# Algèbres $W$ finies
# et Algèbres de Hecke doublement affines rationnelles

Peng Shan, sous la direction de Eric Vasserot

10 Juin 2008

## Introduction

Ce texte est une introduction à deux types d'algèbres en théorie des représentations : les algèbres $W$ finies et les algèbres de Hecke doublement affines rationnelles.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe. Quand on étudie les représentations de $\mathfrak{g}$, on considère souvent une algèbre associative qui possède la même catégorie de modules que $\mathfrak{g}$. C'est l'*algèbre enveloppante*. Elle est définie comme le quotient de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $xy - yx - [x, y]$ pour tout $x$, $y$ dans $\mathfrak{g}$. C'est une algèbre non-commutative et de dimension infinie.

Beaucoup de problèmes en théories des représentations concernent les trois objets suivants et leurs relations :

1. Le groupe de Weyl $W$ : c'est un groupe de réflexions fini, lié au système de racines de $\mathfrak{g}$ (voir section 2.1 pour la définition).
2. Les orbites nilpotentes : ce sont les orbites des éléments nilpotents dans $\mathfrak{g}$ pour l'action adjointe du groupe algébrique associé sur $\mathfrak{g}$.
3. Les idéaux primitifs : un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ est *primitif* s'il est l'annulateur d'un $\mathfrak{g}$-module simple.

Les algèbres $W$ finies sont définies à partir des orbites nilpotentes. Leurs représentations de dimension finie sont liée aux ideaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$. Les algèbres de Hecke doublement affine rationnelles sont liées au groupe de Weyl. Les deux algèbres s'étudient à l'aide de leurs analogies avec les algèbres enveloppantes.

# 1 Algèbres $W$ finie

**1.1.** Pour simplifier, on suppose désormais que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est simple. Soit $G$ un groupe algébrique associé à $\mathfrak{g}$. À chaque élément nilpotent $e$ de $\mathfrak{g}$, on peut associer une algèbre $W$ finie[1] $U(\mathfrak{g}, e)$, qui ne dépend à isomorphisme près que de l'orbite de $e$. Ces algèbres ont trois définitions équivalentes, qui sont apparues historiquement dans des contextes différents. On ne va en présenter qu'une qui est dûe à A. Premet (voir [P1]), mais avec deux points de vu légèrement différents. On expliquera le rôle de la tranche de Slodowy pour établir les analogies entre $U(\mathfrak{g}, e)$ et $U(\mathfrak{g})$. On verra ensuite les structures de $U(\mathfrak{g}, e)$ pour des orbites particulières. Après on passera aux représentations de $U(\mathfrak{g}, e)$, on verra comment les représentations de dimension finie de $U(\mathfrak{g}, e)$ sont liées aux idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ et on donnera des problèmes sur leurs classifications.

**1.2.** Soit $e$ un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Le théorème de Jacobson-Morozov nous permet d'associer à $e$ un $\mathfrak{sl}_2$-*triplet* $(e, h, f)$, *i.e.* il existe un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$ tel que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto e, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto h, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto f.$$

Ceci donne une correspondance bijective entre les orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}$ et les classes de conjugaisons des $\mathfrak{sl}_2$-triplets sous l'action de $G$. Le fait que cette correspondance soit injective est dûe à Kostant et Mal'tsev.

**1.3. Définition d'algèbre $W$ finie.** Fixons un élément $e$ et un $\mathfrak{sl}_2$-triplet $(e, h, f)$. On peut définir $U(\mathfrak{g}, e)$ comme algèbre d'endomorphisme d'un certain $U(\mathfrak{g})$-module défini par $e$. D'abord l'élément $h$ est semi-simple, il définit une graduation sur $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i),$$

où $\mathfrak{g}(i) := \{x \in \mathfrak{g},\ [h, x] = ix\}$. Notons $\mathfrak{m} := \bigoplus_{i \leq -2} \mathfrak{g}(i)$, et $\mathfrak{n} := \bigoplus_{i<0} \mathfrak{g}(i)$. Ce sont des sous-algèbres de Lie nilpotentes de $\mathfrak{g}$. Fixons de plus un isomorphisme $\Phi : \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ via la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ normalisée par $\Phi(e)(f) = 1$. On pose $\chi = \Phi(e)$. En suite, on choisit proprement un sous-espace $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{g}(-1)$, maximal pour que $\chi$ définisse un *caractère* sur $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l}$ (c-à-d, on peut voir $\mathbb{C}$ comme un $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l}$-module via $x \cdot 1 = \chi(x) \cdot 1$, on notera $\mathbb{C}$ muni cette structure de module par $\mathbb{C}_\chi$). On définit un $U(\mathfrak{g})$-module $Q_\mathfrak{l} := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l})} \mathbb{C}_\chi$, où $U(\mathfrak{g})$ agit par multiplication à gauche. Par définition, l'algèbre $U(\mathfrak{g}, e) := \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(Q_\mathfrak{l})^{op}$.

D'autre part, en utilisant la réciprocité de Frobenius, $\mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(Q_\mathfrak{l})^{op}$ s'identifie aussi aux espace des invariants dans $Q_\mathfrak{l}$ pour une action adjointe de $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l}$, avec un produit proprement défini. De ce point de vu, on peut améliorer la définition pour éviter le choix de l'espace $\mathfrak{l}$. D'après Gan et Ginzburg (voir [GG]), on considère le module $Q := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_\chi$. On le voir comme le quotient $U(\mathfrak{g})/I$ avec $I$ est l'idéal de $U(\mathfrak{g})$ à gauche engendré par $\{x - \chi(x) | x \in \mathfrak{m}\}$. On vérifie que l'action adjointe de $\mathfrak{n}$ sur $Q$ via $[x, u + I] := [x, u] + I$ soit bien définie. De plus, les éléments dans l'espace des $\mathrm{ad}(\mathfrak{n})$-invariants $Q^{\mathrm{ad}(\mathfrak{n})}$ se multiplient suivant la règle $(u + I) \cdot (v + I) := uv + I$. L'algèbre $U(\mathfrak{g}, e)$ est isomorphe à $Q^{\mathrm{ad}(\mathfrak{n})}$.

[1] Le mot "finie" est pour distinguer algèbre $W$ de son accompagnant associée à une algèbre de Lie affine.

**1.4.** Les analogies entre $U(\mathfrak{g}, e)$ et $U(\mathfrak{g})$ sont liées à l'existence d'une trache particulière dans $\mathfrak{g}$ qui paramètre les orbites nilpotentes. C'est la tranche de Slodowy.

**1.5. Tranche de Slodowy** Soit $e$ un élément dans une orbite nilpotente $\mathbb{O}$ de $\mathfrak{g}$. La *tranche de slodowy* à $\mathbb{O}$ en $e$ est par définition l'espace affine

$$\mathcal{S}_e := e + \mathfrak{g}^f,$$

où $\mathfrak{g}^f := \{x \in \mathfrak{g} | [x, f] = 0\}$. L'une des propriétés importantes de $\mathcal{S}_e$ est qu'en chaque point $\xi$ de $\mathcal{S}_e$, l'intersection de $\mathcal{S}_e$ avec l'orbite de $\xi$ est transverse.[2]. D'autre part, sur $\mathfrak{g}^*$, il y a une structure de poisson[3] qui vient du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$. Si on voit $\mathcal{S}_e$ dans $\mathfrak{g}^*$ via l'isomorphisme $\Phi$, la propriété ci-dessus assure que $\mathcal{S}_e$ hérite d'une structure de *Poisson* de celle sur $\mathfrak{g}^*$.

**1.6. Le théorème de PBW** Un théorème fondamental pour l'algèbre enveloppante est le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Rappelons que $U(\mathfrak{g})$ est un quotient d'algèbre tensoriel $T(\mathfrak{g}) = \oplus_i T^i(\mathfrak{g})$, où $T^i(\mathfrak{g})$ est formé des éléments homogènes de degré $i$. Soit $U^i(\mathfrak{g})$ l'image des $\oplus_{0 \le j \le i} T^j(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})$. Les $U^i(\mathfrak{g})$ définissent une filtration sur $U(\mathfrak{g})$. Le théor'eme de $PBW$ assure que l'anneau gradué associé

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) := \oplus_{i \in \mathbb{N}} U^i(\mathfrak{g}) / U^{i-1}(\mathfrak{g})$$

est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$. De plus, si on identifie $S(\mathfrak{g})$ avec $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, alors l'algèbre enveloppante déforme de la structure de poisson sur $\mathfrak{g}^*$ au sens suivante : pour tout $a \in S^i(\mathfrak{g})$ et $b \in S^j(\mathfrak{g})$, on prend deux éléments $A \in U^i(\mathfrak{g})$, $B \in U^j(\mathfrak{g})$ tels que leur images sous les morphismes de quotient $U^i(\mathfrak{g}) \to S^i(\mathfrak{g})$, $U^j(\mathfrak{g}) \to S^j(\mathfrak{g})$ sont respectivement $a$, $b$. Alors le crochet de poisson $\{a, b\}$ vaut l'image du commutateur $AB - BA$ par $U^{i+j-1}(\mathfrak{g}) \to S^{i+j-1}(\mathfrak{g})$.

Pour obtenir l'analogue pour $U(\mathfrak{g}, e)$, il faut utiliser une autre filtration sur $U(\mathfrak{g})$, qui se restreint à une filtration $F^i U(\mathfrak{g}, e)$ sur $U(\mathfrak{g}, e)$. Cette filtration ést définie par Kazhdan. Elle permet d'obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. *(Premet [P1], Gan-Ginzburg [GG]) L'anneau gradué associé à la filtration de Kazhdan,* $\operatorname{gr}(U(\mathfrak{g}, e)) = \bigoplus_i F^i(U(\mathfrak{g}, e))/F^{i-1}(U(\mathfrak{g}, e))$, *est isomorphe à* $\mathbb{C}[\mathcal{S}_e]$, i.e. *, à l'anneau des fonctions régulières sur la tranche de Slodowy. De plus,* $U(\mathfrak{g}, e)$ *munie cette filtration est une déformation de la structure de poisson sur* $\mathcal{S}_e$.

REMARQUE 1.2. *Il faut remarquer que,* $\mathcal{S}_e$ *étant vu dans* $\mathfrak{g}^*$ *via l'identification* $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$, *on a* $\mathbb{C}[\mathcal{S}_e] = S(\mathfrak{g}^e)$ *où* $\mathfrak{g}^e$ *est le centralisateur de* $e$ *dans* $\mathfrak{g}$. *Mais* $U(\mathfrak{g}, e)$ *n'a pas même structure que* $U(\mathfrak{g}^e)$, *elle est encore une déformation de* $U(\mathfrak{g}^e)$.

**1.7.** On décrit dans ce paragraphe les structures des algèbres $W$ finies associées à certaines orbites particulières, en utilisant les propriétés géométriques de la tranche de Slodowy.

[2]Ici *transverse* signifie qu'il existe un voisinage ouverte de $(1, \xi)$ tel que la différentielle du morphisme $G \times \mathcal{S}_e \to \mathfrak{g}$ soit sujective en chaque point de ce ouverte

[3]Une structure de *poisson* sur une variété $X$ est une crochet de Lie sur $\mathbb{C}[X]$ tel que chaque élément $\phi$ de $\mathbb{C}[X]$ définisse une dérivation $\{\phi, -\}$

Fixons une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Le groupe de Weyl $W$ opère sur $\mathfrak{h}$. D'après un théorème de Chevalley, le morphisme de restriction $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ donne un isomorphisme $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$. Ainsi on a un morphisme

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}//G \simeq \mathfrak{h}/W.$$

Concrètement, comme $\mathbb{C}[\mathfrak{h}/W]$ est une algèbre polynomiales avec $r = \dim(\mathfrak{h})$ générateurs homogènes. Soit $p_1, \ldots, p_r$ les éléments homogènes correspondants dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ via l'isomorphisme de Chevalley. On identifie l'espace affine $\mathfrak{h}/W$ à $\mathbb{C}^r$, alors $\varphi$ est le morphisme suivant

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}^r; x \mapsto (p_1(x), \ldots, p_r(x)).$$

En particulier, on peut montrer que la fibre en 0 de $\varphi$ est formée des éléments nilpotents dans $\mathfrak{g}$. C'est *le cône nilpotent* $\mathcal{N}$. Elle est une variété irréductible qui ne possède qu'un nombre fini de $G$-orbites. En particulier, il y a une unique orbite maximale, que l'on appelle *l'orbite régulière.*

Le morphisme $\varphi$ joue un rôle fondamental pour étudier les $U(\mathfrak{g})$-modules de dimension infinie. Naturellement on s'intéresse à la restriction de ce morphisme à la tranche de Slodowy $\mathcal{S}_e$

$$\rho : \mathcal{S}_e \to \mathfrak{h}/W.$$

Il a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.3. *1. La fibre de $\rho$ au point 0 est $\mathcal{S}_e \cap \mathcal{N}$.*

*2. Si $e$ appartient à l'orbite régulier, alors $\rho$ est un isomorphisme de variétés.*

Ceci donne des informations sur la structure de l'algèbre $W$ finie. En effet, en identifiant $U(\mathfrak{g}, e)$ avec éléments ad$(\mathfrak{n})$-invariants du module $Q$, il est connu que le morphisme quotient $U(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow Q$
envoie bijectivement le centre de $U(\mathfrak{g})$ sur centre de $U(\mathfrak{g}, e)$(voir [P2]). Soit $\eta$ un caractère central de $U(\mathfrak{g})$ (*i.e.* un morphisme d'algèbres $Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$). On considère l'algèbre $U(\mathfrak{g}, e) \otimes_{Z(\mathfrak{g})} \mathbb{C}_\eta$. Elle est naturellement filtrée, et d'après la première propriété, son anneau gradué associé est isomorphe à $\mathbb{C}[\mathcal{S}_e \cap \mathcal{N}]$. En particulier, si $e$ est régulier, l'algèbre $U(\mathfrak{g}, e)$ est isomorphe au centre d'algèbre enveloppante $Z(\mathfrak{g})$. C'est un ancien résultat de Kostant.

**1.8.** Il se trouve qu'à l'intérieure du cône nilpotent, il existe toujours une unique orbite dense dans le complément de l'orbite régulière. On l'appelle l'orbite *sous-régulière.* Dans ce cas, $\mathcal{S}_e \cap \mathcal{N}$ est une surface avec une singularité *simples* au point $e$ (c-à-d localement , elle est une singularité définie par un polynôme homogène dans $\mathbb{C}[X, Y, Z]$). Ces singularités sont décrites explicitement dans le travail original de Slodowy : Si $\mathfrak{g}$ est de type $A$, $D$, $E_{6,7,8}$, ce sont les singularités kleiniennes de type correspondante (c-à-d le quotient du plan $\mathbb{C}^2$ par un sous-groupe fini de $SL_2$) ; Si $\mathfrak{g}$ est de type $B$, $C$, $F_4$, $G_2$, les singularités sont caractérisées par les données d'une singularité kleinienne munie d'un groupe d'automorphismes.

Les surfaces avec une singularité kleinienne sont *symplectiques*, donc possèdent naturellement des structures de poisson. Leur déformations ont été beaucoup étudiées en théorie des représentations. Par exemple, en type $A$, $D$, $E$, à partir des carquois associés aux diagrammes de Dynkin étendus, Crawley-Boevey et Holland ont construit pour chaque $\lambda \in \mathfrak{h}/W$, une algèbre $\mathscr{O}^\lambda$ qui déforme la singularité kleinnienne correspondante (voir [CH]). Les représentations de ces algèbres sont relativement bien comprises. D'autre part, d'après la section précédente, les algèbres $U(\mathfrak{g}, e) \otimes_{Z(\mathfrak{g})} \mathbb{C}_\eta$ fournissent aussi une famille de déformations. Son espace de paramètres consiste en les caractères centraux, et s'identifie à $\mathfrak{h}/W$ via l'isomorphisme de Chevalley. Il sera intéressant de pouvoir identifier les deux. En cas de type $A$, ces algèbres admettent des présentations en termes de générateurs et relations, qui permettent d'établir des isomorphismes explicites. Le résultat général n'est pas connu.

REMARQUE 1.4. *Un autre cas où la structure d'algèbre W finie est bien compris est le cas de l'orbite minimale (Premet, [P2]). Remarquons aussi que si $e = 0$, on retrouve algèbre enveloppante. À part de ces cas particuliers, les structures des orbites et les singularités de $\mathcal{S}_e \cap \mathcal{N}$ deviennent compliquées. Elles restent mystérieuses.*

**1.9.** Pour $A$ une algèbre associative. Dans toute la suite, on notera $A$-**mod** la catégorie des $A$-modules de type fini.

Dans $U(\mathfrak{g})$-**mod**, il y une sous-catégorie abélienne $\mathcal{C}_\chi$ formées des $U(\mathfrak{g})$-modules $M$ tels que l'action de $m - \chi(m)$ sur $M$ soit localement nilpotente pour tout $m$ dans l'idéal $\mathfrak{m}$. On appelle ces modules les *modules de Whittaker* (de $\mathfrak{g}$). Le théorème de Skryabin suivant donne une équivalence entre $U(\mathfrak{g}, e)$-**mod** et $\mathcal{C}_\chi$.

THÉORÈME 1.5. *(Skryabin, [S]) Le foncteur $U(\mathfrak{g}, e)$-**mod** $\to \mathcal{C}_\chi$; $N \mapsto Q \otimes_{U(\mathfrak{g}, e)} N$ est un quasi-isomorphisme, dont inverse est donné par le foncteur* Wh *qui associe chaque $U(\mathfrak{g})$-module $M$ l'espace vectoriel* $\mathrm{Wh}(M) := \{x \in M | \ mx = \chi(m)x, \ m \in \mathfrak{m}\}$ *muni l'action naturelle de $U(\mathfrak{g}, e)$.*

En particulier, cette équivalence implique que pour tout $U(\mathfrak{g}, e)$-module irréductible $V$, l'annulateur $I := \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(Q \otimes_{U(\mathfrak{g}, e)} V)$ est un idéal primitif. De plus, si on considère idéal $\mathrm{gr}\, I$ qui est l'image de $I$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, il définit une sous-variété de $\mathfrak{g}^*$ que l'on appelle la *variété associée* à $I$, notée $\mathcal{VA}(I)$. Le théorème suivant de Premet nous montre une des motivations pour étudier les représentations de dimension finie de $U(\mathfrak{g}, e)$(voir [P2], [P3]).

THÉORÈME 1.6. *Soit $\mathbb{O}_\chi$ l'orbite nilpotente de $\chi$ dans $\mathfrak{g}^*$. On note $\overline{\mathbb{O}_\chi}$ son adhérence. Alors pour tout module $V$ de dimension finie de $U(\mathfrak{g}, e)$, on a*

$$\mathcal{VA}(\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(Q \otimes_{U(\mathfrak{g}, e)} V)) = \overline{\mathbb{O}_\chi}.$$

*Réciproquement, soit $J$ un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ muni d'un caractère infinitesimal rationel tel que $\mathcal{VA}(J) = \overline{\mathbb{O}_\chi}$, alors il existe un $U(\mathfrak{g}, e)$-module de dimension finie $V$ tel que*

$$J = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(Q \otimes_{U(\mathfrak{g}, e)} V).$$

Il est conjecturé que la réciproque est vraie même sans la condition de l'existence du caractère infinitesimal rationel pour $J$ (voir [P2]).

**1.10. Représentations irréductibles de dimension finie**

La classification des modules de dimension finie des algèbres $W$ finie est encore un problème largement ouvert. Elle est connue en type $A$ par Brundan et Kleshchev (voir [BK]). Pour le cas général, Brundan, Goodwin et Kleshchev ont proposé le cadre d'une théorie de plus haut poids pour les étudier(voir [BGK]).

Rappelons la méthode pour classifier les représentations irréductibles de dimension finie de $U(\mathfrak{g})$. On choisit d'abord une sous-algèbre de cartan $\mathfrak{h}$ et une sous-algèbre de borel $\mathfrak{b}$ qui le contient. On obtient ainsi une décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. On commence par considérer les modules de plus haut poids. Ce sont les $U(\mathfrak{g})$-modules engendrés par un seul élément $v$ sur lequel $U(\mathfrak{n}^+)$ agit par zéro et $U(\mathfrak{h})$ agit par un élément dans $\mathfrak{h}^*$, ce que l'on appelle *le plus haut poid*. Pour chaque poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, il y a un tel module universel $M_\lambda = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}^+)} \mathbb{C}_\lambda$. On les appelle *modules de Verma*. Chaque $M_\lambda$ a un unique quotient simple $L_\lambda$. Les $L_\lambda$ sont deux à deux non-isomorphes. Chaque classe d'isomorphismes des représentations irréductibles de dimension finie est représenté par un unique $L_\lambda$. Ainsi ils correspondent à un sous-ensemble des poids. On caractérise enfin cet ensemble via la combinatoire des systèmes de racines.

Dans le cas d'algèbre $W$ finie, il faut considérer la décomposition de $\mathfrak{g}$ par les poids du sous-tore $\mathfrak{h}^e = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^e$. Ces poids forment un *système de racines restreint*. En fixant une partie positive, on obtient une décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$. On remarque ici $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie réductive dans $\mathfrak{g}$ minimale parmi ceux qui contient $e$, on dit que $e$ est un élément *distingué* dans $\mathfrak{g}_0$. La décomposition restreint à $\mathfrak{g}^e = \mathfrak{g}^e_- \oplus \mathfrak{g}^e_0 \oplus \mathfrak{g}^e_+$.

On n'a pas une décomposition triangulaire pour algèbre $U(\mathfrak{g}, e)$. On considère l'idéal à gauche $U(\mathfrak{g}, e)_\sharp$(resp. l'idéal à droite $U(\mathfrak{g}, e)_\flat$) engendré par $\mathfrak{g}^e_+$(resp. $\mathfrak{g}^e_-$). Soit $U(\mathfrak{g}, e)_0$ la sous-algèbre de $U(\mathfrak{g}, e)$ où l'action de $\mathfrak{h}^e$ est triviale. Alors $U(\mathfrak{g}, e)_\sharp \cap U(\mathfrak{g}, e)_0 = U(\mathfrak{g}, e)_\flat \cap U(\mathfrak{g}, e)_0$ est un idéal bilatère dans $U(\mathfrak{g}, e)_0$. Notons le par $U(\mathfrak{g}, e)_{0,\sharp}$. Ce qui est remarquable est que le quotient $U(\mathfrak{g}, e)_0/U(\mathfrak{g}, e)_{0,\sharp}$ est isomorphe à une autre algèbre $W$ finie $U(\mathfrak{g}_0, e)(\,!)$. Cette algèbre joue le role d'une "sous-algèbre de cartan" pour $U(\mathfrak{g}, e)$. En effet, d'après l'isomorphisme dessus, $U(\mathfrak{g}, e)/U(\mathfrak{g}, e)_\sharp$ devient naturellement un $(U(\mathfrak{g}, e), U(\mathfrak{g}_0, e))$-bimodule. De plus, il est libre comme un $U(\mathfrak{g}_0, e)$-module à droite, avec une base en bijection avec une base de PBW de $U(\mathfrak{g}^e_-)$. Les *modules de Verma* de $U(\mathfrak{g}, e)$ sont paramétrés par l'ensemble $\mathcal{L}$ des représentations de dimension finie de $U(\mathfrak{g}_0, e)$. Pour $V_\Lambda \in \mathcal{L}$, il est défini par $M_\Lambda := U(\mathfrak{g}, e)/U(\mathfrak{g}, e)_\sharp \otimes_{U(\mathfrak{g}_0, e)} V_\Lambda$. Ils possèdent tous les propriétés que l'on a raconté ci-dessus pour les modules de Verma usuels. En particulier, tous les modules simples de dimension finie de $U(\mathfrak{g}, e)$ se réalisent comme le quotient simple d'un unique module de Verma. Donc d'après ces constructions de [BGK], il reste deux problèmes cruciales (ouvertes) pour comprendre les représentations irréductibles de dimension finie de $U(\mathfrak{g}, e)$ :

- paramétrer $\mathcal{L}$, *i.e.* les représentations irréductibles des algèbres $W$ finie $U(\mathfrak{g}_0, e)$ (rappelons que $e$ est distingué dans $\mathfrak{g}_0$).
- paramétrer dans $\mathcal{L}$ ceux qui correspondent aux représentations de dimension finie de $U(\mathfrak{g}, e)$.

Remarque 1.7. *Ces deux problèmes sont résolus en type A par Brundan et Kleshchev (voir [BK]). Leur outils sont les Yangians tronqués. Une propriété importante en type A est que l'élément e n'est jamais distingué dans $\mathfrak{g}$ sauf quand il est régulier. Donc on peut se ramener au cas où $U(\mathfrak{g}_0, e)$ est commutatif. On perd cette propriété en général, par exemple, en type D avec e sous-régulier.*

## 2 Algèbres de Hecke doublement affine rationnelle

**2.1.** Pour introduire les algèbres de Hecke doublement affine, on va d'abord commencer par les algèbres de Hecke.

Soit $G$ un groupe algèbrique sur $\mathbb{C}$, soit $T$ un tore maximal de $G$, le groupe de Weyl de $G$ est le quotient $W = N_G(T)/T$. C'est un groupe fini engendré par les réflexions. À chaque $W$, on peut associer une *algèbre de Hecke* qui dépend un vecteur de paramètres $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^r$. Elles sont définies comme certain quotients des *groupes de tress*. On va l'expliquer dans un exemple, prenons le cas $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a que le groupe $W = \mathfrak{S}_n$. Dans ce cas, le paramètre ne consiste en qu'un seul élément $q \in \mathbb{C}^*$. Le groupe de tresses $B\mathfrak{S}_n$ pour $\mathfrak{S}_n$ est défini par la présentation suivante :

- générateurs : $T_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$
- relations :
  - $T_iT_j = T_jT_i,$ si $|i-j| \geq 2$;
  - $T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}$; pour $1 \leq i \leq n-1$.

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ est le quotient de $B\mathfrak{S}_n$ par les relations $(T_i+1)(T_i-q) = 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$. Elle est une déformation de l'algèbre du groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, qui correspond au cas où $q = 1$.

On a aussi les algèbres de Hecke associées aux groupes de Weyl d'algèbres de Lie affine[4]. Ce sont *algèbres de Hecke affine*, elles possèdent la version *dégénérée* qui resemble à ses algèbres de Lie. Les algèbres de Hecke doublement affine (on l'appellera DAHA en bref) étaient introduites par Cherednik dans [C] pour résoudre la conjecture de Macdonald en terme constante, elles sont donc aussi appelées *les algèbres de Cherednik*. Les DAHA raionnelles que l'on veut introduire sont des algèbres obtenues en faisant deux étapes de dégénéralisations de DAHA. Tous ces algèbres de "Hecke" ci-dessus ont des similarités intrinsèques et des liens entre elles. Certaines des constructions se généralisent aussi au cas où $W$ sont des *groupe de réflexions complexe*.

**2.2.** Pour simplifier, on va exposer la théorie en prenant le cas du type $A$ où $W = \mathfrak{S}_n$, mais avec une tentation de suivre un chemin valable en général. On précisera les résultats qui dépendent des propriétés spécifiques du type $A$. Voici le plan de la suite : On expliquera d'abord la catégorie $\mathcal{O}$ des DAHA rationelles $\ddot{\mathbf{H}}$ en faisant analogie avec les algèbres enveloppantes. On verra une interprétation géométrique de $\ddot{\mathbf{H}}$ via l'opérateur de Dunkl, qui permet de définir un foncteur KZ de la catégorie $\mathcal{O}$ à la catégorie des modules de type finie d'algèbre de Hecke correspondante. En type $A$, la catégorie $\mathcal{O}$ munie ce foncteur généralise la notion d'algèbres de $q$-schur. On s'intéressera au problème de calculer les caractères des $\ddot{\mathbf{H}}$-modules simples dans $\mathcal{O}$, qui est connu en type $A$. Le même problème est intéressant mais sous conjecture dans un autre cas. C'est le cas *cyclotomique*, où $W$ est une type particulier de groupes de réflexions complexes.

**2.3.** Soit $G = GL_n$. Soit $T$ le tore maximal formé des matrices diagonales. Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, on notera par $y_1, \ldots, y_n$ la base standard de $\mathbb{C}^n$. Soit $\mathfrak{h}^*$ le dual de $\mathfrak{h}$, avec $x_1, \ldots, x_n$ la base duale. Le groupe de Weyl $W = \mathfrak{S}_n$. Les réfexions de $\mathfrak{S}_n$ sont des transpositions $s_{ij} = (i, j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Notons $\mathcal{S}_e$ l'ensemble des réflexions.

[4] Ce sont les algèbres de Lie obtenues en considérant les algèbres de boucles associées aux algèbres de Lie en dimension finie. Elles sont de dimension infinie, mais possèdent des bonne structures parallèles à celles de dimension finie

On notera $s_i = s_{i,\,i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Soit $v_s$ (resp. $\alpha_s$) un vecteur propre de valeur propre $-1$ de $s$ dans $\mathfrak{h}$(resp. $\mathfrak{h}^*$), par exemple, $v_s = y_i - y_j$, $\alpha_s = x_i - x_j$ pour $s = s_{ij}$. Soit $t,\, c \in \mathbb{C}$ deux paramètres. Le DAHA rationnelle $\ddot{\mathbf{H}}_{t,\,c}$ associée à $\mathfrak{S}_n$ est le quotient de l'algèbre $T(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*) \rtimes \mathfrak{S}_n$ par les relations :

$$[x,\, x'] = 0, \quad [y,\, y'] = 0, \text{ pour tout } x,\, x' \in \mathfrak{h}^*,\ y,\, y' \in \mathfrak{h}.$$

$$[y,\, x] = t\langle y,\, x\rangle - 2\sum_{s \in \mathcal{S}_e} c\frac{\langle y,\, \alpha_s\rangle\langle v_s,\, x\rangle}{\langle v_s,\, \alpha_s\rangle}s.$$

Remarque 2.1. *En général, le paramètre $c$ est une application de l'ensemble $\mathcal{S}/W$ à $\mathbb{C}$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de réflexions de $W$. Ici $\mathfrak{S}_n$ agit transitivement sur $\mathcal{S}$. Donc on n'a qu'un seul $c$.*

On définit une filtration sur $\ddot{\mathbf{H}}_{t,\,c}$ en posant $\deg(x) = \deg(y) = 1$, et $\deg(w) = 0$ pour $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{h}^*$, $w \in \mathfrak{S}_n$ dans $T(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*) \rtimes \mathfrak{S}_n$. On a le théorème de PBW pour $\ddot{\mathbf{H}}_{t,\,c}$, *i.e.* l'anneau gradué associé à la filtration ci-dessus est $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$.

La comportement des DAHA rationnelles pour $t = 0$ et $t \neq 0$ sont très différente. On s'intéresse au cas où $t \neq 0$. Comme $\ddot{\mathbf{H}}_{t,\,c} \simeq \ddot{\mathbf{H}}_{1,\,t^{-1}c}$, on va supposer $t = 1$ et noter $\ddot{\mathbf{H}}_{1,\,c}$ par $\ddot{\mathbf{H}}_c$.

**2.4.** Avant d'introduire la catégorie $\mathcal{O}$ de $\ddot{\mathbf{H}}_c$, faisons quelques rappels sur la catégorie $\mathcal{O}$ d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Fixons une décomposition triangulaire $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}_+)$, la catégorie $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ est une sous-catégorie pleine de $U(\mathfrak{g})$-**mod** tel que $M$ satisfasse les conditions suivantes :

- Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, soit $M_\lambda := \{m \in M|\, hm = \lambda(h)m, \ \text{ pour } h \in \mathfrak{h}\}$. On a $M = \oplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} M_\lambda$.
- l'action de $\mathfrak{n}_+$ sur $M$ est localement nilpotente.

Cette catégorie était introduite et étudiée par Bernstern, Gelfand, Gelfand dans [BGG]. On donne une brève description sur sa structure. D'abord, soit $Z(U\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$. Soit $\mathcal{C} := \mathrm{Hom}_{alg}(Z(U\mathfrak{g}), \mathbb{C})$ l'ensemble des caratères centraux. On décompose les modules de $\mathcal{O}$ en sommes directes des sous-espaces propres généralisés de $Z(U\mathfrak{g})$ de valeurs propres $\theta \in \mathcal{C}$(*i.e.* le sous-espace où l'action de $z - \theta(z)$ est localement nilpotent.) On a ainsi une décomposition de catégories

$$\mathcal{O}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\theta\in\mathcal{C}} \mathcal{O}_\theta.$$

Chaque $\mathcal{O}_\theta$ est Morita-équivalente à la catégorie de modules d'une algèbre de dimension finie. En particulier, elle n'a qu'un nombre fini d'objets simples et chaque élément de $\mathcal{O}_\theta$ possède une série de Jordan-Hölder. Les objets simples de $\mathcal{O}_\theta$ sont des quotients simples $L_\lambda$ de certain modules de Verma $M_\lambda$. De plus, les poids $\lambda$ tels que $L_\lambda \in \mathcal{O}_\theta$ forment une $W$-orbite $\Lambda$ dans $\mathfrak{h}^*$. Le point important est qu'en posant un ordre partiel $\prec$ sur $\Lambda$ : $\lambda \prec \lambda' \Leftrightarrow M_\lambda \subset M'_\lambda$, on a les propriétés suivantes de $\mathcal{O}_\theta$.

Proposition 2.2.
1. *Soit $K_\lambda$ l'unique sous-module maximal de $M_\lambda$. Tous les facteurs de Jordan-Hölder de $K_\lambda$ sont de la forme $L_\mu$ avec $\mu \prec \lambda$.*
2. *Soit $P_\lambda$ l'enveloppe projective de $L_\lambda$ dans $\mathcal{O}_\theta$ (c'est l'unique module projectif indécomposable tel que $L(\lambda)$ soit un quotient de $P_\lambda$). Alors on a un morphisme*

*surjective $P_\lambda \to M_\lambda$. De plus, son noyau admet une filtration par les sous-modules tels que leurs quotients successifs soient des $M_\mu$ avec $\mu \in \Lambda$ et $\mu \succ \lambda$ (On dit aussi qu'il est filtré par les $M_\mu$).*

On peut déduire nombreuse propriétés de la catégorie $\mathcal{O}_\theta$ d'après les propriétés ci-dessus, par exemple, on a des énoncés duaux pour les enveloppes injectives $I_\lambda$ de $L_\lambda$. Pour $\lambda,\ \mu \in \Lambda$, notons $(P_\lambda : M_\mu)$ la multiplicité de $M_\mu$ dans la filtration de $P_\lambda$ par les modules de Vermas, et $[M_\mu : L_\lambda]$ la multiplicité de $L_\lambda$ dans la série de Joran-Hölder de $M_\mu$, alors on a la remarquable *BGG-réciprocité* : $(P_\lambda : M_\mu) = [M_\mu : L_\lambda]$.

Plus tard, E. Cline, B. Parshall et L. L. Scott ont crées une notion des *catégories de plus haut poids*(voir [CPS]), qui fournie un cadre général pour étudier les catégories ayant des structures similaires que celles de $\mathcal{O}_\theta$. Ce cadre comprend d'autre catégories de modules pour des algèbres qui étaient naturellement apparues auparavant, par exemple, les *algèbres de schur*. Il permet de généraliser la notion de catégorie $\mathcal{O}$ à d'autre algèbres en analogie avec $U(\mathfrak{g})$, par exemple, les DAHA rationnelles. Une catégorie de plus haut poids est définie comme suit : Soit $A$ une algèbre de dimension finie. On note $\mathrm{Irr}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des $A$-modules simples. Étant donnée un ordre partiel $\prec$ sur $\mathrm{Irr}(A)$, on définit d'une certain façons les *modules standards*, qui remplacent le rôle des modules de Verma, et ses versions duales les *modules costandards* dans $A$-**mod** (Dans le cas de $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$, ils sont aussi les modules de Verma). On dit que $A$-**mod** avec $(\mathrm{Irr}(A), \prec)$ est *de plus haut poids* si les deux conditions dans la proposition 2.2 sont satisfaites pour les modules standards. On dit aussi que l'algèbre $A$ est *quasi-héréditaire*. On appelle parfois $\mathrm{Irr}(A)$ les *poids dominants* de $A$.

**2.5.** Dans $\ddot{\mathbf{H}}_c$, on a un élément particulier

$$\mathbf{eu} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - c \sum_{s \in \mathcal{S}} (s-1).$$

qui a la propriété

$$[\mathbf{eu},\, y] = -y;\ [\mathbf{eu},\, x] = x;\ [\mathbf{eu},\, w] = 0 \text{ pour } y \in \mathfrak{h},\ x \in \mathfrak{h}^*,\ w \in \mathfrak{S}_n.$$

Donc **eu** induit un graduation sur $\ddot{\mathbf{H}}_c$, et la décomposition triangulaire correspondante est $\ddot{\mathbf{H}}_c = \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$. La catégorie $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ consiste en des $\ddot{\mathbf{H}}_c$-modules de type fini avec l'action de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ localement nilpotente. Elle était introduite dans [GGOR]. Remarquons que l'action de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ est automatiquement semi-simple. Soit $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$. Soit $E \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$, on considère le module induit $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \rtimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_n}^{\ddot{\mathbf{H}}_c} E$, où $E$ est vu comme un $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \rtimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$-module muni l'action de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ triviale. Notons ce module par $\Delta(E)$. Il est facile de voir qu'il a un unique quotient simple, on le note par $L(E)$. Il se trouve que tous les objets simples dans $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ peuvent être ainsi obtenus. De plus, la catégorie $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ a assez d'objets projectifs. D'ailleurs, l'élément **eu** agit sur le sous ensemble $E$ de $\Delta(E)$ par un scalaire $c_E$. On définit un ordre partiel $\prec_c$ sur $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ par $E \prec_c F \Leftrightarrow c_F - c_E$ est un entier positif. Il est démontré dans [GGOR] la catégorie $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ avec $(\mathrm{Irr}(\mathfrak{S})_n, \prec_c)$ est de plus haut poids. Les standard objets sont $\Delta(E)$. Remarquons que contrairement au $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$, le module costandard $\nabla(E)$ dans $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ n'est pas isomorphe aux $\Delta(E)$. Il est défini comme le sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \rtimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_n}(\ddot{\mathbf{H}}_c,\, E)$ où l'action de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ est localement fini. Il a un unique sous-module simple qui est $L(E)$.

Remarque 2.3. *Si on veux comparer $\ddot{\mathbf{H}}_c$ avec algèbres enveloppante $U(\mathfrak{g})$, l'analogie du paramètre $c$ serait un caractère central $\eta$ de $U(\mathfrak{g})$. Donc $\ddot{\mathbf{H}}_c$ est en effet plus proche à $U(\mathfrak{g})_\eta := U(\mathfrak{g}) \otimes_{Z(g)} \mathbb{C}_\eta$.*

**2.6. Le foncteur de Knizhnik-Zamolodchikov** L'intéret principal de [GGOR] pour $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ est de le lier aux catgories des modules d'algèbres de Hecke par un foncteur KZ. Pour cela, on a besoin d'un point de vu géométrique pour les DAHA rationelles. Comme $\ddot{\mathbf{H}}_c$ est une $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$-algèbre, on peut la voir comme un faisceau d'algèbre sur $\mathfrak{h}$. On note $\mathfrak{h}^{reg}$ l'ouvert de $\mathfrak{h}$ obtenu en enlevant tous les hyperplanes fixés par une des reflections de $\mathfrak{S}_n$. Soit $\mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{h}^{reg}$. On a une action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})$. Pour chaque $y \in \mathfrak{h}$, *l'opérateur de Dunkl* est l'élément

$$T_y = \partial_y + c \sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\alpha_s(y)}{\alpha_s}(s-1)$$

dans $\mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg})$. Ce sont les déformations des opérateurs différentiels partiels, ce qui est remarquable est qu'ils commutent entre eux et le morphisme $y \mapsto T_y$ donne un isomorphisme d'algèbres $\ddot{\mathbf{H}}_c \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^{reg}] \simeq \mathcal{D}(\mathfrak{h}^{reg}) \rtimes W$. En particulier, tous les modules dans $\mathcal{O}$ vu comme faisceaux cohérents sur $\mathfrak{h}$ sont ainsi des $\mathcal{D}$-modules $W$-équivariants après localisés en $\mathfrak{h}^{reg}$. Par les théories en $\mathcal{D}$-modules, cela implique que au-dessus de $\mathfrak{h}^{reg}$ ils sont des faisceaux localement libre $W$-équivariants munis d'une connexion plats avec des singularités régulières. D'après la correspondance de Riemann-Hilbert à la Deligne, la catégorie des faisceaux avec ces propriétés est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie du groupe fondamentale $\pi_1(\mathfrak{h}^{reg}/\mathfrak{S}_n, x_0)$, où $x_0$ est un points dans $\mathfrak{h}^{reg}$. Or ce groupe est en effet le groupe de tress $B\mathfrak{S}_n$ d'après une autre définition dûe à Artin. On peut démontrer que les objets de $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ correspondent aux représentations de $B\mathfrak{S}_n$ telles que l'action se factorise par l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ avec $q = e^{2\pi i c}$. On obtient ainsi un foncteur exacte

$$\mathrm{KZ} : \mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c) \to \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)\textbf{-mod}.$$

Il induit une équivalence de catégories $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)/\mathcal{O}^{tor} \simeq \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$**-mod**, où $\mathcal{O}^{tor}$ consiste en des modules de $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ supportés en $\mathfrak{h}\backslash\mathfrak{h}^{reg}$. Le foncteur KZ possède des bonnes propriétés homologiques. Une des plus importantes est le suivante : soit $\mathcal{O}^\Delta$ la sous-catégorie des modules filtrés par les standards, alors KZ restreint à $\mathcal{O}^\Delta$ est un foncteur pleinement fidèle. De plus, si $c \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Ext}^1(M, N) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathrm{KZ}(M), \mathrm{KZ}(N))$ pour $M, N \in \mathcal{O}^\Delta$.

Remarque 2.4. *Ici la condition $c \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ est la traduction en type $A$ d'une condition sur paramètres en cas générale pour que la propriété soit vrai.*

**2.7.** Le foncteur KZ offert un autre point de vu pour $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$. C'est de le voir comme une généralisation des algèbres de $q$-schur.

Les algèbres de $q$-schur sont des analogues quantiques des algèbres de schur classiques. L'intéret de ces algèbres vient de la dualité de Schur-Weyl quantique entre $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$. En particulier, elles sont spécifiques aux type $A$. Elles peuvent être définies comme suit : On identifie naturellement $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ avec l'ensemble des partitions de $n$
$\mathrm{Part}(n) := \{\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r) | \lambda_i \in \mathbb{Z}(\text{ pour } 1 \leq i \leq r), \sum_{i=1}^r \lambda_i = n\}$. Soit $\mathcal{H}_q(\lambda)$ la sous algèbre de $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ engendrée par les $T_1, \ldots, T_{\lambda_1 - 1}, T_{\lambda_1+1}, \ldots, T_{\lambda_1+\lambda_2-1}, \ldots$. Elle

est isomorphe aux $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_{\lambda_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_{\lambda_r})$. Soit $M(\lambda) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_q(\lambda)}^{\mathcal{H}_q}(\mathbb{C})$. Soit $d_\lambda$ le nombre de $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ dont l'ensemble sous-jacent est le même que $\lambda$ en comptant multiplicité. On considère le $\mathcal{H}_q$-module projectif $M := \bigoplus_\lambda M(\lambda)^{d_\lambda}$, et définit $S_q(n) := \mathrm{End}_{\mathcal{H}_q}(M)$. La catégorie $S_q(n)$**-mod** est de plus haut poids, avec l'ensemble des poids dominants $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ muni d'un ordre partiel $\lhd$ tel que $\lambda \lhd \mu \Leftrightarrow \sum_{j=1}^i \lambda_j < \sum_{j=1}^i \mu_j$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par cette définition, il y un foncteur exact naturel $M \otimes - : S_q(n)\textbf{-mod} \to \mathcal{H}_q\textbf{-mod}$.

Il a été conjecturé dans [GGOR] que la catégorie $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ est équivalente à $S_q(n)$**-mod** en type $A$. Cela était démontrée par Raphaël Rouquier dans [R] en developpant une théorie générale pour l'unicité des revêtements de plus haut poids pour $\mathcal{H}_q$**-mod**. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de plus haut poids, qui admet un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{H}_q\textbf{-mod}$. On dit que $F$ et 1-*pleinement fidèle* si pour tout $M,\, N \in \mathcal{C}^\Delta$, on a $\mathrm{Ext}^k(M,\, N) = 0$ pour $k = 0,\, 1$. On dit que $(\mathcal{C},\, F)$ est un *revêtement de plus haut poids* 1-*pleinement fidèle* de $\mathcal{H}_q$**-mod**.

Théorème 2.5. *Soient* $(\mathcal{C}_1,\, F_1)$ *avec* $(\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n),\, \prec_1)$, $(\mathcal{C}_2,\, F_2)$ *avec* $(\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n),\, \prec_2)$ *deux revêtements de plus haut poids* 1*-pleinement fidèles de* $\mathcal{H}_q$***-mod****. Supposons que l'ordre partiel* $\prec_1$ *soit plus fin que* $\prec_2$*. Alors il existe un foncteur* $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ *qui est une équivalence de revêtements de plus haut poids de* $\mathcal{H}_q$***-mod****. De plus, il envoie un module standard* $\Delta(E)$ *de* $\mathcal{C}_1$ *sur le module standard correspondant dans* $\mathcal{C}_2$*.*

Il se trouve que si $(q + 1)(q^2 + q + 1) \neq 0$, $(S_q(n), M \otimes -)$ est un revêtements de plus haut poids 1-pleinement fidèle de $\mathcal{H}_q$**-mod**. De même pour $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ si $c \neq \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Si en plus, $c \leq 0$, alors l'ordre $\prec_c$ de $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ est plus fin que l'ordre $\lhd$ de $S_q(n)$**-mod**. Donc d'après le théorème, sous ces conditions de paramètres, on a léquivalence de catégories de plus haut poids voulue.

D'ailleurs, il est une conséquence directe du théorème 2.5 que pour $c \notin \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ les catégories $\mathcal{O}_c$ et $\mathcal{O}_{c+1}$ sont équivalentes comme les revêtements de plus haut poids. Compte tenu le fait que le paramètre $c$ de $\ddot{\mathbf{H}}_c$ est un logarithm de $q$, ceci montre une unicité de $\mathcal{O}$ par rapport aux algèbres de Hecke $\mathcal{H}_q$. En type $A$, ce résultat était premièrement obtenu par Gordon et Stafford.

**2.8.** Un problème important pour les DAHA rationelles est de calculer les caractères des modules simples dans $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$. Soit $M \in \mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$, on met une graduation sur $\ddot{\mathbf{H}}_c$ par les poids de **eu**, alors $M$ se décompose en une sommes directe finie de $\ddot{\mathbf{H}}_c$-modules gradué $M = \oplus M^\alpha$. Pour un module gradué $M^\alpha = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i^\alpha$, son caractère

$$\chi_{M^\alpha} := \sum_{i \in \mathbb{Z},\, E \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)} \mathrm{mult}(M_i^\alpha,\, E) z^i \chi_E,$$

où $\chi_E$ est caractère de $E$ en tant que $\mathfrak{S}_n$-module, et $z$ est une variable formelle. Les modules standards sont des modules gradués isomorphes à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes_{\mathbb{C}} E$ en tant que $\mathfrak{S}_n$-modules, leurs caractères sont faciles à calculer. D'autre part,les caractères sont encore bien définis au niveau du groupe de Grothendieck $K(\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c))$. Les classes des modules simples $\{L(E);\ E \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)\}$ et les classes des modules standards $\{\Delta(E);\ E \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)\}$ forment deux bases d'espace vectoriel de $K(\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c))$. Donc on a $[\Delta(E)] := \sum_F d_{EF}[L(F)]$, avec $d_{EF} \in \mathbb{Z}$. D'après la strucutre de la catégorie $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$, en fixant un ordre total sur $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ qui respecte l'ordre partiel, la matrice $(d_{EF})$ est unipotente triangulaire. Donc une fois que l'on connaît les multiplicités $[\Delta(E) : L(F)] = d_{EF}$ pour tout $E,\, F \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$, on saurait l'inverse de la matrice $(d_{EF})$, ainsi que les caractères de modules simples. Donc le problème revient à déterminer la matrice $(d_{EF})$, que l'on appelle souvent *la matrice de décomposition.*

Dans le cas de $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$, les coefficients de la matrice de décomposition $(d_{\lambda\mu})$ sont données par les valeurs en 1 des *polynômes de Kazhdan-Lusztig* $P_{\lambda\mu}(x)$. C'est la fameuse conjecture de Kazhdan-Lusztig, qui a été résolue indépendemment par Beilinson-Bernstein et par Brylinski-Kashiwara.

Dans notre situation, si le paramètre $q = e^{2\pi ic}$ n'est pas une racine de l'unité non-triviale, la catégorie $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ est semi-simple. En particulier, tous les modules standards sont seimple, donc le problème est trivial.

On s'intéresse donc au cas où $q$ est une $l$-ième racine de l'unité pour $2 \leq l \in \mathbb{N}$, donc on peut supposer $c = \frac{r}{l} \in \mathbb{Q}$ pour $r \in \mathbb{Z}_{<0}$, $(r, l) = 1$. Dans ce cas, le même problème pour les algèbres de $q$-schur a été résolu par Varagnolo-Vasserot (voir [VV]) en confirmant une conjecture de Leclerc-Thibon(voir [LT]) qui lie le problème avec la base canonique de l'espace de Fock. Les coeffients de matrice de décomposition sont donnée par le valeurs en 1 de certains polynômes parabolique de Kazhdan-Lusztig. Donc d'après la section précédente, la catéogie $\mathcal{O}(\ddot{\mathbf{H}}_c)$ pour $c \neq \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ possède la même matrice de décomposition.

**2.9.** En dehors du type $A$, le problème est mal connu. Cependant, il y a un cas où l'idée de la méthode en type $A$ s'adapte encore. C'est le cas *cyclotomique*,où $W$ est un groupe de réflexion complexe $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mu_d)^n$, avec $\mu_d$ le groupe des $d$-ième racines de l'unité. Les algèbres de $q$-schur cyclotomiques ont été introduites par Dipper, James et Mathas dans [DJM]. L'équivalence de catégories entre $O(\ddot{\mathbf{H}}_c(W))$ et la catégorie de modules des algèbres de $q$-schur cyclotomique sous certaines conditions sur les paramètres était établie en même temps que pour le type $A$ dans [R]. Une conjecture parallèle à celle de Leclerc-Thibon concernant à calculer la matrice de décomposition d'algèbres de $q$-schur cyclotomiques via l'espace de Fock de niveau supérieure était fait dans [Y] par Yvonne. Mais cette conjecture n'est pas encore résolue.

## Références


[BK] J. Brundan, A. Kleshchev, Representations of shifted Yangians and finite $W$-algebras, prépublication, *arXiv : math/0508003v3.*

[BGG] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, A certain category of $\mathfrak{g}$-modules,(Russian) *Funkcional. Anal. i Prilozen.* **10** (1976), no. 2, 1–8.

[BGK] J. Brundan, S. Goodwin, A. Kleshchev, Highest weight theory for finite $W$-algebras, *arXiv : math/08011337v1.*

[C] I. Cherednik, Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures, *Ann. of Math.*(2) **141** (1995), no. 1, 191C216.

[CH] W. Crawley-Boevey, M. P. Holland, Noncommutative deformations of Kleinian singularities, *Duke Math. J.* **92** (1998), 605–635.

[CPS] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, Finite-dimensional algebras and highest weight categories, *J. Reine Angew. Math.* **391** (1988), 85–99.

[DJM] R. Dipper, G. James, A. Mathas, Cyclotomic $q$-Schur algebras. *Math. Z.* **229** (1998), no. 3, 385–416.

[GG] W. L. Gan and V. Ginzburg, Quantization of Slodowy slices, *Internat. Math. Res. Notices* **5** (2002), 243–255.

[GGOR] V. Ginzburg, N. Guay, E. Opdam, R. Rouquier, On the category $\mathcal{O}$ for rational Cherednik algebras, *Invent. Math.* **154** (2003), no.3, 617–651.

[K] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.* **85** (1963), 327–404

[LT] B. Leclerc, J. Thibon, Canonical bases of $q$-deformed Fock spaces, *Internat. Math. Res. Notices* 1996, no. 9, 447–456.

[P1] A. Premet, Special transverse slices and their enveloping algebras, *Adv. in Math.* **170** (2002), 1–55.

[P2] A. Premet, Enveloping algebras of Slodowy slices and the Joseph ideal, *J. Eur. Math. Soc.* **9** (2007), 487–543.

[P3] A. Premet, Primitive ideals, non-restricted representations and finite $W$-algebras, *Mosc. Math. J.* **7** (2007), no.4, 743–762.

[R] R. Rouquier, $q$-Schur algebras and complex reflection groups, I *arXiv : math/0509252v2*.

[S] S. Skryabin, A category equivalence, appendice à [P1].

[Sl] P. Slodowy, Simple singularities and simple algebraic groups, *Lecture Notes in Mathem.*, **815**, Springer Verlag, 1980.

[VV] M. Varagnolo, E. Vasserot, On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra, *Duke Math. J.* **100** (1999), no.2, 267–297.

[Y] X. Yvonne, A conjecture for $q$-decomposition matrices of cyclotomic $v$-Schur algebras, *J. Algebra* **304** (2006), no.1, 419–456.