t; w \text{ est un ancêtre de } u \text{ et de } v\},$$

où le max est pris par rapport à l'ordre lexicographique sur \mathcal{U} .

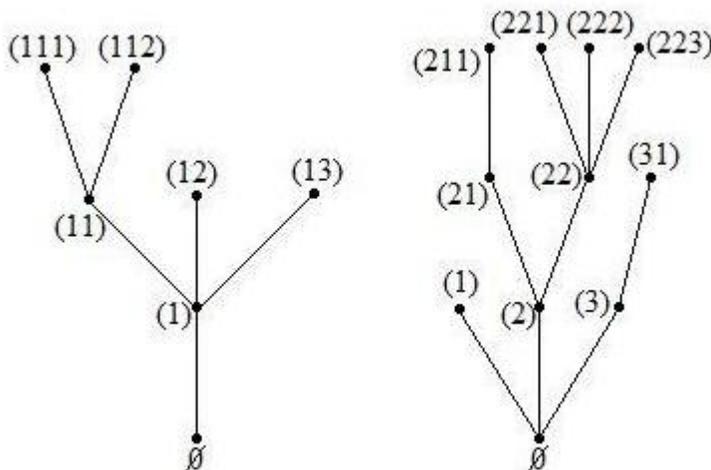
Enfin, si $t \in \mathcal{T}$ et $u \in t$, on définit

$$\theta_u(t) := \{v \in \mathcal{U}; u * v \in t\}.$$

Il est facile de voir que c'est un arbre, on l'interprète comme le sous-arbre de t ayant u comme racine.

2.2 Les arbres vus comme cartes

Notons que les arbres tels que nous les avons définis ci-dessus peuvent être naturellement munis d'une structure de graphe. Pour cela, il suffit de relier deux sommets u et v de l'arbre par une arête si et seulement si l'un est le parent de l'autre. En fait, la définition précédente nous donne une structure supplémentaire sur nos arbres, donnée par la notion d'*ordre*. Ainsi, ces arbres peuvent être vus naturellement comme des cartes, comme on le voit sur la figure suivante.



1. La variable $k_\emptyset(\tau)$ suit la loi ξ , i.e. $\mathbb{P}(k_\emptyset(\tau) = k) = \xi(k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout k tel que $\xi(k) > 0$, sous la loi conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | k_\emptyset(\tau) = k)$, les arbres $\theta_1(\tau), \dots, \theta_k(\tau)$ sont i.i.d. et suivent la loi de τ sous \mathbb{P} .

La proposition suivante est facile à vérifier.

Proposition 2.1. *Pour toute loi ξ vérifiant les conditions ci-dessus, il existe un $GW(\xi)$ arbre τ , qui est fini p.s. De plus, la loi de τ est entièrement déterminée par la loi de reproduction ξ .*

2.5 Arbres binaires uniformes

Dans ce paragraphe, on introduit les arbres particuliers qui constituent les éléments de notre collage, et on donne quelques résultats les concernant.

Définition 2.5. *Un arbre binaire est un arbre $b \in \mathcal{T}$ tel que*

$$\forall u \in b, k_u(t) \in \{0, 2\}.$$

Un arbre binaire est donc un arbre dont tous les noeuds internes ont exactement 2 enfants. On note B_n l'ensemble des arbres binaires à n feuilles.

Proposition 2.2. *Si $b \in B_n$, alors b a au total $2n - 1$ noeuds, et donc $2n - 2$ arêtes. De plus, le cardinal de B_n est égal au $(n - 1)$ -ième nombre de Catalan $C_{n-1} := \frac{1}{2n - 1} \binom{2n - 1}{n}$.*

Le premier résultat se démontre par récurrence (voir par exemple [2]). La preuve habituelle pour le second utilise les séries génératrices (voir [12]). Un arbre binaire uniforme (ABU) est une variable b_n choisissant uniformément au hasard un élément de B_n . Il existe en fait un lien entre les ABU et les arbres de Galton-Watson.

Théorème 2.3. *Soit ξ la loi binomiale $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_2)$, et τ un $GW(\xi)$ arbre. Il est clair que τ est p.s. binaire. Alors, sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | |\tau| = 2n - 1)$, l'arbre τ a la loi d'un ABU dans B_n .*

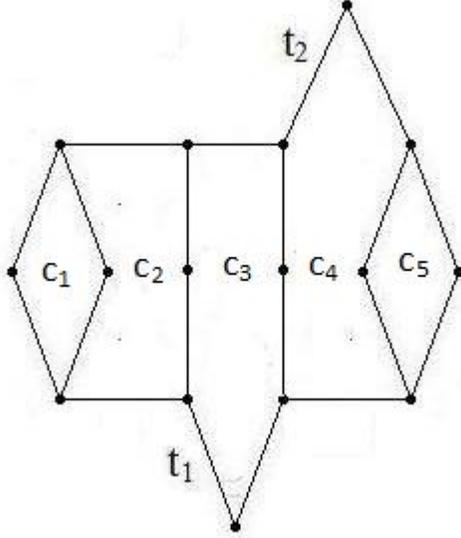
La preuve de ce résultat n'est en fait pas très difficile. On se fixe un arbre $b \in B_n$ et on montre que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\tau = b | |\tau| = 2n - 1)$ dépend seulement de n et non de l'arbre b .

Ainsi, on voit qu'il y a deux manières de voir un ABU. D'une part, on peut le voir comme un élément choisi uniformément au hasard dans un ensemble fini B_n , ce qui est un point de vue plutôt combinatoire. D'autre part, on peut le voir comme un arbre de Galton Watson conditionné, ce qui est un point de vue plutôt probabiliste. Cette dualité combinatoire-probabilité nous sera utile par la suite.

3 Le collage de deux arbres

Revenons à notre problème initial, à savoir l'étude de la carte aéatoire obtenue par collage de deux ABU. Dans cette section, on se donne (τ_n^1, τ_n^2) un couple i.i.d. d'ABU dans B_n . On note m_n la carte

obtenue par collage comme dans la section 1, $\mathcal{C}_n = \{c_n^{(1)}, \dots, c_n^{n-1}\}$ l'ensemble des cellules de la carte, numérotées comme de gauche à droite comme les feuilles de τ_n^1 (voir figure ci-dessous).



3.1 Le but

A long terme, on aimerait établir des résultats sur la limite d'échelle de notre suite de cartes (m_n) . En effet, si on équipe une carte de sa distance de graphe usuelle, elle devient un espace métrique compact. Or, on a une notion de convergence pour les espaces métriques compacts qui est donnée par la distance de Gromov-Hausdorff.

Définition 3.1. Soit deux espaces métriques compacts non vides (E_1, d_1) , (E_2, d_2) . La distance de Gromov-Hausdorff entre ces espaces, notée $d_{GH}(E_1, E_2)$, est l'infimum des $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe :

- un espace métrique compact (E, d) ,
 - deux injections isométriques $j_1 : E_1 \rightarrow E$, $j_2 : E_2 \rightarrow E$ satisfaisant $d_H(j_1(E_1), j_2(E_2)) < \varepsilon$,
- où d_H désigne la distance de Hausdorff usuelle dans E .

Pour plus de détails sur la topologie de Gromov-Hausdorff, nous renvoyons le lecteur à l'excellent ouvrage de Burago, Burago et Ivanov [8]. Pour notre étude nous n'aurons pas besoin de plus de détails.

A partir de maintenant, nous noterons d_{gr} la distance de graphe usuelle sur m_n et $d_n := n^{-\frac{1}{2}} d_{gr}$ la distance renormalisée telle que chaque arête a longueur $n^{-\frac{1}{2}}$. On a pour objectif de montrer qu'une limite en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff, le long d'une sous-suite, de la suite d'espaces métriques $((m_n, d_n), n \in \mathbb{N})$ est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 . Pour cela, on utilisera l'approche de Miermont dans [18] qui utilise un outil de convergence renforcée, qu'on appelle *1-régulière*.

Définition 3.2. Soit $((E_n, d_n), n \in \mathbb{N})$ une suite d'espaces métriques compacts convergeant vers E pour la distance de Gromov-Hausdorff. On dit que la convergence est **1-régulière** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \geq N$, les cycles de E_n de diamètre $\leq \delta$ sont homotopes à zéro dans leur ε -voisinage.

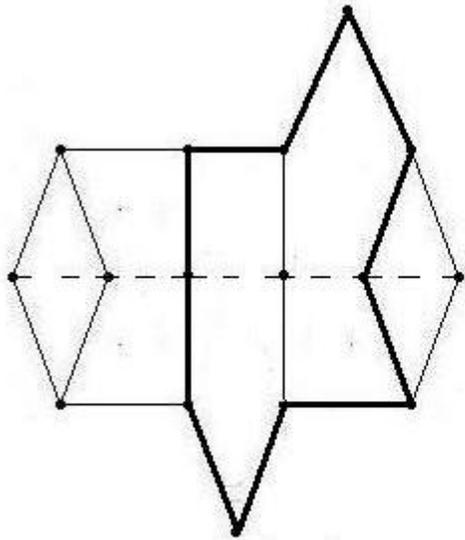
L'intérêt de cette notion est donné dans le théorème suivant.

Théorème 3.1. Soit $((E_n, d_n), n \in \mathbb{N})$ une suite d'espaces métriques compacts, tous homéomorphes à la sphère \mathbb{S}^2 . On suppose que la suite converge 1-régulièrement vers un espace E non réduit à un point. Alors E est lui aussi homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 .

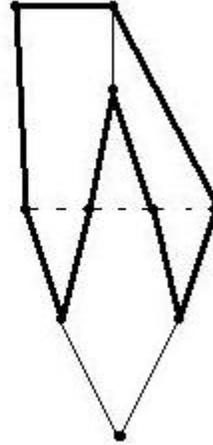
C'est un résultat assez technique, la preuve en est faite dans [5].

3.2 Etude des cycles de m_n

Il est ainsi essentiel d'étudier les cycles de notre carte m_n . Notons qu'au vu de la construction de notre carte, dans tout cycle apparaît un certain nombre de composantes du premier arbre, et le même nombre de composantes du second. Appelons un cycle avec une seule composante de chaque arbre un cycle **simple**, et les autres cycles **complexes**.



Un cycle simple



Un cycle de complexité 2

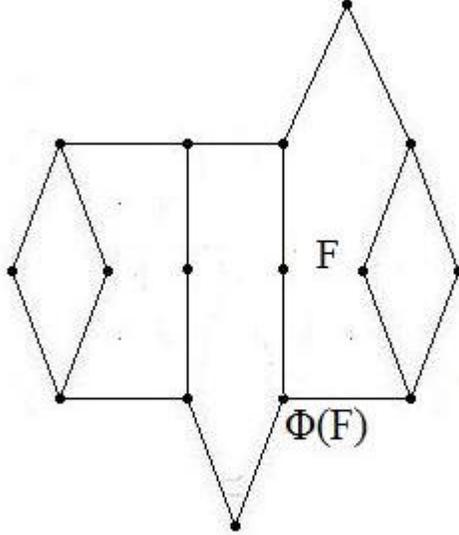
Notons que les cellules sont des exemples de cycles simples. Il est donc intéressant d'étudier l'asymptotique des cellules. Heuristiquement, il y a $\sim n$ cellules, et la somme de leurs degrés est $\sim 8n$, puisque la carte a $4n - 4$ arêtes et que la plupart des arêtes (celles qui ne sont pas au bord de la carte) sont adjacentes à deux cellules. Ainsi, le degré asymptotique d'une cellule devrait avoir une moyenne de 8. Ceci est précisé dans le théorème suivant.

Théorème 3.2. Soit, conditionnellement à m_n , une variable c_n uniforme sur \mathcal{C}_n et soit δ_n son degré. Alors on a la convergence en loi suivante

$$\delta_n \longrightarrow G_1 + G_2 + G_3 + G_4, \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où les $(G_i)_{i=1,\dots,4}$ sont i.i.d. et suivent la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

La preuve de ce résultat n'est pas évidente. En fait, pour le prouver nous avons d'abord établi une bijection (naturelle) entre les cellules de m_n et les noeuds internes de l'un des deux arbres. Ainsi, choisir au hasard une cellule revient au même que choisir au hasard un noeud interne sur l'un des deux arbres. La bijection est illustrée dans la figure suivante.



Ensuite, par des arguments combinatoires, nous avons montré le résultat suivant.

Théorème 3.3. Soit U_1 , resp. U_2 la trace de la bijection sur l'arbre τ_n^1 , resp. τ_n^2 . On a la convergence en loi suivante

$$(\theta_{U_1}(\tau_n^1), \theta_{U_2}(\tau_n^2)) \longrightarrow (\tau_1, \tau_2), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où τ_1, τ_2 sont deux arbres de Galton-Watson indépendants, de loi de reproduction $\xi = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_2)$, conditionnés à être de taille au moins 2.

Le théorème 3.2 est une conséquence relativement simple de ce résultat.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux cycles simples généraux, le but étant toujours de prouver une convergence 1-régulière pour la suite (m_n) . Nous avons prouvé le résultat suivant.

Proposition 3.4. P.s. pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des constantes $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \geq N$ les cycles simples de m_n de taille $\leq \delta n^{\frac{1}{2}}$ séparent la carte en deux domaines, dont l'un contient moins de εn sommets de m_n .

L'intuition de ce résultat est que les petits cycles simples ne peuvent avoir une masse macroscopique importante à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du cycle. Ceci correspond en fait au lemme 1 de l'article de Miermont [18], qui est le point-clé dans sa preuve. La démonstration est assez technique. Nous avons raisonné par l'absurde en utilisant la convergence des fonctions de contours renormalisées vers l'excursion brownienne (voir [17]).

3.3 Les étapes restantes

Dans ce paragraphe, nous discutons des étapes qui restent à accomplir pour prouver l'objectif annoncé en début de partie. En fait, la tension de la famille $((m_n, d_n))_n$ devrait être relativement aisée à obtenir, ce qui donnerait bien une sous-suite convergeant en loi.

Il faut d'abord étendre le résultat de la proposition 3.4 aux cycles quelconques. En ajustant quelque peu la preuve nous devrions pouvoir l'étendre à des cycles de "petite" complexité (disons de complexité plus petite qu'un entier k fixé). Néanmoins, il paraît plus difficile de l'étendre à des cycles qui peuvent avoir une complexité aussi grande que l'on veut (de l'ordre de $\log n$ par exemple). Pour ce faire, une étude combinatoire plus fine de notre carte pourrait être nécessaire.

Ensuite, pour appliquer le théorème 3.1, nos espaces de départ doivent être homéomorphes à la sphère \mathbb{S}^2 , ce qui n'est pas le cas. Cependant, en suivant l'approche de Miermont [18] il devrait être possible de les rendre suffisamment "proches" d'espaces homéomorphes à \mathbb{S}^2 .

Enfin, le théorème 3.1 nécessite une hypothèse supplémentaire, à savoir que la limite ne doit pas être réduite à un point, ce qui revient à montrer que nous regardons bien les phénomènes à la bonne échelle.

Il serait également agréable de pouvoir nous débarrasser de l'hypothèse *le long d'une sous-suite*, pour obtenir une convergence (en loi) du type

$$(m_n, d_n) \longrightarrow (M, \delta) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff. Ici, (M, δ) est un espace métrique aléatoire, et il faudrait pouvoir caractériser entièrement sa loi.

Références

- [1] M. Albenque et J-F. Marckert. Some families of increasing planar maps. *Elect. J. Probab.* : 1624-1671, 2008.
- [2] J. Aldous et R. Wilson. *Graphs and applications : an introductory approach*. The Open University, Springer, 2000.
- [3] D. Arquès. Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés. *Discr. Math.*, 58(1) : 11-24, 1986.
- [4] O. Bernardi. Bijective counting of tree-rooted maps and shuffles of parenthesis systems. *Elect. J. Combin.*, 14 R9, 2007.
- [5] E. Begle. Regular convergence. *Duke Math. J.*, 11 : 441-450, 1944.
- [6] N. Bonichon, E. Fusy et M. Bousquet-Mélou. Baxter permutations and plane bipolar orientations. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 61A, 2010.
- [7] E. Brezin C. Itzykson, G. Parisi et J. Zuber. Planar diagrams. *Comm. Math. Phys.*, 59 : 35-51, 1978.
- [8] D. Burago, Y. Burago et S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [9] R. Cori et B. Vauquelin. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5) : 1023-1042, 1981.
- [10] T. Duquesne and J-F. Le Gall. *Random trees, Lévy processes and spatial branching processes*. *Astérisque* 281, 2002.
- [11] S. Felsner, E. Fusy, M. Noy et D. Orden. Nijections for Baxter families and related objects. Preprint, to appear in *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. A.
- [12] P. Flajolet et R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [13] G. Hooft. A planar diagram for strong interactions. *Nucl. Phys. B*, 72 : 461-473, 1974.
- [14] S. Lando et A. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*, volume 141 de *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [15] J-F. Le Gall. The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Invent. Math.*, 169(3) : 621-670, 2007.
- [16] J-F. Le Gall et F. Paulin. Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geom. Funct. Anal.*, 18 : 893-918, 2008.
- [17] J-F. Marckert et A. Mokkadem. The depth first processes of Galton-Watson trees converge to the same Brownian excursion. *Ann. Probab.*, 31(3) : 1655-1678, 2003.
- [18] G. Miermont. On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations. *Elect. Comm. Probab.*, 13 : 248-257, 2008.
- [19] G. Miermont. Random maps and their scaling limits, dans *Proceedings of the conference Fractal Geometry and Stochastics IV, Greifswald, 2008*. *Progress in Probability*, 61 : 197-224, Birkhäuser, 2009.
- [20] B. Mohar et C. Thomassen. *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001.
- [21] J. Neveu. Arbres et processus de Galton-Watson. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 22 : 199-207, 1986.

- [22] G. Schaeffer. *Conjugaison d'arbres et cartes aléatoires*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 1998.
- [23] W. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15 : 249-271, 1963.
- [24] A. Zvonkin. Matrix integrals and map enumeration : An accessible introduction. *Computers and Mathematics with Applications : Mathematical and Computer Modelling* 26(8-10) : 281-304, 1997.