

LES POLYMÈRES DIRIGÉS EN MILIEU ALÉATOIRE EN BASSES DIMENSIONS

Cagri Sert

Sous la direction de Pierre Bertin

Mai 2011

Résumé

On travaille sur le modèle des polymères dirigés en milieu aléatoire, qui est un modèle particulier des polymères. Plus précisément, on considère un système des marches aléatoires interagissant avec un milieu aléatoire dans lequel se trouve des potentiels désordonnés (impuretés). On étudie l'article [6] de Hubert Lacoïn, dans lequel on trouve, parmi les autres résultats, une amélioration du résultat obtenu par Comets et Vargas [2] en donnant une majoration et une minoration plus précise sur *l'énergie libre* d'un polymère dirigé en milieu aléatoire en dimension 1+1 en haute température et le résultat que en dimension 2, en toute température, on a $p(\beta) < 0$, qui n'était qu'une conjecture avant [6].

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Les notions de base, les définitions et le modèle	2
1.1.1	Les polymères en général, et le modèle des polymères dirigés en milieu aléatoire	2
1.1.2	Le modèle	4
1.2	Energie libre et quelques résultats importants	6
1.2.1	Une martingale clé, la diffusivité, le désordre faible et fort	6
1.2.2	Energie libre	8
2	Les résultats principaux et les preuves	9
2.1	La présentation des résultats	9
2.2	Les preuves	10
2.2.1	La preuve de la majoration du théorème 3	11
2.2.2	La preuve dans le cas général	16
2.3	Le cas de dimension 2	18
2.3.1	La conjecture et sa solution en dimension 2	18
2.3.2	Une esquisse de la preuve	19
	Références	23

1 Introduction

1.1 Les notions de base, les définitions et le modèle

1.1.1 Les polymères en général, et le modèle des polymères dirigés en milieu aléatoire

Qu'est-ce qu'un polymère Un polymère est une grande molécule qui consiste en des monomères attachés l'un à l'autre par des liaisons chimiques. Les polymères abondent dans la nature en raison de la plurivalence des atomes comme carbone, oxygène, phosphore, soufre, silicium, azote, lesquels sont capables de former des structures enchaînées.

Classification des polymères Les polymères sont principalement de deux sortes : (1) Homopolymères : les polymères avec des monomères identiques,

(2) Copolymères : les polymères avec deux ou plusieurs sortes de monomères. Une autre classification des polymères est : (1) les polymères linéaires et (2) les polymères ramifiés. Dans les premiers, les monomères possèdent un seul groupe réactif (comme CH_2), qui donne lieu à une organisation linéaire dans la polymérisation. Chez les seconds, les monomères possèdent deux ou plusieurs groupes réactifs (comme acide hydroxique) qui donnent lieu à un réseau de multiples branchements croisés. La plupart des polymères naturels sont linéaires comme l'ADN, l'ARN, les protéines et quelques polysaccharides.

Polymérisation Le procédé chimique de la construction d'un polymère à partir des monomères est appelé polymérisation. La taille de polymère, c'est-à-dire, le nombre des monomères composants peut varier de 10^3 jusqu'à 10^{10} (des plus petits molécules ne sont pas considérés comme des polymères) Les liaisons chimiques dans un polymère sont flexible, dans le sens où un polymère peut avoir de différentes configurations spatiales. Par exemple, le polymère peut tourner autour de soi-même pour former des noeuds, peut être étendu en raison des forces répulsives entre les monomères, ou bien peut se concentrer en raison des forces attractives de Van der Waals entre les monomères.

Dans l'étude mathématique des polymères, on considère généralement les polymères linéaires, pour étudier et décrire de leurs différentes situations physiques. Pour ce faire, les principales quantités étudiées sont le nombre de différentes configurations spatiales, la distance bout-à-bout (subdiffusive, diffusive, superdiffusive), la fraction des monomères sur une interface ou absorbés dans une surface, la longueur moyenne, etc. et tout, typiquement dans la limite lorsque le polymère s'agrandit. Dans cette limite, on étudie aussi l'énergie libre et la présence de transitions de phases, en fonction des paramètres du modèle en question, qui signalent des changements radicaux dans le comportement, quand ces paramètres dépassent certaines valeurs critiques.

Le modèle général qu'on va étudier dans ce travail peut être considéré comme un modèle qui décrit un homopolymère sur $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$, avec \mathbb{N} jouant le rôle d'une certaine direction spatiale et appelé le temps (d'où le nom : polymère "dirigé") et \mathbb{Z}^d le milieu. Le désordre est associé à l'existence d'un champ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées placé sur le graphe $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ qui sont appelés des potentiels désordonnés (disordered

potentials). Ce modèle qu'on va expliquer rigoureusement dans la suite est appelé polymère dirigé en milieu aléatoire.

La version unidimensionnelle de ce modèle est initialement apparue dans physique, dans le travail de Huse et Henley [7], où il était utilisé pour décrire un cas dans le modèle d'Ising de dimension 2 avec des impuretés aléatoires. Il a été utilisé depuis, pour décrire, entre les autres, plusieurs différents phénomènes de croissance. La limite en zéro-température du modèle, où le polymère est dirigé par la moindre énergie qu'il trouve dans le milieu désordonné, correspond à la percolation orientée de premier passage. C'est pourquoi polymère dirigé en milieu aléatoire est aussi des fois appelé "la percolation orientée de premier passage à température positive."

Pour le modèle des polymères dirigés en milieu aléatoire on peut avoir la description intuitive physique suivante : on considère un polymère hydrophobe ou hydrophile dans un milieu de température fixe (qu'on choisit comme un paramètre de modèle), où il existe des molécules hydrophobes ou hydrophiles, comme les impuretés qui attirent ou repoussent les monomères desquels se constitue le polymère.

La première étude mathématique des polymères dirigés en milieu aléatoire a été faite par Imbrie et Spencer [8] et été suivie par de nombreux auteurs ([8] [1] [4] [5] [2]) (pour un compte rendu sur le sujet voir : [3])

1.1.2 Le modèle

La chaîne d'un polymère est représentée sur $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ par le graphe $\{ (i, S_i) | i \in \mathbb{N}, S_i \in \mathbb{Z}^d \}$ d'un chemin de plus proche voisins S , dans \mathbb{Z}^d , issu de zéro et dirigé dans la direction de première coordonnée qui fait l'office de temps. Avec le temps ainsi mis, on évite, en particulier, les demi-tours et les noeuds.

Chaque point sur $(i, S_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ représente la position de $i^{\text{ième}}$ monomère de la polymère en question et les liaisons chimiques sont représentés par les segments dans le chemin. La présence des impuretés est donnée par une réalisation d'un champ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $w = \{ w_{(i,x)} | i \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d \}$ avec la loi associée Q .

On définit Ω l'ensemble des chemins autorisés sur \mathbb{Z}^d , un sous-ensemble de $S = \{ (S_n)_{n \geq 0}, S_n \in \mathbb{Z}^d \}$, \mathcal{F} la tribu canonique sur Ω et on prend P l'unique

mesure de probabilité (l'unicité due à un argument simple de classe monotone) sur (Ω, \mathcal{F}) telle que $S_1 - S_0, S_2 - S_1, \dots, S_n - S_{n-1}$ sont indépendantes et

$$P(S_0) = 1, P(S_n - S_{n-1} = \pm\delta_j) = \frac{1}{2d} \quad j = 1, \dots, d$$

où δ_j est le $j^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{Z}^d

On définit l'Hamiltonien d'un chemin de longueur N dans Ω par

$$H_{N,w}(S) := \sum_{i=1}^N w_{i,S_i}. \quad (1)$$

Dans la suite, on dénote par P la loi de la marche aléatoire symétrique simple sur \mathbb{Z}^d issue de zéro, par P_x la loi de la marche aléatoire symétrique sur \mathbb{Z}^d issue du point x , pour $x \in \mathbb{Z}^d$, et $\mathbb{E}_P[\]$ et $\mathbb{E}_Q[\]$ les espérances, respectivement, par rapport aux mesures P et Q .

On définit la mesure de polymère d'ordre N en température inverse $\beta = \frac{1}{KT}$ comme

$$\mu_{N,w}^\beta(S) := \frac{1}{Z_{N,w}^\beta} \exp(\beta H_{N,w}(S)) P(S), \quad (2)$$

où Z_N est le facteur de normalisation, qui rend μ_N une mesure de probabilité et est appelé la fonction de partition du système. (On va écrire pour simplifier les notations $Z_{N,w}^\beta$ comme Z_N et $\mu_{N,w}^\beta$ comme μ_N où il n'y aurait pas de confusion pour β et w .) Par conséquent, on prend

$$Z_N := \mathbb{E}_P[\exp(\beta H_N(S))]. \quad (3)$$

Le choix de H_n est entraîné par le problème de physique sous-jacent et capture l'interaction du polymère avec l'environnement : le polymère dirigé en milieu aléatoire reçoit des pénalités ou des récompenses aléatoires selon la signe et la valeur du potentiel se trouvant sur les points qu'il visite. Par exemple, pour un simple modèle de désordre binaire, le modèle peut être utilisé pour décrire un homopolymère hydrophobe dans un milieu de microémulsion aléatoire d'eau et d'huile placés sur les points sur $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$, avec $w(i, x) = +1$ indiquant la présence d'une goutte de l'huile sur (i, x) et $w(i, x) = -1$ la présence d'une goutte de l'eau. La mesure de polymère μ_N peut être considéré comme la mesure de Gibbs sur l'espace des chemins (Ω, \mathcal{F}) avec l'hamiltonien (1). On

note que plus l'hamiltonien est grand, plus la mesure de polymère est grande indiquant le fait que la chaîne de polymère est attirée par les valeurs larges et repoussée par les valeurs petites de l'environnement. Une choix standard pour l'environnement $w_{(i,x)}$ est l'environnement Gaussien.

Exemple 1 *Environnement Gaussien*

C'est le cas dans lequel $w_{(i,x)}$ est une variable aléatoire Gaussienne standard et on a

$$Q\{w_{i,x} \in dt\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt.$$

Dans la suite, on va considérer les $w_{(i,x)}$ tel qu'il existe $B \in (0, \infty]$ tel que

$$\lambda(\beta) := \log \mathbb{E}_Q[\exp(\beta w_{1,0})] < \infty \quad \text{pour } 0 \leq \beta \leq B \quad (4)$$

i.e. on assume des moments exponentiels finis pour les variables aléatoires $w_{(i,x)}$ qui est une condition nécessaire pour qu'on ait $\mathbb{E}_Q[Z_N] < \infty$. Pour simplifier les calculs on va prendre les $w_{(i,x)}$ de moyenne 0 et de variance 1. On note que $\beta \mapsto \lambda(\beta)$ définie en (4) est strictement croissante et strictement convexe sur $[0, B)$ avec $\lambda(0) = 0$. Par exemple, pour le désordre Gaussien standard on a $\lambda(\beta) = \frac{1}{2}\beta^2$ et pour p-Bernouilli $\lambda(\beta) = \log[pe^\beta + (1-p)e^{-\beta}]$, $p \in (0, 1)$.

1.2 Energie libre et quelques résultats importants

1.2.1 Une martingale clé, la diffusivité, le désordre faible et fort

Pour bien comprendre l'influence du désordre dans μ_N quand N est assez grand, on observe déjà que si $\beta = 0$, μ_N est la loi de la marche aléatoire de sorte que, si proprement redimensionnée, la chaîne de polymère va ressembler au graphe d'un mouvement Brownien de dimension d. On observe aussi dans la formule (2) que pour $\beta > 0$, plus la température est basse, plus l'influence du désordre sur μ_N est grande.

Les questions principales pour le modèle avec $\beta > 0$ sont : est-ce que la présence de désordre rompt le comportement diffusif de la chaîne pour N grand, si oui, quelles sont les valeurs critiques de β de changement de comportement concernant la diffusivité etc.

Plusieurs auteurs ont étudié la diffusivité dans les modèles de polymère : Bolthausen a remarqué dans [1] que la fonction de répartition renormalisée $W_N := \frac{Z_N}{\mathbb{E}_Q[Z_N]}$ est une martingale par rapport à la filtration engendrée par w , i.e. $(\mathcal{F}_{(0,n]}^w)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\mathcal{F}_{(0,n]}^w = \sigma(w(i,x) : 1 \leq i \leq n, x \in \mathbb{Z}^d)$, la tribu de l'environnement jusqu'à l'instant n .

Remarque 1 *On peut calculer $\mathbb{E}_Q[Z_N]$:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[Z_N] &= \mathbb{E}_Q[\mathbb{E}_P[e^{\beta H_n(S)}]] \\ &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_Q[\prod_{t=1}^N e^{\beta w_{t,S_t}}]] \quad (\text{par Fubini-Tonelli}) \\ &= \mathbb{E}_P[\prod_{t=1}^N \underbrace{\mathbb{E}_Q[e^{\beta w_{t,S_t}}]}_{e^{\lambda(\beta)}}] \quad (\text{par l'indépendance de } w_{(t,S_t)} \text{ } t = 1, 2, \dots, N) \\ &= e^{n\lambda(\beta)} \end{aligned}$$

Alors on trouve facilement en écrivant

$$\begin{aligned} W_N &= \frac{Z_N}{\mathbb{E}_Q[Z_N]} = e^{-n\lambda(\beta)} Z_N \\ &= \mathbb{E}_P \left[\prod_{i=1}^n e^{\beta w_{(i,S_i)} - \lambda(\beta)} \right] \\ W_0 &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

On note aussi que $\mathbb{E}_Q[W_N] = 1$ et W_n est une martingale (strictement) positive. Donc $\lim_{N \rightarrow \infty} W_N^{\beta,w} = W^{\beta,w}$ existe Q-ps. De plus, l'événement $\{w | W^{\beta,w} > 0\}$ est mesurable par rapport à la tribu queue $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(w(i,x) | i > n, x \in \mathbb{Z}^d)$, il s'en suit de la loi de zéro-un de Kolmogorov que

$$Q \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} W_N = 0 \right\} \in \{0, 1\} \tag{6}$$

Avec plusieurs articles (parmi d'autres [8],[1],[5]), on a obtenu le résultat suivant :

$$Q \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} W_N = 0 \right\} = 0 \Rightarrow \text{diffusivité} , \tag{7}$$

et un consensus sur (7) pour dire que cela est en fait une équivalence.

On peut donc séparer les deux situations suivantes :

- le *désordre faible* quand W_n converge à une limite non-nulle, i.e. $Q\{W^{\beta,w} > 0\} = 1$ dans quel cas le comportement de la chaîne est diffusive
- le *désordre fort* quand W_N a limite zéro i.e. $Q\{W^{\beta,w} = 0\} = 1$ dans quel cas le comportement est appelé superdiffusive.

Transition de phase Le théorème suivant due à Comets et Yoshida [5],

Théorème 1 *Il existe une valeur critique $\beta_c = \beta_c(d) \in [0, \infty]$ (qui dépend de la loi de l'environnement) telle que*

- *On a le désordre faible si $\beta < \beta_c$.*
- *On a le désordre fort si $\beta > \beta_c$.*

De plus :

$$\begin{aligned} \beta_c(d) &= 0 \text{ pour } d = 1, 2 \\ \beta_c(d) &\in (0, \infty] \text{ pour } d \geq 3. \end{aligned} \tag{8}$$

Ce qui se passe, lorsque β est égal à cette valeur critique n'est pas encore connu.

1.2.2 Energie libre

On introduit maintenant l'énergie libre par le résultat suivant pour lequel on se réfère à [4] et [5]

Proposition 1 *La quantité*

$$p(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log W_N \tag{9}$$

existe Q-p.s., elle est négative et déterministe. On l'appelle l'énergie libre du modèle, et on a

$$p(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_Q[\log W_N] =: \lim_{N \rightarrow \infty} p_N(\beta) \tag{10}$$

de plus $p(\beta)$ est décroissante en β .

Remarque 2 *On appelle énergie libre quenched (quenched free energy) la quantité*

$$\tilde{p}(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n \quad (11)$$

dont l'existence Q-p.s. a été démontrée par Comets, Shiga et Yoshida [3]

On appelle l'énergie libre annealed (annealed free energy)

$$p^{ann}(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}_Q[Z_n] = \lambda(\beta) \quad (\text{par remarque 1}), \quad (12)$$

donc on a $p(\beta) = \tilde{p}(\beta) - p^{ann}(\beta)$

On observe aussi que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a $Z_N \approx e^{N\tilde{p}(\beta)}$ et par définition de l'énergie libre $W_N \approx \exp(N(\tilde{p}_N(\beta) - \lambda(\beta)))$

Dans ce sens, en prenant compte des définitions des désordres faible et fort, il est naturel de dire que si $p(\beta) < 0$, dans quel cas $W_N \rightarrow 0$ très vite, on a le désordre très fort

On peut aussi définir $\bar{\beta}_c(d)$ la valeur critique de β pour l'énergie libre, i.e. :

$$p(\beta) < 0 \iff \beta > \bar{\beta}_c(d)$$

Dans ce cas-là, on a évidemment $\bar{\beta}_c(d) \geq \beta_c(d)$, en effet si $\beta < \beta_c$ c'est le désordre faible, i.e. W_N converge à une limite non-zéro, ce qui implique $p(\beta) = 0$, on se rappelle que $p(\beta) \leq 0 \quad \forall \beta$ et que $\beta \mapsto p(\beta)$ est non-croissante, d'où ce résultat. Il est conjecturé que $\bar{\beta}_c(d) = \beta_c(d)$, i.e. il n'existe pas de phase intermédiaire où il existerait le désordre fort mais pas le désordre très fort. Pourtant ceci est une question bien difficile : Comets et Vargas [2] a répondu à cette question en prouvant que $\bar{\beta}_c(1) = 0$. Dans [6] Lacoïn rend leur résultat plus précis et prouve le résultat important que $\bar{\beta}_c(2) = 0$ donc que $\bar{\beta}_c(2) = \beta_c(2)$ ce qui donne une solution à cette question ouverte dans le cas de dimension 2.

2 Les résultats principaux et les preuves

2.1 La présentation des résultats

Dans cette partie, on analyse un résultat qui se trouve dans l'article [6] de Hubert Lacoïn, avec lequel Lacoïn améliore le résultat de Comets et Vargas [2]

dans le cas de dimension $1 + 1$ en donnant une majoration et une minoration précise pour $p(\beta)$ pour β assez petit. Les résultats sont les suivants :

Théorème 2 *En $d = 1$, si l'environnement satisfait (4), il existe des constantes c et $\beta_0 < B$ (dépendants de la loi de l'environnement) telle que pour tout $0 \leq \beta \leq \beta_0$ on a*

$$-\frac{1}{c}\beta^4 [1 + (\log\beta)^2] \leq p(\beta) \leq -c\beta^4. \quad (13)$$

Théorème 3 *En $d = 1$ si l'environnement est Gaussien, il existe une constante c tel que pour tout $\beta \leq 1$*

$$-\frac{1}{c}\beta^4 \leq p(\beta) \leq -c\beta^4. \quad (14)$$

2.2 Les preuves

Dans ce travail on se contente de démontrer les majorations données par les théorèmes 2 et 3. Premièrement, on va démontrer le résultat dans le cas de l'environnement Gaussien (théorème 3) et on va pouvoir adapter cette preuve assez facilement pour l'environnement général (théorème 2).

Dans la preuve, on va utiliser une première astuce qu'on appelle *la méthode des moments fractionnaires*. Grâce à elle, on trouve une majoration pour $p(\beta)$, qui est comparablement plus facile à manipuler. Ensuite, en utilisant les deux méthodes essentielles de la preuve :

- la décomposition de W_N selon les contributions de différentes familles des chemins,
- un changement de la loi de l'environnement pour pouvoir estimer les $\mathbb{E}_Q[\check{W}^\theta]$.

Moments fractionnaires. Comme on cherche à majorer

$$p(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_Q [\log W_N] \quad (15)$$

et qu'il n'est pas facile de manipuler l'espérance d'un log, on utilise l'astuce suivante : Soit $\theta \in (0, 1)$, on a, par l'inégalité de Jensen

$$\mathbb{E}_Q [\log W_N] = \frac{1}{\theta} \mathbb{E}_Q [\log W_N^\theta] \leq \frac{1}{\theta} \log \mathbb{E}_Q [W_N^\theta]. \quad (16)$$

et donc

$$p(\beta) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta N} \log \mathbb{E}_Q [W_N^\theta]. \quad (17)$$

2.2.1 La preuve de la majoration du théorème 3

Soit n le plus petit carré plus grand que $C_1\beta^{-4}$. L'entier n va être utilisé dans la suite comme un facteur d'échelle, on va considérer des systèmes de taille $N = nm$ (où m va tendre vers $+\infty$). Soit $\theta < 1$ fixé (on peut prendre $\theta = \frac{1}{2}$), I_k l'intervalle $I_k = [k\sqrt{n}, (k+1)\sqrt{n})$.

Pour pouvoir estimer $\mathbb{E}[W_N^\theta]$ on décompose W_N selon les contributions des différentes familles de chemins :

$$W_N = \sum_{y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{Z}} \check{W}_{(y_1, y_2, \dots, y_m)}, \quad (18)$$

où

$$\check{W}_{(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \mathbb{E}_P \left\{ \exp \left[\sum_{i=1}^N \left(\beta w_{i, S_i} - \frac{\beta^2}{2} \right) \mathbf{1}_{\{S_{in} \in I_{y_i}, \forall i=1, \dots, m\}} \right] \right\} \quad (19)$$

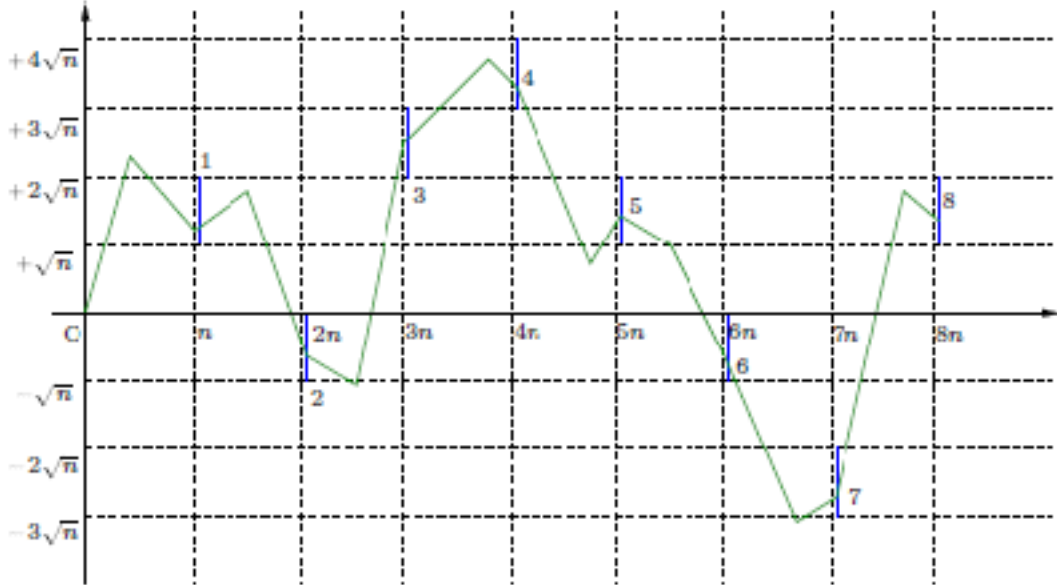


FIGURE 1. La partition de W_{nm} aux $\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}$ peut être considérée comme un COARSE GRAINING. Pour $m = 8$, $(y_1, \dots, y_8) = (1, -1, 2, 3, 1, -1, -3, 1)$, $\check{W}_{n, (y_1, \dots, y_m)}$ correspond à la contribution à W_N du chemin passant par les barrières épaisses sur la figure. La figure a été prise de l'article [6] de Hubert Lacoïn.

On emploie l'inégalité $(\sum a_i)^\theta \leq \sum a_i^\theta$ (laquelle tient pour toute collection dénombrable des nombres réels positives) dans (18) et on prend les espérances de chaque côté par rapport à Q pour avoir

$$\mathbb{E}_Q[W_{nm}^\theta] \leq \sum_{y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}_Q[\check{W}_{(y_1, y_2, \dots, y_m)}^\theta] \quad (20)$$

donc le problème se réduit à estimer $\mathbb{E}_Q[\check{W}_{(y_1, y_2, \dots, y_m)}^\theta]$ pour le faire on va introduire une mesure auxiliaire :

Pour chaque $Y = (y_1, \dots, y_m)$ on définit l'ensemble J_Y comme

$$J_Y := \left\{ (km + i, y_k \sqrt{n} + z), k = 0, \dots, m - 1, i = 1, \dots, n, |z| \leq C_2 \sqrt{n} \right\}, \quad (21)$$

où y_0 est égal à zéro. Par définition de J_Y on a $\#\{i | (i, S_i) \in J_Y\} = nm$ avec une grande probabilité. On note aussi que, lorsque n et m tendent vers $+\infty$

$$\#J_Y \sim 2C_2 mn^{\frac{3}{2}}. \quad (22)$$

On prend la nouvelle mesure \tilde{Q}_Y comme la mesure sous laquelle les variables aléatoires $w_{(i,x)}$ sont indépendantes, gaussiennes avec variance 1, et telles que $\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y}[w_{(i,x)}] = -\delta_n \mathbf{1}_{\{(i,x) \in J_Y\}}$ où $\delta_n = n^{-\frac{3}{4}} C_2^{-\frac{1}{2}}$.

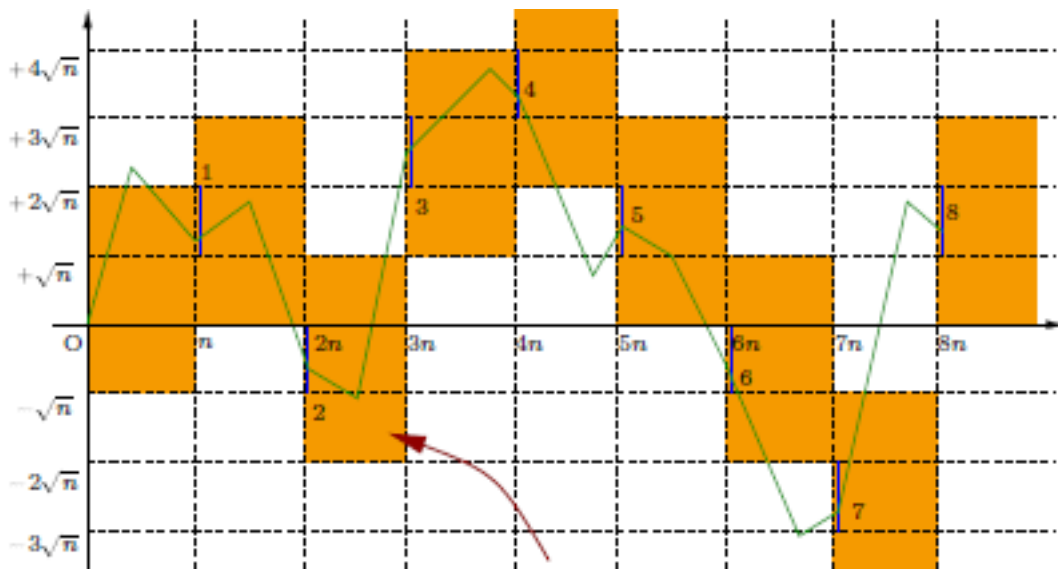
Lemme 1 *La mesure \tilde{Q}_Y est absolument continue par rapport à Q et avec la dérivée de Radon-Nikodyme*

$$\frac{d\tilde{Q}_Y}{dQ}(w) = \exp \left(- \sum_{(i,x) \in J_Y} \left[\delta_n w_{(i,x)} + \frac{\delta_n^2}{2} \right] \right). \quad (23)$$

Preuve. En prenant l'espérance de la variable aléatoire $f(w)$ pour une fonction mesurable positive arbitraire f par rapport à la mesure \tilde{Q}_Y on observe que si $w_{i_0, x_0} \in J_Y$ alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} [f(w_{i_0, x_0})] &= \int f(w_{i_0, x_0}) d\tilde{Q} = \int f(w_{i_0, x_0}) \frac{d\tilde{Q}}{dQ} dQ \\
&= \left(\underbrace{\int e^{-\left(\delta_n x + \frac{\delta_n^2}{2}\right)} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx}_1 \right)^{\#J_Y - 1} \times \\
&\quad \left(\int f(x) e^{-\frac{(\delta_n + x)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \right)
\end{aligned}$$

où on utilise l'indépendance des $w_{(i,x)}$ pour passer à la troisième égalité. Aussi, il est clair que si $w_{(i_0, x_0)} \notin J_Y$ alors $\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} [w_{(i_0, x_0)}] = 0$ par indépendance des $w_{(i,x)}$ et le fait que $\mathbb{E}_Q [w_{(i,x)}] = 0$ et le résultat s'ensuit. \square



la région où l'environnement est modifié

FIGURE 2. Cette figure représente largement le changement de mesure Q_Y . La région sur laquelle la moyenne de $w_{(i,x)}$ est diminuée (la région foncée sur la figure) correspond à la région dans laquelle c'est probable que la marche aléatoire reste, étant donné qu'il passe par les barrières épaisses. La figure a été prise de l'article [6] de Hubert Lacoin.

Par inégalité de Hölder on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q [\check{W}_{(y_1, y_2, \dots, y_m)}^\theta] &= \mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} \left[\frac{dQ}{d\tilde{Q}_Y} \check{W}_{(y_1, y_2, \dots, y_m)}^\theta \right] \\ &\leq \left(\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} \left[\left(\frac{dQ}{d\tilde{Q}_Y} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right] \right)^{1-\theta} \left(\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} [\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}] \right)^\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Le premier terme dans (24) peut être calculé explicitement :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} \left[\left(\frac{dQ}{d\tilde{Q}_Y} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right] \right)^{1-\theta} &= \left(\mathbb{E}_Q \left[\left(\frac{dQ}{d\tilde{Q}_Y} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right] \right)^{1-\theta} \\ &= \exp \left(\frac{\#J_Y \theta \delta_n^2}{2(1-\theta)} \right) \leq \exp(3m), \end{aligned} \quad (25)$$

où la dernière inégalité est obtenue en remplaçant la valeur de δ_n , $\theta (= \frac{1}{2})$ et (22).

Maintenant, on calcule le deuxième terme dans (24) :

$$\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} [\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}] = \mathbb{E}_P \left[\exp(-\beta \delta_n \# \{i | (i, S_i) \in J_Y\}) \mathbf{1}_{\{S_{kn} \in I_{y_k}, \forall k \in [1, m]\}} \right]. \quad (26)$$

simplement par définition des $\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}$, en utilisant Fubini-Tonelli et l'indépendance des variables aléatoires $w_{(i, x)}$.

Maintenant on définit

$$\begin{aligned} J &:= \{(i, x), i = 1, \dots, n, |x| \leq C_2 \sqrt{n}\} \\ \bar{J} &:= \{(i, x), i = 1, \dots, n, |x| \leq (C_2 - 1) \sqrt{n}\}. \end{aligned} \quad (27)$$

L'équation (26) donne

$$\mathbb{E}_{\tilde{Q}} [\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}] \leq \prod_{k=1}^m \max_{x \in I_0} \mathbb{E}_{P_x} \left[\exp(-\beta \delta_n \# \{i : (i, S_i) \in J\}) \mathbf{1}_{\{S_n \in I_{y_k - y_{k-1}}\}} \right] \quad (28)$$

où on met $y_0 = 0$.

Ce résultat est clair en considérant l'indépendance des variables aléatoires. On prend le maximum sur l'ensemble I_0 pour pouvoir majorer, en tenant compte de pas précédents, puisqu'on passe de $\mathbf{1}_{\{S_{kn} \in I_{y_k}, \forall k \in [1, m]\}}$ aux $\mathbf{1}_{\{S_n \in I_{y_k - y_{k-1}}\}}$ et en utilisant le fait que S est une chaîne de Markov.

$\mathbf{1}_{\{S_n \in I_{y_k - y_{k-1}}\}}$ pour $k = 1, \dots, m$. En combinant (28) avec (18), (24) et (25) on obtient

$$\begin{aligned} & \log \mathbb{E}_Q [W_N^\theta] \\ & \leq m \left[3 + \log \sum_{y \in \mathbb{Z}} \left(\max_{x \in I_0} \mathbb{E}_{P_x} \left[\exp(-\beta \delta_n \#\{i : (i, S_i) \in J\}) \mathbf{1}_{\{S_n \in I_y\}} \right] \right)^\theta \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Si la quantité entre les crochets dans (29) est plus petite que -1 , alors par (17) on va avoir $p(\beta) \leq \frac{-1}{n}$. Donc il faut montrer que

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}} \left(\max_{x \in I_0} \mathbb{E}_{P_x} \left[\exp(-\beta \delta_n \#\{i : (i, S_i) \in J\}) \mathbf{1}_{\{S_n \in I_y\}} \right] \right)^\theta \quad (30)$$

est petit, ce qui va terminer la preuve.

On se ramène d'abord à un problème contenant une somme finie, en observant (grâce au théorème central limite) que pour tout un $\epsilon > 0$ on peut trouver R tel que

$$\begin{aligned} & \sum_{|y| \geq R} \left(\max_{x \in I_0} \mathbb{E}_{P_x} \left[\exp(-\beta \delta_n \#\{i : (i, S_i) \in J\}) \mathbf{1}_{\{S_n \in I_y\}} \right] \right)^\theta \\ & \leq \sum_{|y| \geq R} \max_{x \in I_0} (P_x \{S_n \in I_y\})^\theta \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (31)$$

On utilise d'abord la majoration triviale suivante pour estimer le reste de la somme

$$\begin{aligned} & \sum_{|y| < R} \left(\max_{x \in I_0} \mathbb{E}_{P_x} \left[\exp(-\beta \delta_n \#\{i : (i, S_i) \in J\}) \mathbf{1}_{\{S_n \in I_y\}} \right] \right)^\theta \\ & \leq 2R \left(\max_{x \in I_0} \mathbb{E}_{P_x} \left[\exp(-\beta \delta_n \#\{i : (i, S_i) \in J\}) \right] \right)^\theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Ensuite, on observe que, en se rappelant des définitions des ensembles définis en (27), si on prend une marche aléatoire issue du point x , le nombre des i tel que (i, S_i) est dans J est égal au nombre des i tel que (i, S_i) est dans \bar{J} pour une marche faisant les mêmes marches et issue de 0, de sorte qu'on a :

$$\max_{x \in I_0} \mathbb{E}_{P_x} \left[\exp(-\beta \delta_n \#\{i : (i, S_i) \in J\}) \right] \leq \mathbb{E}_P \left[\exp(-\beta \delta_n \#\{i : (i, S_i) \in \bar{J}\}) \right]. \quad (33)$$

et cette dernière quantité satisfait évidemment :

$$\mathbb{E}_P \left[\exp(-\beta \delta_n \# \{i | (i, S_i) \in \bar{J}\}) \right] \leq P \{ \text{la marche aléatoire sort de } \bar{J} \} + \exp(-n\beta \delta_n). \quad (34)$$

En choisissant C_2 assez grand on peut rendre le premier terme suffisamment petit et en notant que le deuxième terme est égal à $\exp(-C_1^{-1/4}/\sqrt{C_2})$, une fois qu'on fixe C_2 on peut rendre le deuxième terme suffisamment petit en choisissant C_1 assez grand.

Donc avec un choix approprié des constantes et par l'utilisation de (33) et (34) on obtient

$$2R \left(\max_{x \in I_0} \mathbb{E}_{P_x} \left[\exp(-\beta \delta_n \# \{i : (i, S_i) \in J\}) \right] \right)^\theta \leq \epsilon. \quad (35)$$

On combine ceci avec (31) et on a alors démontré que (30) est petit et en prenant le log, on obtient que la quantité dans les crochets en (29) est plus petite que -1 . Ensuite on remplace ceci dans (17) en se souvenant que $N = mn$ et comment n avait été choisi, on obtient, dans le cas de l'environnement Gaussien, la majoration recherchée. \square .

2.2.2 La preuve dans le cas général

Pour la preuve dans le cas d'environnement général, on utilise exactement les mêmes idées essentielles qu'on a utilisées dans la preuve de l'environnement général. On a seulement besoin d'une modification dans le changement de loi de l'environnement dans J_Y comme la suivante :

$$\frac{d\tilde{Q}_Y}{dQ}(\beta) = \exp \left(- \sum_{(i,x) \in J_Y} [\delta_n w_{(i,x)} + \lambda(-\delta_n)] \right). \quad (36)$$

Maintenant on utilise encore l'inégalité de Hölder et on calcule le premier terme correspondant (à (24)) lequel devient

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{E}_Q \left[\left(\frac{dQ}{d\tilde{Q}_Y} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right] \right)^{1-\theta} \\
&= \left(\int \exp \left(\frac{\theta}{1-\theta} \sum_{(i,x) \in J_Y} [\delta_n w_{(i,x)} + \lambda(-\delta_n)] \right) dQ \right)^{1-\theta} \\
&= \exp(\theta \#J_Y (-\delta_n)) \left(\int \exp \left(\frac{\theta}{1-\theta} \delta_n x \right) dx \right)^{\#J_Y (1-\theta)} \\
&= \exp \left(\#J_Y \left[(1-\theta) \lambda \left(\frac{\theta \delta_n}{1-\theta} \right) + \theta \lambda(-\delta_n) \right] \right) \\
&\leq \exp(2m), \tag{37}
\end{aligned}$$

où on utilise l'indépendance des variables aléatoires et le fait que Q est une mesure de probabilité pour passer à la seconde ligne, on utilise simplement la définition (4) de la fonction $\lambda(\beta)$ pour passer à la troisième ligne, et on obtient l'inégalité en prenant δ_n assez petit et $\theta = 1/2$ et avec le calcul suivant lorsque $x \rightarrow 0$: $\lambda(x) = \log \left(\int e^{xw} dQ \right) = \log \left(\int 1 + xw + \frac{x^2 w^2}{2} + o(x^2 w^2) dQ \right)$ puisque w a la moyenne 0 et la variance 1, ceci donne $\lambda(x) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} \log(1 + x^2/2)$ ce qui implique que $\lambda(x) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} x^2/2$.

Ensuite, on calcule le second terme correspondant dans l'inégalité de Hölder (24), on calcule $\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} [\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} [\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}] &= \int \mathbb{E}_P \left\{ \exp \left[\sum_{i=1}^N (\beta w_{i, S_i} - \lambda(\beta)) \mathbf{1}_{\{S_{in} \in I_{y_i}, \forall i=1, \dots, m\}} \right] \right\} \\
&\quad \exp \left(- \left(\sum_{(i,x) \in J_N} \delta_n w_{(i,x)} + \lambda(-\delta_n) \right) \right) dQ
\end{aligned}$$

Ensuite, par Fubini-Tonelli, l'indépendance des variables aléatoires et le fait que Q est une mesure de probabilité, on obtient la quantité

$$\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} [\exp(\beta w_{1,0} - \lambda(\beta))] = \exp[\lambda(\beta - \delta_n) - \lambda(-\delta_n) - \lambda(\beta)] \tag{38}$$

au lieu de $\exp(-\beta\delta_n)$. En appliquant deux fois le théorème des accroissements finis, d'abord à la fonction

$$\bar{\lambda}(x) = \lambda(\beta - x) - \lambda(-x)$$

on obtient h et \hat{h} in $(0, 1)$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda(\beta - \delta_n) - \lambda(-\delta_n) - \lambda(\beta) &= \delta_n [\lambda'(-h\delta_n) - \lambda'(\beta - h\delta_n)] \\ &= -\beta\delta_n\lambda''(-h\delta_n + \hat{h}\beta). \end{aligned} \quad (39)$$

Comme w a variance 1, $\lim_{x \rightarrow 0} \lambda''(x) = 1$. Donc en choissant β et λ_n assez petit, on obtient $-\beta\delta_n\lambda''(-h\delta_n + \hat{h}\beta)$ plus petit que $-\beta\lambda_n/2$. Alors on remplace (26) par

$$\mathbb{E}_{\tilde{Q}_Y} [\tilde{W}_{(y_1, \dots, y_m)}] \leq \mathbb{E}_P \left[\exp \left(-\frac{\beta\lambda_n}{2} \#\{i | (i, S_i) \in J_Y\} \right) \mathbf{1}_{\{S_{kn} \in I_{y_k}, \forall k \in [1, m]\}} \right]. \quad (40)$$

à partir de là les démarches suivantes se suivent comme dans la preuve précédente. \square

2.3 Le cas de dimension 2

2.3.1 La conjecture et sa solution en dimension 2

On avait introduit la notion de la valeur critique $\bar{\beta}_c(d)$ de la température inverse β pour l'énergie libre et la conjecture qu'il n'existe pas de phase intermédiaire où on aurait le désordre fort mais pas le désordre très fort, i.e. $\bar{\beta}_c(d) = \beta_c(d)$. Cette question bien difficile et dont la solution n'avait été trouvée que dans le dimension 1 par Comets et Vargas [2] est résolue dans le cas de dimension 2 par Hubert Lacoïn [6] en démontrant que $\bar{\beta}_c(2) = 0$, et en donnant en plus des majorations et minorations explicites pour $p(\beta)$ quand β est assez petite. On a, donc, le résultat suivant de [6] :

Théorème 4 *En dimension 2, il existe constantes c et β_0 telles que pour tout $\beta \leq \beta_0$,*

$$-\exp \left(-\frac{1}{c\beta^2} \right) \leq p(\beta) \leq -\exp \left(-\frac{c}{\beta^4} \right), \quad (41)$$

de sorte que

$$\bar{\beta}_c(2) = 0 \quad (42)$$

et 0 est un point de non-analyticité pour $p(\beta)$.

Par la décroissance de $p(\beta)$ en β , on a le désordre fort en toute température en dimension 2.

2.3.2 Une esquisse de la preuve

La preuve est assez technique : il combine les méthodes des preuves précédentes et une nouvelle idée pour le changement de mesure : on change la covariance de l'environnement. La preuve est faite, comme celle de dimension 1, d'abord dans l'environnement Gaussien, et ensuite dans l'environnement général. Dans la suite on va donner une esquisse de la preuve de Hubert Lacoin, dans le cas de l'environnement Gaussien.

Les méthodes et les étapes de la preuve peuvent être décrites comme la suite :

- On facilite le problème en montrant qu'il suffit de montrer que pour un nombre réel $\theta < 1$, QW_N^θ décroît exponentiellement par rapport à N .
- On utilise une méthode de *coarse graining* : On décompose la fonction de partition selon les contributions de différentes familles des chemins restant dans un large couloir, parallèlement à la décomposition qu'on a utilisé dans la preuve précédente.
- Pour estimer les termes des moments fractionnaires qu'on a obtenus avec la décomposition, on modifie la loi de l'environnement dans les couloirs correspondants à chaque contribution. Plus précisément, on introduit, des corrélations négatives dans le champ Gaussien de l'environnement, de manière que la nouvelle mesure ne diffère pas autant de la mesure originale.
- On utilise quelques propriétés simples de la marche aléatoire dans \mathbb{Z}^2 pour calculer l'espérance sous la nouvelle mesure.

L'esquisse de la preuve pour l'environnement Gaussien : Les premières idées ne diffèrent pas de la preuve précédente, on commence par les mêmes formalismes : On fixe n le carré le plus petit, plus grand que $\exp(C_5/\beta^4)$ pour une grande constante C_5 qu'on va définir dans la suite, et pour β assez petit, on a $n \leq \exp(2C_5/\beta^4)$. Le nombre n va être utilisé dans la suite comme un facteur d'échelle. Pour $y = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ on définit $I_y = [a\sqrt{n}, (a+1)\sqrt{n} - 1] \times [b\sqrt{n}, (b+1)\sqrt{n} - 1]$ de sorte que les I_y sont disjoints et recouvrent \mathbb{Z}^2 . Pour $N = nm$, on décompose la fonction de répartition normalisée W_N selon

les contributions, parallèlement à ce qu'on a fait dans le cas de dimension 1,

$$W_N = \sum_{y_1, \dots, y_m \in \mathbb{Z}^2} \check{W}_{(y_1, \dots, y_m)} \quad (43)$$

où

$$\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)} = \mathbb{E}_P \left[\exp \left(\sum_{i=1}^N [\beta w_{i, S_i} - \beta^2] \right) \mathbf{1}_{\{S_{in} \in I_{y_i}, \forall i=1, \dots, m\}} \right]. \quad (44)$$

On fixe $\theta < 1$ en appliquant l'inégalité $(\sum a_i)^\theta \leq \sum a_i^\theta$ on obtient :

$$\mathbb{E}_Q[W_N^\theta] \leq \sum_{y_1, \dots, y_m \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{E}_Q[\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}^\theta]. \quad (45)$$

Pour estimer les termes dans (45), on introduit des mesures auxiliaires \tilde{Q}_Y sur l'environnement pour chaque $Y = (y_0, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}^{2m+1}$ avec $y_0 = 0$. Ce changement de mesure diffère de celui de la preuve précédente : Pour obtenir la décroissance exponentielle de W_N , on change la covariance de l'environnement sur le couloir dans lequel la marche a une grande probabilité de se trouver, en introduisant une corrélation négative.

Etant donné $Y = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ on définit m blocs $(B_k)_{k \in [1, m]}$ et J_Y leur réunion (ici, $|z|$ est la norme l^∞ sur \mathbb{Z}^2) :

$$\begin{aligned} B_k &:= \{(i, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 : [i/n] = k, |z - \sqrt{n}y_{k-1}| \leq C_6\sqrt{n}\} \\ J_Y &:= \bigcup_{k=1}^m B_k. \end{aligned} \quad (46)$$

On fixe la covariance du champ w sous la loi \tilde{Q}_Y comme la suite :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_Y(w_{i,z} w_{j,z'}) &= C_{(i,z), (j,z')}^Y \\ &:= \begin{cases} \mathbf{1}_{\{(i,z)=(j,z')\}} - V_{(i,z), (j,z')} & \text{si } \exists k \in [1, m] \text{ tel que } (i, z) \text{ et } (j, z') \in B_k \\ \mathbf{1}_{\{(i,z)=(j,z')\}} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (47)$$

où

$$V_{(i,z), (j,z')} := \begin{cases} 0 & \text{si } (i, z) = (j, z') \\ \frac{\mathbf{1}_{\{|z-z'| \leq C_7\sqrt{|j-i|}\}}}{100C_6C_7n\sqrt{\log n}|j-i|} & \text{sinon} \end{cases} \quad (48)$$

Ensuite, on définit

$$\check{V} := (V_{(i,z),(j,z')})_{(i,z),(j,z') \in B_1}. \quad (49)$$

On remarque que la matrice de covariance C^Y ainsi définie, est une matrice par bloc, diagonale avec m blocs identiques qui sont les copies de $I - \check{V}$ correspondant à B_k , $k \in [1, m]$ et 1's sur la reste de diagonale. Dans la suite, on prouve que \check{Q}_Y est bien-définie, en montrant qu'en choisissant n assez grand, le rayon spectral de \check{V} est plus petit que $(1 - \theta)/2$ de sorte que $I - \check{V}$ est définie positive qui implique l'existence d'un tel changement de mesure.

Dans la reste de la preuve on majore les termes provenant de l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}_Q[\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}^\theta] \leq \left(\mathbb{E}_Q \left(\frac{dQ}{d\check{Q}_Y} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right)^{1-\theta} \left(\mathbb{E}_{\check{Q}_Y}[\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}] \right)^\theta. \quad (50)$$

Plus précisément, on calcule explicitement le premier terme en fonction des déterminants des matrices :

$$\left(\mathbb{E}_Q \left(\frac{dQ}{d\check{Q}_Y} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right)^{1-\theta} = \sqrt{\frac{\det C^Y}{\det \left(\frac{C^Y}{1-\theta} - \frac{\theta I}{1-\theta} \right)^{1-\theta}}} \quad (51)$$

Et en calculant la norme de Hilbert-Schmidt de \check{V} et en utilisant l'inégalité $\log(1+x) \geq x - x^2$ pour tout $x \geq -1/2$ on obtient

$$\left(\mathbb{E}_Q \left(\frac{dQ}{d\check{Q}_Y} \right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \right)^{1-\theta} \leq \exp \left(\frac{m}{2(1-\theta)} \right). \quad (52)$$

Ensuite, on calcule directement les espérances des $\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}$ (le deuxième terme de l'inégalité de Hölder) sous la mesure modifiée en utilisant (47) et on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\check{Q}_Y}[\check{W}_{(y_1, \dots, y_m)}] = \\ & \mathbb{E}_P \left[\exp \left(-\frac{\beta^2}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \sum_{1 \leq k \leq m} \frac{\mathbf{1}_{\{(i, S_i), (j, S_j) \in B_k^2, |S_i - S_j| \leq C_7 \sqrt{|i-j|}\}}}{100 C_6 C_7 n \sqrt{\log n |j-i|}} \right) \mathbf{1}_{\{S_{kn} \in I_{y_k}, \forall k=1, \dots, m\}} \right] \end{aligned} \quad (53)$$

Par un procédé semblable à (28) et en combinant les résultats (52), (45) et (50), on obtient enfin

$$\mathbb{E}_Q[W_N^\theta] \leq \exp\left(\frac{m}{2(1-\theta)}\right) \left[\sum_{y \in \mathbb{Z}} \max_{x \in I_0} \left(\mathbb{E}_{P_x} \left[\exp\left(-\frac{\beta^2}{2} G(S)\right) \mathbf{1}_{\{S_n \in I_y\}} \right] \right) \right]^\theta \quad (54)$$

où

$$G(S) := \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{\mathbf{1}_{\{|S_i| \vee |S_j| \leq C_6 \sqrt{n}, |S_i - S_j| \leq C_7 \sqrt{|i-j|}\}}}{100 C_6 C_7 n \sqrt{\log n} |j - i|} \quad (55)$$

Donc, on obtient la décroissance exponentielle de $\mathbb{E}_Q[W_N^\theta]$ une fois qu'on prouve que

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}} \max_{x \in I_0} \left(\mathbb{E}_{P_x} \left[\exp\left(-\frac{\beta^2}{2} G(S)\right) \mathbf{1}_{\{S_n \in I_y\}} \right] \right)^\theta$$

est petit.

La reste de la preuve consiste donc à prouver que cette quantité est petite qui est fait en utilisant des propriétés asymptotiques simples de la marche aléatoire et par des choix convenables des constantes C_5 , C_6 et C_7 , on obtient le résultat. \square

Références

- [1] E. Bolthausen, *A note on diffusion of directed polymer in a random environment*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 529-534
- [2] F. Comets and V. Vargas, *Majorizing multiplicative cascades for directed polymers in random media*, ALEA **2** (2006) 267-277
- [3] F. Comets, T. Shiga and N. Yoshida, *Probabilistic analysis of directed polymers in a random environment : a review*, Adv. Stud. Pure Math. **39** (2004) 115-142
- [4] F. Comets, T. Shiga and N. Yoshida, *Directed polymers in a random environment : strong disorder and path localisation*, Bernoulli **9** 4 (2003) 705-723.
- [5] F. Comets and N. Yoshida, *Directed polymers in a random environment are diffusive at weak disorder*, Ann. Probab. **34** 5 (2006) 1746-1770.
- [6] Hubert Lacoin, *New bounds for the free energy of directed polymers in dimension 1 + 1 and 1 + 2* Communications in mathematical physics **294**/2 , (2010) 471-503
- [7] D.A. Huse and C.L. Henley, *Pinning and roughening of domain wall in Ising systems due to random impurities*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 2708-2711.
- [8] J.Z. Imbrie and T. Spencer, *Diffusion of directed polymer in a random environment*, J. Stat. Phys **52** 3/4 (1988), 608-626.
- [9] Frank den Hollander, Lecture Notes in Mathematics, *Random polymers, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXVii - 2007*