

FLOT DE RACCOURCISSEMENT DES COURBES

ANTOINE SONG SALIM TAYOU

EXPOSÉ DE PREMIÈRE ANNÉE AU DMA
SOUS LA DIRECTION D'OLIVIER BIQUARD

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.....	1
1. Résultats préliminaires.....	4
1.1. Inégalités isopérimétriques.....	4
1.2. Propriétés simples du flot.....	4
1.3. Conséquences d'une borne sur la courbure.....	7
2. Un théorème de Gage.....	11
3. Le théorème de Gage et Hamilton.....	15
3.1. Existence en temps court.....	16
3.2. Existence en temps long.....	19
3.3. Comportement asymptotique des courbes.....	23
4. Le théorème de Grayson : une preuve de Huisken.....	28
4.1. Un lemme de monotonie.....	28
4.2. Classification des singularités.....	33
4.3. La preuve de Huisken.....	39
5. Vers une généralisation des résultats.....	43
Références.....	43

INTRODUCTION

Considérons une famille de courbes fermées $F(u, t)$ plongées dans \mathbb{R}^2 , où $(u, t) \in \mathbb{S}^1 \times [0, T)$ avec $T > 0$. On suppose ces courbes orientées dans le sens direct. On note s l'abscisse curviligne, c'est-à-dire $ds = v du$ où $v = |\partial F / \partial u|$ à t fixé, $T = \partial F / \partial s$ le vecteur tangent et N la normale pointant vers l'intérieur. Le réel k tel que $kN = \partial^2 F / \partial s^2$ est

Date: 12 Juin 2013.

appelé la courbure. La famille $F(u, t)$ est appelée solution du flot de raccourcissement des courbes si elle vérifie :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F = kN \\ F(u, 0) = F_0(u) \end{cases}$$

où F_0 est une courbe plongée lisse. Ce flot peut être interprété comme le gradient de la fonctionnelle longueur. En effet, soit C l'espace vectoriel des courbes lisses fermées et $C_0 \subset C$ l'ensemble des courbes lisses fermées et plongées. Notons $L : C \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle qui à une courbe associe sa longueur. Soit F et h des éléments respectivement de C_0 et C . On considère C comme l'espace tangent $T_F C_0$ en F et on le munit du produit scalaire suivant :

$$\forall h_1, h_2 \in C, \quad \langle h_1, h_2 \rangle_F = \int_0^{2\pi} \langle h_1, h_2 \rangle v du = \int_F \langle h_1, h_2 \rangle ds.$$

Alors pour tout $h \in C$:

$$\begin{aligned} L(F + th) &= \int_0^{2\pi} \left(\left\langle \frac{d}{du}(F + th), \frac{d}{du}(F + th) \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= L(F) + t \int_0^{2\pi} \frac{1}{v} \left\langle \frac{d}{du} F, \frac{d}{du} h \right\rangle du + o(|t|). \end{aligned}$$

Or, grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{v} \left\langle \frac{d}{du} F, \frac{d}{du} h \right\rangle du &= \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{d}{ds} F, \frac{d}{du} h \right\rangle du \\ &= - \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{d}{du} \frac{d}{ds} F, h \right\rangle du \\ &= - \int_0^{2\pi} \left\langle v \frac{d^2}{ds^2} F, h \right\rangle du \\ &= \langle -kN, h \rangle_F. \end{aligned}$$

Pour la norme L^2 sur l'espace tangent, la fonctionnelle L est donc Gâteaux-différentiable et si l'on note $\nabla_F L$ le vecteur gradient de L en F , l'équation 1 devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} F = -\nabla_F L.$$

Cette équation peut être vue comme une sorte d'équation de la chaleur géométrique : nous verrons d'ailleurs que c'est un problème parabolique et qu'une unique solution existe en temps court. D'un autre côté, ce problème est assez différent de l'équation de la chaleur classique car si l'on réécrit l'équation d'évolution ainsi :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial F}{\partial u} \right),$$

on constate que l'opérateur de droite dépend de la courbe et n'est pas linéaire.

Les motivations pour l'étude du flot de raccourcissement sont d'abord venues de problèmes de la Physique faisant intervenir des énergies de surface. Puis un nouvel intérêt est apparu en vue d'applications géométriques, en analogie avec le flot de Ricci : tout comme le flot de Ricci permet d'obtenir certaines métriques à la limite, on espère, en laissant agir le flot de raccourcissement, récupérer des objets tels que des géodésiques ou des surfaces minimales en dimension supérieure.

En 1986, Gage et Hamilton montrent qu'étant donnée une courbe plane lisse plongée fermée et convexe, il existe une unique solution au flot de raccourcissement et elle converge vers un point en temps fini, de sorte que la forme des courbes devient asymptotiquement circulaire de manière C^∞ . Grayson généralise ce résultat un an plus tard au cas des courbes initiales non nécessairement convexes. Enfin en 1998, Huisken propose une nouvelle preuve du théorème de Grayson qui se base sur une classification des singularités pouvant apparaître au cours du flot. Il est à noter que le théorème de Gage et Hamilton admet une version en dimension supérieure, qui concerne le flot de la courbure moyenne (il a été prouvé par Huisken), mais que le théorème de Grayson n'est pas généralisable en dimension supérieure (considérer par exemple dans \mathbb{R}^3 un sablier avec un cou fin et long : le flot s'arrêtera avant que cette surface ne devienne un point).

Dans la première partie seront présentés des inégalités géométriques et des résultats généraux concernant le flot de raccourcissement. La partie suivante est consacrée à des résultats dus à Gage : ils constituent une première étape vers le théorème de Gage et Hamilton, dont la preuve fera l'objet de la troisième partie. Dans un dernier temps, nous étudierons l'approche de Huisken concernant le théorème de Grayson, sans toutefois pouvoir donner toutes les preuves.

Remerciements :

Nous tenons à remercier Olivier BIQUARD pour sa disponibilité, ses conseils importants et ses nombreuses explications.

1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1. Inégalités isopérimétriques. Dans ce paragraphe seront présentées des inégalités que l'on utilisera dans les parties 2 et 3. Soit γ une courbe du plan simple fermée C^1 , on note L et A sa longueur et l'aire du domaine borné qu'elle délimite. r_{int} désigne le rayon inscrit, c'est-à-dire la borne supérieure des réels r tels qu'il existe un disque de rayon r inclus dans la partie bornée délimitée par la courbe et r_{ext} est défini de façon analogue avec un disque incluant l'aire délimitée par la courbe.

Voici l'inégalité isopérimétrique classique :

Proposition 1.1.

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

Les estimations suivantes sont du type "inégalités de Bonnesen", qui sont de la forme :

$$L^2 - 4\pi A > B$$

où B est une fonction positive qui s'exprime en fonction de quantités géométriques et qui s'annule si et seulement si la courbe est un cercle.

Proposition 1.2 (Inégalités de Bonnesen [13]).

- (1) Si r vérifie $r_{int} \leq r \leq r_{ext}$ alors $rL - A - \pi r^2 \geq 0$.
- (2) $L^2 - 4\pi A \geq \pi^2(r_{ext} - r_{int})^2$.
- (3) $L^2 - 4\pi A \geq (L - 2\pi r_{int})^2$.

1.2. Propriétés simples du flot. Rappelons à présent les notions fondamentales étudiées par la suite. Soit $F(u, t)$ une famille de courbes fermées plongées dans le plan, orientées positivement ; s est l'abscisse curviligne, $T(s)$ et $N(s)$ représentent respectivement le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal à la courbe en s pointant vers l'intérieur de la courbe. L et A désignent respectivement la longueur de la courbe et l'aire renfermée par celle-ci. On note k la courbure ($k(s)N(s) = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$). Etant donnée une courbe, r_{int} désigne le rayon inscrit et r_{ext} le rayon circonscrit. Enfin définissons la fonction support d'une courbe simple fermée $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $p(s) = \langle \gamma(s), -N(s) \rangle$.

On rappelle les formules utiles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u}, & \frac{\partial T}{\partial u} &= vkN, \\ \frac{\partial N}{\partial u} &= -vkT \quad (\text{équations de Frénet}), \\ k &= \frac{\partial \theta}{\partial s} \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle entre l'axe des } x \text{ et le vecteur tangent } T. \end{aligned}$$

Dans toute cette partie, on supposera qu'il existe une solution de 1 à court terme, c'est-à-dire qu'il existe un $t_0 > 0$ et une famille de courbes $F(u, t)$ tels que 1 est vérifiée pour tout $t \in [0, t_0)$ (et où F est C^∞ en les deux variables). Les lemmes suivants vont être utilisés par la suite :

Lemme 1.3. *La dérivée partielle de v par rapport à t est donnée par*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -k^2 v.$$

Démonstration. En utilisant les équations de Frénet et le fait que les variables u et t sont indépendantes, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle vT, \frac{\partial}{\partial u} (kN) \right\rangle = 2 \left\langle vT, \frac{\partial k}{\partial u} N - vk^2 T \right\rangle = -2v^2 k^2. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.4.

(1) *Une formule permettant d'échanger des dérivations :*

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} + k^2 \frac{\partial}{\partial s}.$$

(2) *Deux égalités liant la tangente et la normale :*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s} N \text{ et } \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial s} T.$$

(3) *Une formule reliant θ et la courbure k :*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial s}.$$

Démonstration.

(1) On écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} = k^2 \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} = k^2 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t}$$

(2) Pour la première équation on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} + k^2 \frac{\partial F}{\partial s} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (kN) + k^2 T = \frac{\partial k}{\partial s} N - k^2 T + k^2 T. \end{aligned}$$

La seconde équation découle de

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle T, N \rangle = \left\langle \frac{\partial k}{\partial s} N, N \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle$$

car $\partial N / \partial t$ est orthogonal à N .

(3) On écrit $T = (\cos \theta, \sin \theta)$ et on utilise (2).

□

Lemme 1.5. *L'évolution de la longueur L de la courbe est donnée par*

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \int k^2 ds.$$

Démonstration. En effet

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} v du = - \int_0^{2\pi} k^2 v du = - \int_0^L k^2 ds,$$

ce qui conclut la preuve. Cette égalité est également conséquence de l'interprétation de l'équation comme le flot du gradient de la longueur.

□

Lemme 1.6. *L'aire A délimitée par une courbe simple fermée γ est égale à $\frac{1}{2} \int_0^L p(s) ds$.*

Démonstration. La formule de Green-Riemann donne :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \gamma, vN \rangle du = \frac{1}{2} \int_0^L p(s) ds.$$

□

Lemme 1.7. *Supposons que les courbes $F(\cdot, t)$ restent simples pour tout $t \in [0, t_0)$. Alors l'évolution de l'aire A délimitée par les courbes est donnée par $\partial A / \partial t = -2\pi$.*

Démonstration. Dans la preuve du lemme précédent, on a calculé :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle F, vN \rangle du \text{ donc} \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{-1}{2} \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, vN \right\rangle + \left\langle F, \frac{\partial v}{\partial t} N \right\rangle + \left\langle F, v \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle du \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^{2\pi} vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \left\langle F, -\frac{\partial k}{\partial u} T \right\rangle du \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^{2\pi} vk - \langle F, vk^2 N \rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}, kT \right\rangle + \langle F, vk^2 N \rangle du \\ &= - \int_0^{2\pi} vk du = -2\pi \end{aligned}$$

car la courbe est simple. \square

Lemme 1.8. *La courbure vérifie l'équation suivante :*

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3.$$

Démonstration. Utilisons la formule $\partial\theta/\partial s = k$ puis les points (1) et (3) du lemme 1.4 :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial s \partial t} + k^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial^2 k}{\partial s^2} + k^3.$$

\square

1.3. Conséquences d'une borne sur la courbure.

1.3.1. Les dérivées supérieures restent bornées.

Proposition 1.9. *Soit $F : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ une famille de courbes solution de l'équation du flot de raccourcissement 1. Si $|k(u, t)| < C$ sur $[0, T)$ alors pour tout $m \geq 0$ il existe $C(m) < \infty$ tel que*

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial s^m} k \right| \leq C(m) \text{ sur } [0, T)$$

et $C(m)$ ne dépend que de m , C et la courbe initiale $F(\cdot, 0)$.

Démonstration. Montrons d'abord par récurrence que pour tout $m \geq 0$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(k^{(m)}) = k^{(m+2)} + P_m(k, k', \dots, k^{(m)})$$

où $k^{(m)}$ désigne la m -ième dérivée en s de k et P_m est un polynôme à $m + 1$ variables de degré 1 en $k^{(m)}$. Pour $m = 0$, l'égalité découle du lemme 1.8. Supposons le résultat vrai pour $m \geq 0$. Alors on peut écrire en utilisant le lemme 1.4 (1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(k^{(m+1)}) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}(k^{(m+1)}) \right)' + k^2 \cdot k^{(m+1)} \\ &= k^{(m+3)} + \frac{\partial}{\partial s} P_m(k, k', \dots, k^{(m)}) + k^2 \cdot k^{(m+1)}, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. De cette formule on en déduit que pour tout $m \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(k^{(m)})^2 &= 2k^{(m)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} k^{(m)} \\ &= 2k^{(m)} \cdot k^{(m+2)} + 2k^{(m)} \cdot P_m(k, k', \dots, k^{(m)}) \\ &= ((k^{(m)})^2)'' - 2(k^{(m+1)})^2 + Q_m(k, k', \dots, k^{(m)}) \end{aligned}$$

où Q_m est un polynôme à $m + 1$ variables de degré 2 en $k^{(m)}$. La proposition se prouve alors par récurrence : pour $m = 0$, on prend

$C(0) = C$. Supposons que les m premières dérivées en s de k sont bornées. Il existe une constante B dépendant de m , C et $F(., 0)$ telle que

$$\frac{\partial}{\partial t}(k^{(m+1)})^2 \leq ((k^{(m+1)})^2)'' + B(1 + (k^{(m+1)})^2).$$

Si l'on combine cette inégalité avec l'équation d'évolution de $(k^{(m)})^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((k^{(m+1)})^2 + B(k^{(m)})^2) &\leq ((k^{(m+1)})^2 + B(k^{(m)})^2)'' - B(k^{(m+1)})^2 + B_1 \\ &\leq ((k^{(m+1)})^2 + B(k^{(m)})^2)'' + B_1 \end{aligned}$$

où B_1 dépend de B et les $C(l)$, $0 \leq l \leq m$. Par un principe du maximum, cette inégalité implique que $(k^{(m+1)})^2 + B(k^{(m)})^2$ reste borné par une constante ne dépendant que de m , C et la courbe initiale $F(., 0)$, donc par hypothèse de récurrence $(k^{(m+1)})^2$ aussi. \square

1.3.2. Les courbes du flot restent plongées.

Théorème 1.10. *Soit $F : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ une famille de courbes solution de l'équation du flot de raccourcissement 1. Si $|k(u, t)| < C$ et si la courbe initiale $F(., 0) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est plongée alors les courbes $F(., t) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ restent plongées pour tout $t \in [0, T)$.*

Démonstration. Comme la courbure est bornée, le lemme 1.3 montre que pour tout t , $F(., t)$ est une immersion ; il suffit donc de montrer l'injectivité de $F(., t)$ pour tout t . Notons

$$s(u_1, u_2, t) = \left| \int_{u_1}^{u_2} v(u, t) du \right|$$

la distance entre $F(u_1, t)$ et $F(u_2, t)$ en suivant la courbe dans le sens direct,

$$E = \{(u_1, u_2, t) | s(u_1, u_2, t) < \frac{\pi}{C}\},$$

$$D = (S^1 \times S^1 \times [0, T)) \setminus E$$

le complémentaire de E et $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(u_1, u_2, t) = |F(u_1, t) - F(u_2, t)|^2$. On va raisonner en deux temps : on montrera d'abord que sur E , $f(u_1, u_2, t) = 0$ seulement si $u_1 = u_2$ par un argument de comparaison avec des arcs de cercle. Ensuite un principe du maximum permettra de prouver que le minimum de f sur D est strictement positif.

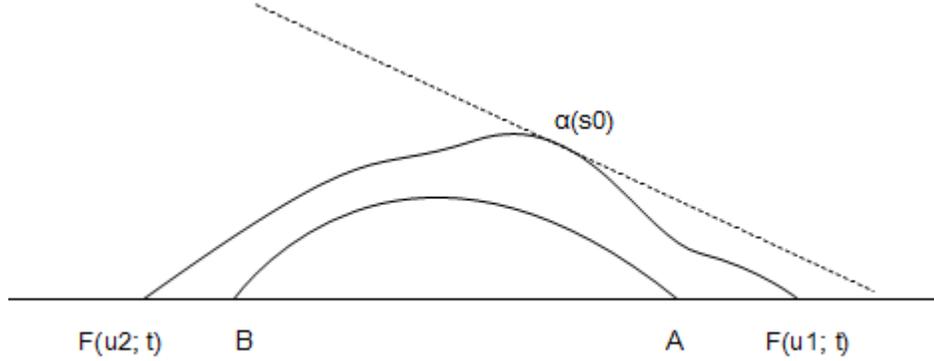


FIGURE 1

Soit $(u_1, u_2, t) \in E$. Soit α l'arc de courbe reliant $F(u_1, t)$ à $F(u_2, t)$ dans le sens direct. Soit β un arc de cercle de rayon $1/C$, de longueur $L = s(u_1, u_2, t)$. Notons A, B ses extrémités. Alors

$$|F(u_1, t) - F(u_2, t)| > AB = \frac{2}{C} \sin\left(\frac{C}{2}s(u_1, u_2, t)\right).$$

En effet, déplaçons l'arc de cercle β et la courbe α de telle sorte que les extrémités des courbes soient situées sur l'axe des abscisses. Soit s l'abscisse curviligne pour les deux courbes partant de 0 en $F(u_1, t)$ pour α et en A pour β . On note θ_α (resp. θ_β) l'angle entre la tangente à α (resp. β) en s et l'axe des abscisses, puis $K(s)$ la courbure de α en s . Soit $s_0 = \pi/2C$. Comme :

$$\frac{\partial \theta_\beta}{\partial s} = C > |K| = \left| \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial s} \right|$$

on obtient en intégrant :

$$|\theta_\beta(s)| \geq |\theta_\alpha(s) - \theta_\alpha(s_0)|.$$

De plus, puisque $|\theta_\beta| \leq \pi$ pour $0 \leq s \leq L$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos(\theta_\alpha(s) - \theta_\alpha(s_0)) ds &= \int_0^L \cos |\theta_\alpha(s) - \theta_\alpha(s_0)| ds \\ &\geq \int_0^L \cos |\theta_\beta| = AB. \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que l'intégrale à gauche est la longueur du projeté du segment $[F(u_1, t), F(u_2, t)]$ sur la tangente à α en s_0 , qui est inférieure à $|F(u_1, t) - F(u_2, t)|$ (voir figure 1.3.2).

Passons à la seconde moitié de la preuve : on veut montrer que le minimum de f sur D est strictement positif. Commençons par remarquer que f vérifie également une équation de la chaleur :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f - 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - 4.$$

Pour le montrer, on écrit que d'une part :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), k(u_1, t)N(u_1, t) - k(u_2, t)N(u_2, t) \rangle$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), T(u_1, t) \rangle$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} &= 2\langle T(u_1, t), T(u_1, t) \rangle + 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), k(u_1, t)N(u_1, t) \rangle \\ &= 2 + 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), k(u_1, t)N(u_1, t) \rangle \end{aligned}$$

De même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} = 2 - 2\langle F(u_1, t) - F(u_2, t), k(u_1, t)N(u_2, t) \rangle,$$

ce qui montre l'équation.

Ensuite, la frontière de D est donnée par :

$$\{(u_1, u_2, t) | s(u_1, u_2, t) = \frac{\pi}{C}\} \cup \{(u_1, u_2, 0) | s(u_1, u_2, 0) \geq \frac{\pi}{C}\}.$$

Sur cet ensemble, f atteint un minimum m strictement positif d'après ce que l'on vient de voir et du fait que la courbe est initialement plongée. Soit $\epsilon > 0$ et considérons la fonction $g(u_1, u_2, t) = f(u_1, u_2, t) + \epsilon t$. Cette fonction vérifie l'équation :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g - 4 + \epsilon.$$

Supposons par l'absurde que g atteigne la valeur $m - \delta$ sur D , où $\delta > 0$. Soit $t_0 = \inf\{t \mid \text{il existe } u_1 \text{ et } u_2 \text{ tels que } g(u_1, u_2, t) = m - \delta\}$. La continuité de g et la minoration sur E de f montre que $m - \delta$ est atteint pour la première fois en un point (u_1, u_2, t_0) intérieur de D . En ce point on a :

$$\frac{\partial g}{\partial t} \leq 0 \text{ par définition de } t_0,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} \right)^2 \geq 0$$

car en (u_1, u_2, t_0) , g atteint un minimum spatial (à temps fixé) et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} = -2 \langle T(u_2, t), T(u_1, t) \rangle = \pm 2$$

parce qu'en un minimum spatial, les tangentes en u_1 et u_2 doivent être parallèles.

Par conséquent :

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} \geq 2 \sqrt{\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}} \geq 2 \left| \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} \right| \geq 4.$$

Mais cela contredit l'équation de la chaleur satisfaite par g . Comme ϵ puis δ sont arbitraires, $f(u_1, u_2, t) \geq m > 0$ sur D , ce qui termine la preuve. \square

2. UN THÉORÈME DE GAGE

Les deux résultats suivants sont dus à Gage. Le premier affirme que si $F(\cdot, t)$ est une solution de l'équation du flot de raccourcissement 1 telle que pour t , $F(\cdot, t)$ est convexe, alors le rapport isopérimétrique $\frac{L^2}{A}$ décroît avec le temps. Le second résultat précise que ce rapport tend en fait vers 4π si en plus l'aire tend vers 0, ce qui implique par exemple que le rapport du rayon inscrit par le rayon circonscrit de la courbe tend vers 1.

Voici le premier résultat :

Proposition 2.1 (Gage [4]). *Si $F(u, t)$ évolue selon l'équation du flot de raccourcissement 1, alors le rapport isopérimétrique décroît au cours du temps : en particulier si l'aire tend vers 0, alors la longueur également et la courbe converge vers un point.*

La preuve repose sur les trois lemmes suivants :

Lemme 2.2. *Si $F(u, t)$ évolue selon l'équation du flot de raccourcissement 1, alors la dérivée du rapport isopérimétrique est donnée par :*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L^2}{A} \right) = -2 \frac{L}{A} \left(\int k^2 - \pi \frac{L}{A} \right).$$

Démonstration. Cette égalité découle des lemmes 1.5 et 1.7. \square

Lemme 2.3. Soit $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe planaire fermée convexe C^1 et C^2 par morceaux. On rappelle que la fonction support est définie par $p(s) = \langle \gamma, -N \rangle$. Supposons que l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(2) \quad \int_{\gamma} p^2 \leq \frac{LA}{\pi}.$$

Alors on a également :

$$(3) \quad \pi \frac{L}{A} \leq \int_{\gamma} k^2.$$

Démonstration. En utilisant le fait que $\frac{\partial \gamma}{\partial s} = T(s)$ et que $\frac{\partial T}{\partial s} = kN$ on obtient en utilisant une intégration par parties :

$$\int_0^L pk = - \int_0^L \langle \gamma, kN \rangle ds = - \int_0^L \langle \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \rangle ds = \int_0^L \langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle ds = L.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur cette formule on peut écrire :

$$L = \int_0^L pk \leq \left(\int_0^L p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui permet de conclure. \square

Lemme 2.4. Pour toute courbe γ planaire fermée convexe C^1 , quitte à changer l'origine (c'est-à-dire quitte à composer γ par une translation du plan), l'inégalité 2 est satisfaite.

Démonstration. Commençons par montrer ce lemme dans le cas d'une courbe symétrique γ . L'hypothèse de symétrie implique que la largeur de la courbe dans la direction normale, notée $b_{N(s)}$ est le double de la fonction support $p(s)$. Comme γ est convexe, la largeur vérifie $2r_{int} \leq b_{N(s)} \leq 2r_{ext}$ et donc $r_{int} \leq p(s) \leq r_{ext}$. Cet encadrement et une inégalité de Bonnesen donnent $p(s)L - A - \pi(p(s))^2 \geq 0$ pour tous les $p(s)$. On peut alors conclure en intégrant cette inégalité et en utilisant le fait que $\int_0^L p(s)ds = 2A$ (voir le lemme 1.6).

Dans le cas général, quelque soit le point $\gamma(s)$ de la courbe, il existe un unique point $\gamma(\phi(s))$ sur la courbe tel que le segment reliant ces points divise le domaine borné délimité par la courbe en deux parties d'aires égales. Considérons les tangentes $T(s)$ et $T(\phi(s))$ en ces points : par continuité de la fonction tangente, il existe un s_1 tel que ces deux vecteurs soient parallèles. A fortiori $T(s_1) = -T(\phi(s_1))$. Choisissons alors comme nouvelle origine le milieu du segment $[\gamma(s_1), \gamma(\phi(s_1))]$ et on peut sans perte de généralité supposer que ce segment donne l'axe des abscisses. Notons ensuite γ_1 et γ_2 les portions de courbes respectivement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses. Effaçons pour le

moment γ_2 et considérons la courbe obtenue en complétant γ_1 par sa réflexion par rapport à l'origine. D'après le choix de s_1 et de l'origine, cette courbe est convexe. On a vu que :

$$\frac{2L_1A}{\pi} \geq 2 \int_{\gamma_1} p^2(s) ds$$

où L_1 est la longueur de la nouvelle courbe. L'aire délimitée est encore A par définition de s_1 . On obtient une inégalité similaire pour γ_2 et en additionnant les deux, on obtient l'inégalité cherchée :

$$\frac{LA}{\pi} = \frac{(L_1 + L_2)A}{\pi} \geq \int_{\gamma} p^2(s) ds.$$

□

Le second résultat qui nous sera utile est un raffinement de la proposition 2.1.

Théorème 2.5 (Gage [5]). *Si $F(u, t)$ est une solution de l'équation du flot de raccourcissement 1 sur $[0, T)$ et si de plus $\lim_{t \rightarrow T} (A) = 0$, alors*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi.$$

En outre, les courbes normalisées $\eta(t) = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma(t)$ délimitent des domaines convexes qui convergent vers le disque unité pour la métrique de Hausdorff.

Remarque 2.6. *Rappelons la définition de la métrique de Hausdorff. Soit (E, d) un espace métrique et E_H l'ensemble des fermés bornés de E non vides. La distance de Hausdorff d_H de E_H est définie par :*

$$\forall X, Y \in E_H \quad d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\right\}.$$

La convergence des courbes vers le cercle unité pour la métrique de Hausdorff peut être considérée comme une convergence " C^0 ", dans la prochaine partie on verra que cette convergence est en fait " C^∞ ".

La preuve de ce théorème demande plus d'efforts et ne sera pas exposée de façon complète. Présentons toutefois les grandes lignes de la démonstration en énonçant les principaux arguments exploités par Gage.

Lemme 2.7. *Si $F(u, t)$ est une solution de l'équation du flot de raccourcissement 1 sur $[0, T)$ et si de plus $\lim_{t \rightarrow T} (A) = 0$, alors*

$$\liminf_{t \rightarrow T} L(t) \left(\int_{F(\cdot, t)} k^2(s) ds - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right) \leq 0.$$

Démonstration. On sait que la dérivée du rapport isopérimétrique est

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L^2}{A} \right) = -2 \frac{L}{A} \left(\int k^2 - \pi \frac{L}{A} \right).$$

Si par l'absurde il existe un $\epsilon > 0$ tel que $L \left(\int k^2 - \pi \frac{L}{A} \right) > \epsilon$ sur $[t_1, T)$ alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{L^2}{A} \right) \leq -2 \frac{\epsilon}{A} = \frac{\epsilon}{\pi} \frac{\partial \log(A)}{\partial t} \quad t_1 < t < T,$$

donc en intégrant :

$$\left(\frac{L^2}{A} \right) (t) \leq \left(\frac{L^2}{A} \right) (t_1) - \frac{\epsilon}{\pi} \log(A(t_1)) + \frac{\epsilon}{\pi} \log(A(t)) \quad \text{pour } t_1 < t < T.$$

Or le terme de gauche est plus grand que 4π par l'inégalité isopérimétrique et le membre de droite tend vers $-\infty$ puisque $A(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow T$, ce qui est absurde. \square

Lemme 2.8. *Il existe une fonctionnelle $\Phi(\gamma)$ définie pour toute courbe γ convexe C^1 qui vérifie :*

$$LA(1 - \Phi(\gamma)) \geq \pi \int p^2(s) ds.$$

Par ailleurs, soit γ_i est une famille de courbes convexes telles que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(\gamma_i) = 0$$

et considérons les courbes normalisées $\eta(t) = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \gamma(t)$. Si ces courbes normalisées restent dans une partie bornée du plan, alors le domaine délimité par ces courbes converge vers le disque unité pour la métrique de Hausdorff. Enfin $\Phi(\gamma) = 0$ si et seulement si γ est un cercle.

Ce lemme difficile est l'étape clé de la démonstration du théorème de Gage, il ne sera pas prouvé ici (voir [5]). En voici une conséquence immédiate :

Lemme 2.9. *La fonction Φ du lemme précédent vérifie :*

$$\left(\int k^2(s) ds \right) (1 - \Phi(\gamma)) - \pi \frac{L}{A} \geq 0$$

dès que γ est C^2 et convexe.

Démonstration. On a vu dans la preuve du lemme 2.3 que

$$L \leq \left(\int p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int k^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut en élevant au carré et en utilisant le lemme précédent. \square

Munis de ces lemmes, nous sommes en mesure de démontrer le théorème 2.5. Le lemme 2.9 se réécrit

$$\int k^2(s)ds - \pi \frac{L}{A} \geq \left(\int k^2(s)ds \right) \Phi(\gamma).$$

De plus d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que l'intégrale sur une courbe simple fermée de la courbure est 2π , on voit que

$$L \int k^2(s)ds \geq \left(\int k^2(s)ds \right)^2 = 4\pi^2.$$

En combinant les deux inégalités on trouve :

$$(4) \quad L \left(\int k^2(s)ds - \pi \frac{L}{A} \right) \geq 4\pi^2 \Phi(\gamma).$$

Reprenons les hypothèses du théorème. On déduit du lemme 2.7 qu'il existe une sous-suite de courbes $F(., t_i)$ telle que le membre de gauche dans 4 tende vers zéro ; par conséquent $\Phi(F(., t_i))$ tend vers 0.

Ensuite montrons que les courbes normalisées notées $\eta(t)$ reste bornées durant le processus de raccourcissement, quitte à changer d'origine. On a vu que rapport $\frac{L^2}{A}$ est décroissant. L'inégalité de Bonnesen

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A} (r_{ext} - r_{int})^2$$

montre que le rayon circonscrit des courbes normalisées est borné pour tout temps par une constante R . Si l'on note $D(t)$ le domaine fermé délimité par $F(., t)$, il est clair que $D(t_2) \subset D(t_1)$ si $t_1 \leq t_2$. Choisissons maintenant comme origine O un point de $\bigcap_{t \in [0, T]} D(t)$. Alors les courbes normalisées par rapport à O sont contenues dans le disque de centre O de rayon R et restent bien dans une région bornée du plan.

En appliquant le lemme 2.8, on voit que la suite des domaines $D(t_i)$ converge vers le disque unité pour la topologie de Hausdorff. Comme L et A sont des fonctionnelles continues en les domaines fermés convexes, $\left(\frac{L^2}{A} \right) (t_i)$ tend vers 4π et par décroissance du rapport isopérimétrique, on conclut que $\lim_{t \rightarrow T} \frac{L^2}{A} = 4\pi$, ce qui termine la preuve du théorème de Gage.

3. LE THÉORÈME DE GAGE ET HAMILTON

Cette partie présente le principal théorème de cet exposé et sa preuve, en suivant l'article d'origine de Gage et Hamilton.

Théorème 3.1 (Gage, Hamilton [3]). *Soit $F(., 0)$ une courbe fermée plongée dans \mathbb{R}^2 , C^∞ , convexe. Alors il existe une unique famille de courbes $F(., t)$ définies sur intervalle de temps maximal $t \in [0, T)$, C^∞ ,*

strictement convexes pour $t > 0$, vérifiant l'équation 1. De plus, cette famille de courbes converge vers un point quand $t \rightarrow T$, de façon asymptotiquement circulaire au sens suivant :

- (1) Le rapport du rayon inscrit r_{int} par le rayon circonscrit r_{ext} tend vers 1.
- (2) Le rapport du maximum de la courbure par son minimum tend vers 1.
- (3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n -ième $k^{(n)}$ converge uniformément vers 0 lorsque $t \rightarrow T$.

Par souci de clarté, dans cette partie nous ne prouvons ce théorème que dans le cas d'une courbe initiale strictement convexe. De même la démonstration de la convergence " C^∞ " ne sera pas développée.

3.1. Existence en temps court. Le problème qui nous intéresse dans cette partie est le suivant : étant donnée une courbe initiale strictement convexe, existe-t-il une solution de 1 à court terme? Pour montrer l'existence et l'unicité de cette solution, on va se ramener à une équation à dérivées partielles équivalente portant sur la courbure, plus facile à étudier. L'existence et l'unicité de la solution découleront de résultats classiques sur les équations paraboliques. (voir [14], théorème 8.1) Les courbes strictement convexes simples peuvent être paramétrées par l'angle θ que fait la tangente avec l'axe des abscisses. Pour déterminer la nouvelle équation régissant la courbure en fonction de θ , prenons comme nouvelles variables (θ, τ) au lieu de (u, t) , où $t = \tau$ mais avec τ indépendant de la variable θ . Cela signifie en particulier que $\frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{\partial}{\partial \tau}$. On obtient le

Lemme 3.2. *S'il y a une solution à court terme problème du flot de raccourcissement par l'équation de la chaleur pour une courbe initiale strictement convexe, alors tant que les courbes sont strictement convexes :*

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3.$$

Démonstration. Calculons les dérivées composées suivantes en utilisant le fait que $k = \partial\theta/\partial s$ et le lemme 1.4 (3) :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial k}{\partial s} = \frac{\partial k}{\partial \tau} + k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2$$

et

$$\frac{\partial^2 k}{\partial s^2} = \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right) = k \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 + k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2}.$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation du lemme 1.8, on obtient l'identité voulue. \square

En fait, la solution de cette nouvelle équation reste strictement positive pour une donnée initiale strictement positive, ce qui correspond au fait que les courbes restent strictement convexes :

Lemme 3.3. *Si k satisfait l'équation du lemme 3.2 alors $k_{min}(t) = \inf\{k(\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ est une fonction croissante.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Alors soit ϵ tel que $k_{min}(0) > \epsilon > 0$ et supposons que $k_{min}(t) = k_{min}(0) - \epsilon$ pour un t . Posons $t_0 = \inf\{t \mid k_{min}(t) = k_{min}(0) - \epsilon\}$ et supposons que ce minimum est atteint en (θ_0, t_0) . En ce point :

$$\frac{\partial k}{\partial t}(\theta_0, t_0) \leq 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} \geq 0 \text{ et } k(\theta_0, t_0) > 0.$$

Cela contredit l'équation vérifiée par k . \square

On admettra l'existence d'une unique solution à court terme de cette équation parabolique. Voici le théorème donnant l'équivalence entre les deux problèmes de Cauchy :

Théorème 3.4. *Trouver une solution C^∞ à l'équation (1) avec la donnée d'une courbe initiale plongée, C^∞ et strictement convexe est équivalent à trouver une solution C^∞ , notée k , au problème de Cauchy suivant :*

- (1) $\partial k / \partial \tau = k^2 (\partial^2 k / \partial \theta^2) + k^3$
- (2) $k(\theta, 0) = \psi(\theta)$ où la fonction C^∞ ψ vérifie
 - (a) $\psi(\theta) > 0$
 - (b) $\int_0^{2\pi} (\cos(\theta) / \psi(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin(\theta) / \psi(\theta)) d\theta = 0$.

Démonstration. Commençons par rappeler une caractérisation des courbes fermées strictement convexes plongées. Une fonction 2π périodique strictement positive représente la courbure d'une courbe fermée simple C^2 du plan si et seulement si :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{k(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{k(\theta)} d\theta = 0.$$

En effet le sens direct est clair et réciproquement, étant donnée une fonction k satisfaisant ces égalités, on pose :

$$x(\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos(\eta)}{k(\eta)} d\eta \text{ et } y(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin(\eta)}{k(\eta)} d\eta.$$

Ces équations définissent alors le paramétrage d'une courbe fermée simple.

Revenons au théorème. Soit une solution au problème du flot de raccourcissement pour une courbe initiale strictement convexe, que l'on suppose définie sur $[0, T)$. Alors le lemme 3.2 et la continuité de k montrent que la courbure satisfait l'équation (1) sur un voisinage de 0. Mais le lemme 3.3 assure que les courbes restent strictement convexes et que donc (1) est en fait vérifiée sur l'intervalle $[0, T)$ entier. Le (2) est bien vrai dans ce cas.

Réciproquement, soit une fonction k satisfaisant les hypothèses données dans l'énoncé du théorème sur $[0, T)$. Définissons :

$$X(\theta, \tau) = (a(\tau), b(\tau)) + \int_0^\theta \frac{(\cos(\eta), \sin(\eta))}{k(\eta, \tau)}.$$

Si l'on impose $(a'(\tau), b'(\tau)) = (\frac{\partial k}{\partial \theta}(0, \tau), -k(0, \tau))$, alors on peut vérifier après une intégration par parties que :

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} = kN - \frac{\partial k}{\partial \theta}T.$$

L'équation prendra la forme voulue après un changement de la variable spatiale. Considérons θ comme fonction de u et t où $t = \tau$ mais avec t indépendant de u . On veut avoir :

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\theta(u, t), t) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{1}{k} T + kN - \frac{\partial k}{\partial \theta} T = kN.$$

Il suffit de résoudre

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k(\theta((u, t), t)) \cdot \frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta((u, t), t))$$

avec comme donnée initiale $\theta(u, 0) = \phi(u)$ (où ϕ , bijective de \mathbb{S}^1 sur lui-même dans le sens direct, correspond au paramétrage de la courbe initiale, que l'on peut imposer). On obtient alors une solution θ qui est à tout temps bijective de \mathbb{S}^1 dans lui-même. En considérant $F(u, t) = X(\theta(u, t), t)$ on obtient une solution au problème du flot de raccourcissement des courbes sur $[0, T)$. \square

Remarque 3.5. (1) *Dans la suite, seule la nouvelle équation du lemme 3.1 sera étudiée et τ sera noté t pour faciliter la lecture.*

- (2) *Ce théorème assure l'existence à court terme et l'unicité de la solution au problème du flot de raccourcissement pour une courbe initiale strictement convexe. Le théorème principal de l'article de Gage et Hamilton demande à la courbe initiale d'être seulement convexe au sens large. De plus l'existence à court terme et l'unicité de la solution sont vraies pour des courbes initiales plongées, qu'elles soient convexes ou non; cependant la preuve donnée par l'article requiert le théorème d'inversion de Nash-Moser.*

3.2. Existence en temps long. Dans cette partie, on va montrer que la solution du flot existe tant que l'aire est non nulle. L'intervalle de temps maximal d'existence de la solution est dès lors nécessairement borné au regard de l'équation satisfaite par l'aire de la courbe $\partial A/\partial t = -2\pi$. Pour ce faire, on va avoir besoin de plusieurs lemmes préliminaires.

D'abord on définit la courbure médiane k^* via

$$k^* = \sup \{b \mid k(\theta) > b \text{ sur un intervalle de longueur } \pi\}.$$

On a alors les estimations suivantes :

Lemme 3.6 (Estimation géométrique). *Étant donnée une courbe fermée convexe plane de courbure $k(\theta, t)$ de longueur L et renfermant une aire A , si k^* désigne la courbure médiane alors*

$$k^* < \frac{L}{A}.$$

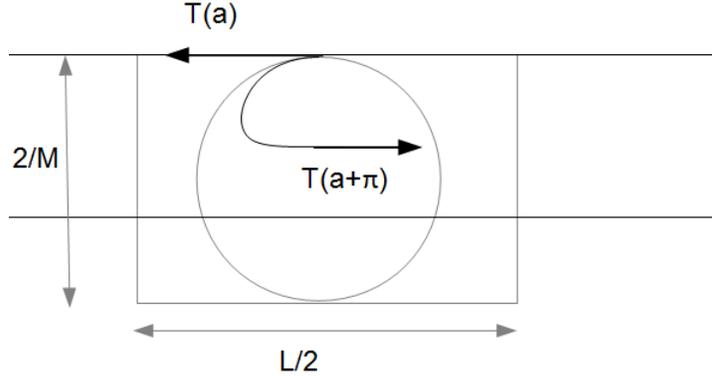
Démonstration. Soit $M < k^*(t)$ alors sur un intervalle de type $]a, a + \pi[$ on a :

$$\int_a^{a+\pi} \frac{\sin(\theta - a)}{k(\theta, t)} d\theta \leq \frac{2}{M}.$$

En remarquant que le projeté du vecteur tangent unitaire à la courbe en θ sur la perpendiculaire commune aux droites tangentes en a et $a + \pi$ est $\sin(\theta - a)$, on voit que la distance entre ces deux droites est au plus $\frac{2}{M}$.

Le diamètre de la courbe est majoré par $\frac{L}{2}$ comme on le voit en projetant orthogonalement sur une parallèle (voir figure 3.2), ainsi la courbe est incluse dans le rectangle de côtés $\frac{L}{2}$, $\frac{2}{M}$ et l'aire de la courbe

vérifie $A \leq \frac{L}{M}$ ce qui fournit l'inégalité cherchée en prenant le supremum



sur M . □

Avant de continuer avec les autres estimations, énonçons une inégalité dont nous aurons besoin par la suite :

Lemme 3.7 (Inégalité de Wirtinger). .

Si $f(a) = 0$ et $f(b) = 0$ avec $b - a \leq \pi$ alors

$$\int_a^b f^2 d\theta \leq \int_a^b \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 d\theta.$$

Démonstration. Quitte à translater l'intervalle, on peut supposer $a = 0$, puis quitte à prolonger f sur $[b, \pi]$ par zéro, on peut également supposer $b = \pi$. On développe alors f en série de Fourier $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \sin(n\theta)$, le développement de f' s'écrit alors $f' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n \cos(n\theta)$. L'inégalité découle alors de l'identité de Parseval :

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2 d\theta &= \frac{\pi}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |a_n|^2 \\ &= \int_a^b \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Le cas d'égalité correspond exactement à $f(\theta) = \sin(\theta)$. □

Lemme 3.8 (Estimation intégrale). Si $k^*(t)$ est bornée sur $[0, T)$ alors $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ est bornée sur $[0, T)$.

Démonstration. En utilisant l'équation d'évolution, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta = \int_0^{2\pi} k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta.$$

Soit t fixé, alors l'ouvert $U = \{\theta \mid k(\theta, t) > k^*(\theta)\}$ est la réunion dénombrable d'intervalles I_i de longueurs inférieures à π , tels qu'aux extrémités $k(\theta, t)$ vaut $k^*(t)$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de Wirtinger à $k(\theta, t) - k^*(t)$ sur chaque intervalle I_i :

$$\int_a^b (k(\theta, t) - k^*(t))^2 d\theta \leq \int_a^b \left(\frac{\partial(k(\theta, t) - k^*(t))}{\partial \theta} \right)^2 d\theta.$$

En simplifiant l'expression, il vient :

$$\int_{I_i} k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq 2k^* \int_{I_i} k(\theta, t) d\theta.$$

En sommant sur tous les intervalles, on obtient :

$$\int_U k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq 2k^* \int_U k(\theta, t) d\theta \leq 2k^* \int_0^{2\pi} k(\theta, t) d\theta.$$

D'autre part, sur le complémentaire V de U , on a :

$$\int_V k^2 - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq \int_V k^2 d\theta \leq 2\pi(k^*)^2.$$

En sommant ces deux inégalités et en utilisant le fait que :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \int k^2 ds = - \int k d\theta$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq -2k^*(t) \frac{\partial L}{\partial t} + 2\pi(k^*)^2.$$

Ainsi, si on suppose $k^*(t) \leq M$ alors en intégrant la relation précédente, il vient :

$$\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \log k(\theta, 0) d\theta + 2M(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t$$

en se rappelant toujours que t reste borné, on obtient bien l'estimation. \square

Avant d'énoncer l'estimation suivante, commençons par prouver deux lemmes préliminaires :

Lemme 3.9. *Supposons que $\int \log k(\theta, t) d\theta$ soit bornée sur $[0, T)$, alors pour tout $\delta > 0$, il existe $C > 0$ tel qu'on ait $k(\theta, t) \leq C$ sauf peut être sur des intervalles de longueurs inférieures à δ .*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, on peut alors trouver un $\delta > 0$ tel que pour tout $C > 0$ il existe un intervalle de longueur supérieure à δ sur lequel $k(\theta, t) \geq C$, en se rappelant alors que k_{min} est une fonction croissante, il vient :

$$\infty > \int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta \geq \delta \log C + (2\pi - \delta) \log k_{min}(0).$$

La relation tombe clairement en défaut pour C assez grand, ce qui prouve le lemme. \square

Lemme 3.10. *Il existe une constante D tel que la relation suivante soit vraie pour tout temps $0 \leq t < T$:*

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} k^2 d\theta + D.$$

Démonstration. Prenons la dérivée partielle par rapport au temps de la différence des deux expressions, il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int k^2 d\theta - \int \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta &= 2 \int \left(k \frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial^2 k}{\partial \theta \partial t} \right) \\ &= 2 \int \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k \right) \frac{\partial k}{\partial t} \\ &= 2 \int k^2 \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

car rappelons l'équation d'évolution : $\partial k / \partial t = k^2 (\partial^2 k / \partial \theta^2) + k^3$.

On voit donc en intégrant qu'il suffit de prendre pour D la valeur de $\int (\partial k / \partial \theta)^2 d\theta - \int k^2 d\theta$ en $t = 0$. \square

Lemme 3.11 (Estimation ponctuelle). *Si $\int_0^{2\pi} \log k(\theta, t) d\theta$ est bornée sur $[0, T)$ alors $k(\theta, t)$ est bornée uniformément sur $\mathbb{S}^1 \times [0, T)$.*

Démonstration. Par le premier lemme $k \leq C$ sauf sur des intervalles $[a, b]$ de longueur inférieure à δ . Sur un intervalle de ce type, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et les estimations précédentes :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in [a, b] : k(\varphi) &= k(a) + \int_a^\varphi \frac{\partial k}{\partial \theta} d\theta \\ &\leq C + \sqrt{\delta} \left(\int \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C + \sqrt{\delta} \left(\int k^2 d\theta + D \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi, si k_{max} désigne le maximum de k en l'espace, alors :

$$\begin{aligned} k_{max} &\leq C + \sqrt{\delta}(2\pi k_{max}^2 + D)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C + \sqrt{2\pi\delta}k_{max} + \sqrt{\delta D} \end{aligned}$$

Ainsi pour $\delta < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ on obtient $k_{max} \leq \frac{C+\sqrt{\delta D}}{1-\sqrt{2\pi\delta}}$ □

En utilisant les estimations précédentes, on a le résultat suivant :

Théorème 3.12. *Soit $k(\theta, t) : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation du flot. Si l'aire délimitée par les courbes associées est bornée inférieurement par une constante strictement positive, alors la courbure k est uniformément bornée sur $\mathbb{S}^1 \times [0, T)$.*

Démonstration. En effet, comme la longueur de la courbe décroît, alors par l'estimation géométrique, $k^*(t)$ est bornée, ainsi $k(\theta, t)$ est uniformément bornée en appliquant successivement l'estimation intégrale et ponctuelle. □

On peut en fait affiner les résultats précédents en trouvant des bornes supérieures sur les dérivées d'ordre supérieur de k . Ce travail a été fait dans la proposition 1.9 (comme on dérive ici par rapport à θ , on doit en plus utiliser le fait que $\partial\theta/\partial s = k$ est bornée inférieurement uniformément en temps par une constante strictement positive).

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat essentiel de la partie :

Théorème 3.13. *La solution du flot continue jusqu'à ce que l'aire délimitée par la courbe tende vers zéro.*

Démonstration. En effet, si ce n'est pas le cas, comme l'aire décroît, on aurait une borne inférieure strictement positive sur l'aire de la courbe, et on aurait alors une borne supérieure sur la courbure et toutes ses dérivées par le théorème 3.12, ce qui montre qu'on peut prolonger la solution de manière C^∞ au delà du temps T en appliquant à nouveau le résultat d'existence en temps court. □

3.3. Comportement asymptotique des courbes. On sait à présent que la solution du flot continue jusqu'à l'annulation de l'aire de la courbe. Les résultats de Gage 2.1 et 2.5 montrent que le rapport isopérimétrique $\frac{L^2}{A}$ décroît vers 4π , ce qui entraîne que L tend aussi vers zéro et la courbe tend vers un point en devenant de plus en plus circulaire. Dans ce paragraphe est montré que cette convergence "circulaire" se fait de manière C^2 .

Définissons d'abord :

$$k_w^* = \sup\{b \mid k(\theta) > b \text{ sur un intervalle de longueur } w\},$$

et rappelons que :

$$r_{ext} = \text{le rayon du cercle circonscrit à la courbe,}$$

$$r_{int} = \sup\{r \mid \text{il existe un cercle de rayon } r \text{ inscrit dans la courbe}\}.$$

Lemme 3.14 (Raffinement de l'estimation géométrique). *Il existe une fonction K positive décroissante telle que $K(0) = \infty$ et $K(\pi) = 0$,*

$$k_w^* \cdot r_{int}(t) < \frac{1}{1 - K(w)\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}} - 1\right)}$$

Démonstration. Fixons $M < k_w^*(t)$ alors l'ensemble $\{\theta/k(\theta, t) > M\}$ contient un intervalle de longueur w . Quitte à faire une rotation, on peut supposer que c'est $(-w/2, w/2)$. On construit alors un arc circulaire de courbure M et tangent à la courbe en $\theta = 0$ avec un angle w , (voir dessin 2) on voit alors que la courbe convexe doit être située dans la région limitée par l'arc et les droites qui lui sont tangentes aux extrémités. D'autre part, la convexité assure que la courbe est située entre les deux tangentes à la courbes en $\frac{w}{2}$ et $-\frac{w}{2}$.

On voit alors que (les notations sont sur le dessin) :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{w}{2}\right) &= \frac{1/M}{1/M + |d|} = \frac{r_{int}}{|a| + |d|} \\ \Rightarrow |a| &= \frac{r_{int}}{\cos(w/2)} - \frac{1}{M} \left(\frac{1}{\cos(w/2)} - 1 \right) \\ \text{et } 2r_{ext} &\geq r_{int} + |a| \\ \Rightarrow \left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right) &\geq -\frac{1}{2} + \frac{|a|}{2r_{int}} \end{aligned}$$

il vient donc en remplaçant $|a|$ par sa valeur :

$$Mr_{int} \leq \frac{1}{1 - K(w)(r_{ext}/r_{int} - 1)},$$

avec

$$K(w) = \frac{2 \cos(w/2)}{1 - \cos(w/2)}$$

En faisant tendre M vers k_w^* , on obtient le résultat demandé. \square

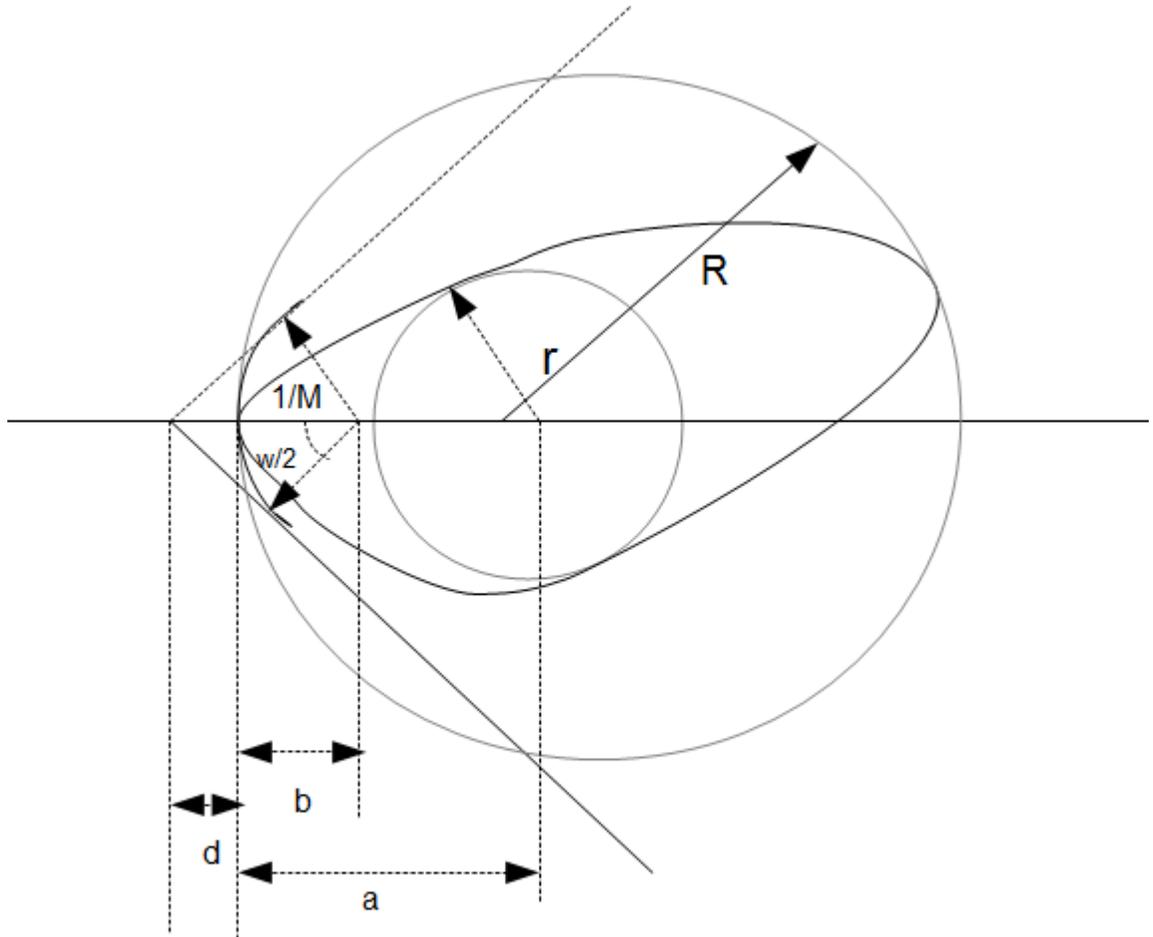


FIGURE 2. Configuration du lemme

Corollaire 3.15. *Pour tout ϵ avec $0 < \epsilon < 1$ on a :*

$$k_{max} r_{int} \leq \left(\frac{1}{1 - \epsilon} \right) \frac{1}{1 - C_2(\epsilon) \left(\frac{r_{ext}}{r_{int}} - 1 \right)}$$

où $C_2(\epsilon)$ est une constante qui dépend de ϵ .

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, on cherche w tel que $(1 - \epsilon)k_{max} \leq k_w^*(t)$ pour tout t . En reprenant la preuve de l'estimation ponctuelle, si $w/2 <$

δ et si on note $k_{max}(t) = k(\theta_0, t)$, alors :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [\theta_0 - w/2, \theta_0 + w/2] \quad k(\theta_0, t) &\leq k(\theta, t) + \sqrt{2\pi\delta}k(\theta_0, t) + \sqrt{\delta D} \\ (1 - \sqrt{\delta 2\pi})k(\theta_0, t) - \sqrt{\delta D} &\leq k(\theta, t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir δ de façon à avoir :

$$(1 - \epsilon)k(\theta_0) \leq (1 - \sqrt{2\pi\delta})k(\theta_0, t) - \sqrt{\delta D},$$

ou de manière équivalente :

$$\sqrt{\delta D} \leq (\epsilon - \sqrt{2\pi\delta})k(\theta_0, t).$$

Comme $k(\theta_0, t) \geq k_{min}(0) > 0$, il suffit que $\epsilon > \sqrt{2\pi\delta}$ et $\sqrt{\delta D} \leq (\epsilon - \sqrt{2\pi\delta})k_{min}(0)$, ce qui est clairement vrai pour $\delta \leq \left(\frac{\epsilon k_{min}(0) > 0}{2\pi k_{min}(0) > 0 + D}\right)^2$. Ainsi, $k_w^*(t) \geq (1 - \epsilon)k_{max}(t)$ pour tout t . \square

Proposition 3.16. *Pour tout ϵ strictement positif on a*

$$k_{max}(t)r_{int}(t) \leq \left(\frac{1}{1 - \epsilon}\right)^2$$

pour tout t suffisamment proche de T .

Démonstration. Rappelons d'abord une inégalité de Bonnesen (lemme 1.2) :

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{\pi^2}{A}(r_{ext} - r_{int})^2 \geq \left(1 - \frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)^2$$

On sait alors par le résultat de Gage que $\frac{L^2}{A}$ converge vers 4π au cours de l'évolution, il vient donc $\frac{r_{ext}}{r_{int}} \rightarrow 1$, ce qui donne le résultat voulu en utilisant le corollaire précédent. \square

Théorème 3.17. *$k(\theta, t)r_{int}(t)$ converge uniformément vers 1.*

Démonstration. Montrons d'abord que la famille $k(\theta, t)r_{int}(t)$ est équi-continue, en utilisant la même démarche que dans la preuve du lemme

3.11. Soient θ, θ' dans \mathbb{S}^1 , alors :

$$\begin{aligned}
|k(\theta, t)r_{int}(t) - k(\theta', t)r_{int}(t)| &= \left| \int_{\theta}^{\theta'} \frac{\partial k}{\partial \theta} d\alpha \right| r_{int}(t) \\
(\text{Cauchy-Schwartz}) &\leq \sqrt{|\theta - \theta'|} \left(\int \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right)^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} r_{int}(t) \\
&\leq \sqrt{|\theta - \theta'|} \left(\int k^2 d\theta + D \right)^{\frac{1}{2}} r_{int}(t) \\
&\leq \sqrt{|\theta - \theta'|} (2\pi k_{max}^2 + D)^{\frac{1}{2}} r_{int}(t) \\
&\leq \sqrt{|\theta - \theta'|} \left(\sqrt{2\pi} k_{max} r_{int}(t) + \sqrt{D} r_{int}(t) \right)
\end{aligned}$$

La constante D étant donnée par le lemme 3.10. Il suffit alors d'invoquer la proposition 3.16 pour avoir, pour t assez grand, l'uniforme équicontinuité de la famille $k(\theta, t)r_{int}(t)$.

Par le théorème d'Ascoli, on peut donc en extraire une sous-suite $(k(\theta, t_i)r_{int}(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une fonction $f(\theta)$ telle que, par la proposition 3.16, $f(\theta) \leq 1$. Ainsi, $(k(\theta, t_i)r_{int}(t_i))^{-1}$ converge ponctuellement vers $f(\theta)^{-1}$ sur $[0, +\infty]$, donc par le lemme de Fatou :

$$\int \frac{1}{f(\theta)} d\theta \leq \liminf \int \frac{1}{k(\theta, t_i)r_{int}(t_i)} d\theta = \liminf \frac{L(t_i)}{r_{int}(t_i)} = 2\pi$$

La dernière limite résulte de l'inégalité

$$\pi r_{int}^2 \leq A \leq \pi r_{ext}^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{A}}{r_{int}} \rightarrow \sqrt{\pi} \text{ quand } t \rightarrow T$$

Mais l'inégalité $f(\theta) \leq 1$ implique que $f \equiv 1$. Par conséquent, toute sous-suite converge vers 1, il s'ensuit que $k(\theta, t)r_{int}(t)$ converge uniformément vers 1. \square

Corollaire 3.18. $\frac{k_{min}(t)}{k_{max}(t)}$ converge vers 1

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{k_{min}(t)}{k_{max}(t)} - 1 \right| &= \left| \frac{k_{min}(t)r_{int}(t) - 1}{k_{max}(t)r_{int}(t)} + \frac{1}{k_{max}(t)r_{int}(t)} - 1 \right| \\
&\leq \frac{\|k(\theta, t)r_{int}(t) - 1\|_{\infty}}{k_{max}(t)r_{int}(t)} + \frac{\|k(\theta, t)r_{int}(t) - 1\|_{\infty}}{k_{max}(t)r_{int}(t)}
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat en remarquant que pour t assez proche de T on a : $\frac{1}{2} \leq k_{max}(t)r_{int}(t)$. \square

Corollaire 3.19. $k(\theta, t)\sqrt{2(T-t)}$ converge uniformément vers 1 (au temps T , l'aire délimitée par la courbe est nulle).

Démonstration. On utilise une inégalité de Bonnesen (lemme 1.2) et le lemme 1.7 qui implique $A = 2\pi(T-t)$ pour obtenir :

$$\frac{L^2}{A} - 4\pi \geq \frac{(L - 2\pi r_{int})^2}{A} = \left(\frac{L}{\sqrt{A}} - \frac{2\pi r_{int}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right)^2.$$

Comme $L/\sqrt{A} \rightarrow 2\sqrt{\pi}$, il vient $r_{int}/\sqrt{T-t} \rightarrow \sqrt{2}$. D'après le théorème 3.17, on conclut que $k(\theta, t)\sqrt{2(T-t)}$ converge uniformément vers 1. \square

Remarque 3.20. Les résultats précédents sur la courbure donnent la convergence C^2 vers le cercle unité. Des arguments généraux de stabilité pour les équations paraboliques, que nous n'exposerons pas, permettent de montrer la convergence C^∞ au sens où les dérivées de la courbure tendent uniformément vers 0.

4. LE THÉORÈME DE GRAYSON : UNE PREUVE DE HUISKEN

Le théorème de Grayson généralise celui de Gage et Hamilton à toute courbe initiale plongée, convexe ou non. Cette partie est consacrée à la preuve donnée par Huisken, élégante mais qui nécessite une bonne connaissance des singularités susceptibles d'apparaître au cours du flot. Dans cette partie, on entendra par "courbe plane" toute immersion C^∞ propre de \mathbb{S}^1 ou \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

4.1. Un lemme de monotonie. Ce paragraphe est consacré à la présentation d'un lemme de monotonie qui permet d'apporter des informations sur la forme asymptotique des solutions du flot de raccourcissement sous une condition de croissance sur la courbure. On dit que les courbes solution du flot de raccourcissement développent une singularité lorsque $t \rightarrow T$ si la courbure est non bornée au voisinage de T . Soit $F(u, t)$ une solution du flot pour une courbe initiale plongée, définie sur un intervalle maximal $[0, T)$ tel que $\max_u k^2(u, t)$ devienne non borné lorsque $t \rightarrow T$. Le lemme suivant donne une borne inférieure à la quantité $\max_u k^2(u, t)$.

Lemme 4.1. La fonction $U(t) = \max_u k^2(u, t)$ est lipschitzienne tant que k^2 reste borné et vérifie $U(t) \geq (2(T-t))^{-1}$.

Démonstration. D'après le lemme 1.8, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} k^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} k^2 - 2 \left(\frac{\partial}{\partial s} k \right)^2 + 2k^4.$$

En considérant cette équation en des points de maximum spatial pour k^2 , il en découle que $U(t)$ est bien lipschitzienne tant que k^2 est borné. Il est connu qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle de \mathbb{R} est continue, dérivable presque partout et vaut l'intégrale de sa dérivée à une constante près. Là où $U(t)$ est dérivable, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t) \leq 2(U(t))^2,$$

ou de façon équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{U(t)} \right) \geq -2.$$

Comme par hypothèse $1/U(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow T$, on obtient après intégration de t à T l'inégalité voulue

$$U(t) \geq \frac{1}{2(T-t)}.$$

□

Il devient alors naturel de poser comme condition de croissance sur la courbure :

$$(5) \quad \exists C_0 \quad \forall t < T \quad \max_u k^2(u, t) < \frac{C_0}{2(T-t)}.$$

On souhaite normaliser les courbes par rapport à un point de singularité, c'est-à-dire changer d'échelle en espace et en temps, de façon à ce que le nouveau paramètre temporel soit défini pour les grandes valeurs et que la nouvelle courbure reste uniformément bornée. Notons tout d'abord que la condition 5 implique :

$$|F(u, t_2) - F(u, t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |k(u, \tau)| d\tau \leq C[(T-t_1)^{\frac{1}{2}} - (T-t_2)^{\frac{1}{2}}]$$

pour tout $u \in S^1$ et $0 \leq t_1 < t_2 < T$. Ainsi $F(u, t)$ converge uniformément lorsque $t \rightarrow T$.

Supposons à présent que $O \in \mathbb{R}^2$ est un point de la limite, c'est-à-dire qu'il existe u tel que $F(u, t) \rightarrow O$ lorsque $t \rightarrow T$. On définit alors les courbes normalisées $\tilde{F}(u, t)$ (par rapport à O) ainsi :

$$\tilde{F}(u, r) = (2(T-t))^{-\frac{1}{2}} F(u, t) \quad ; \quad r(t) = -\frac{1}{2} \log(T-t)$$

Les nouvelles courbes $\tilde{F}(u, r)$ sont maintenant définies pour $r_0 = -\frac{1}{2} \log(T) \leq r < +\infty$ et vérifient l'équation :

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F} = \tilde{k} \tilde{N} + \tilde{F}$$

où \tilde{k} est la courbure et \tilde{N} la normale pointant vers l'intérieur des nouvelles courbes. Dans la suite on notera pour simplifier γ_r la courbe du plan donnée par $\tilde{F}(\cdot, r)$.

Du fait de la condition de croissance 5, la nouvelle courbure reste uniformément bornée ; c'est donc également le cas pour toutes ses dérivées (par le même raisonnement que celui de la proposition 1.9).

Théorème 4.2 (Lemme de monotonie de Huisken [9]). *Considérons le noyau de la chaleur suivant :*

$$\rho(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right).$$

Si μ_r désigne la mesure de Lebesgue sur la courbe normalisée γ_r et si $\tilde{F}^\perp(u, r)$ désigne la composante normale de $\tilde{F}(u, r)$ par rapport à la courbe γ_r en u , alors on a :

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{\gamma_r} \rho d\mu_r = - \int_{\gamma_r} \rho |\tilde{k} \tilde{N} + \tilde{F}^\perp|^2 d\mu_r.$$

Remarque 4.3. *Il existe une formule analogue pour les courbes non normalisées, qui fait intervenir un noyau de la chaleur dépendant du temps : $\frac{1}{\sqrt{4\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(T-t)}\right)$.*

Démonstration. Remarquons que μ_r n'est rien d'autre que la mesure de longueur d'arc, on utilise cette notation pour éviter les ambiguïtés. Par un calcul similaire à celui effectué dans les preuves des lemmes 1.3 et 1.5 et en prenant en compte la nouvelle équation d'évolution 6, on obtient $\frac{\partial \mu_r}{\partial r} = (1 - \tilde{k}^2) \mu_r$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\gamma_r} \rho d\mu_r &= - \int_{\gamma_r} \rho \left(\tilde{k}^2 - 1 + \langle \tilde{F}, \tilde{k} \tilde{N} \rangle + |\tilde{F}^\perp|^2 \right) d\mu_r \\ &= - \int_{\gamma_r} \rho |\tilde{k} \tilde{N} + \tilde{F}^\perp|^2 d\mu_r + \int_{\gamma_r} \rho \langle \tilde{F}, \tilde{k} \tilde{N} \rangle d\mu_r + \int_{\gamma_r} \rho d\mu_r. \end{aligned}$$

On utilise ensuite la formule de première variation :

$$\int_{\gamma_r} \operatorname{div}_{\gamma_r} Y d\mu_r = - \int_{\gamma_r} \langle \tilde{k} \tilde{N}, Y \rangle d\mu_r$$

avec $Y = \rho \tilde{F}$ pour obtenir

$$\int_{\gamma_r} \rho \langle \tilde{k} \tilde{N}, \tilde{F} \rangle d\mu_r = \int_{\gamma_r} \rho \left(-1 + |\tilde{F}^\perp|^2 \right) d\mu_r$$

où \tilde{F}^T désigne la composante tangentielle de \tilde{F} . On peut alors conclure :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\gamma_r} \rho d\mu_r &= - \int_{\gamma_r} \rho |\tilde{k}\tilde{N} + \tilde{F}|^2 d\mu_r + \int_{\gamma_r} \rho |\tilde{F}^T|^2 d\mu_r \\ &= - \int_{\gamma_r} \rho |\tilde{k}\tilde{N} + \tilde{F}^\perp|^2 d\mu_r. \end{aligned}$$

□

L'objectif est maintenant d'étudier le comportement asymptotique des γ_r lorsque $r \rightarrow +\infty$. Pour exploiter le lemme de monotonie, montrons qu'il existe des courbes à la limite non triviales. Commençons par remarquer que les courbes γ_r ne peuvent pas disparaître à l'infini :

Lemme 4.4. *Il existe un $u \in \mathbb{S}^1$ tel que $\tilde{F}(u, r)$ reste borné lorsque $r \rightarrow +\infty$.*

Démonstration. Comme O est un point singulier, il existe un u tel que $F(u, t) \rightarrow O$ quand $t \rightarrow T$. La condition de croissance 5 implique que :

$$|F(u, t)| \leq \int_r^T |k(u, \tau)| d\tau \leq \int_r^T \frac{C_0}{2(T - \tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = C_0(2(T - r))^{\frac{1}{2}}$$

□

Par un argument de compacité, on obtient une limite non réduite à un point :

Proposition 4.5. *Pour toute suite $r_j \rightarrow \infty$ il existe une sous-suite $(r_{\phi(j)})$ telle que $\gamma_{r_{\phi(j)}}$ converge pour la topologie C^∞ vers une courbe plongée γ_∞ (non nécessairement compacte).*

Démonstration. Soit $R > 0$ assez grand pour qu'un $\tilde{F}(u, r)$ reste dans la boule $B(O, R)$ pour tout temps. La condition de croissance 5 implique que la courbure est bornée et donc toutes ses dérivées également (pour le voir, on raisonne comme dans la preuve de la proposition 1.9 avec les quantités normalisées). On peut alors d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà extraire une sous-suite $(r_{\phi(j)})$ telle que les courbes $\gamma_{r_{\phi(j)}}$ convergent vers une courbe de façon C^∞ (si on prend pour chaque temps le paramétrage donné par l'abscisse curviligne) dans la boule $B(O, R)$. On répète cette manœuvre pour une suite de rayons tendant vers l'infini puis un procédé d'extraction diagonale permet d'obtenir une courbe limite γ_∞ . Celle-ci est alors l'image d'une immersion C^∞ qui est propre et injective. L'injectivité découle des mêmes arguments que ceux du théorème 1.10 (voir [11] théorème 2.2.1). Quant au caractère propre de l'immersion, il provient du fait que la longueur du

morceau de courbe donné par l'intersection d'une boule $B(O, R)$ et de γ_∞ est finie. En effet pour tout $r \geq r_0$, cette longueur est donnée par :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} \chi_{B(O,R)}(y) d\mu_r &\leq \int_{\gamma_r} \chi_{B(O,R)}(y) \exp\left(\frac{R^2 - |y|^2}{2}\right) d\mu_r \\ &\leq e^{R^2/2} \int_{\gamma_r} \exp\left(\frac{-|y|^2}{2}\right) d\mu_r \\ &\leq e^{R^2/2} \int_{\gamma_r} \exp\left(\frac{-|y|^2}{2}\right) d\mu_{r_0} \quad (\text{d'après le lemme de monotonie 4.2}) \\ &\leq \hat{C} e^{R^2/2}. \end{aligned}$$

On en conclut que la limite γ_∞ est bien une courbe plongée. \square

Le lemme de monotonie permet de montrer que toutes les formes limites du flot de raccourcissement sont auto-similaires au sens suivant :

Théorème 4.6. *Toute courbe limite obtenue dans la proposition 4.5 vérifie l'équation*

$$k = -\langle x, N \rangle$$

où x est le vecteur position, k la courbure en x et N la normale en x pointant vers l'intérieur.

Démonstration. D'après le lemme de monotonie 4.2 on a :

$$\int_{r_0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \rho |\tilde{k}\tilde{N} + \tilde{F}^\perp|^2 d\mu_r dr < +\infty$$

Soit une suite $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que $\int_{\gamma_{r_j}} \rho |\tilde{k}\tilde{N} + \tilde{F}^\perp|^2 d\mu_{r_j}$ converge vers 0 et $\gamma_{r_j} = \tilde{F}(\cdot, r)$ converge de façon C^∞ vers γ_∞ , en utilisant un paramétrage convenable avec l'abscisse curviligne (voir la proposition 4.5). Le lemme de Fatou permet alors de conclure que

$$\int_{\gamma_\infty} \rho |kN + \gamma_\infty^\perp|^2 ds = 0,$$

ce qui montre, puisque l'expression intégrée est continue, que sur γ_∞ :

$$k = -\langle x, N \rangle.$$

\square

Remarque 4.7. (1) *Une courbe est dite auto-similaire si elle vérifie la condition :*

$$k = -\lambda \langle x, N \rangle$$

pour un $\lambda > 0$, quitte à changer d'origine. Ce terme "auto-similaire" vient de l'observation suivante : supposons que $F_0(\cdot)$

soit une courbe (non nécessairement compacte) vérifiant $k_0 = -\lambda \langle F_0, N \rangle$, alors la déformation par homothéties

$$F(u, t) = \sqrt{1 - 2\lambda t} F_0(u)$$

vérifie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} F(u, t) \right)^\perp = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda t}} k_0 N = kN.$$

Ainsi, quitte à reparamétriser les courbes, cette déformation par homothéties évolue bien selon le flot de raccourcissement.

- (2) Tous les résultats de ce paragraphe sont généralisables en dimension supérieure, pour une hypersurface évoluant selon le flot de la courbure moyenne.

4.2. Classification des singularités. Dans ce paragraphe, nous donnerons sans preuves complètes les résultats qui permettent de classifier les singularités pouvant apparaître au court du flot. On renvoie au livre de C. Mantegazza [11] pour les preuves détaillées et aux articles originaux [12], [1] et [2] pour plus d'informations.

Cette classification des singularités se fonde sur l'alternative suivante : supposons que $F(u, t)$ est une solution du flot pour une courbe initiale plongée, définie sur un intervalle maximal $[0, T)$ tel que $\max_u k^2(u, t)$ devienne non borné lorsque $t \rightarrow T$, alors ou bien la quantité $(T - t) \max_u k^2(u, t)$ reste bornée et on a affaire à une singularité du type I, ou bien elle n'est pas bornée et dans ce cas la singularité est du type II.

Rappelons qu'une "courbe planaire" est une immersion C^∞ propre de S^1 ou \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

4.2.1. Singularités du type I. Ce qui suit se base sur le travail déjà effectué dans le 4.1. Commençons par énoncer un théorème plus général que nécessaire, mais qui donne un recul profitable sur la situation. Il précise le lien vu dans la remarque 4.7 entre les courbes auto-similaires et les solutions homothétiques contractantes.

Théorème 4.8. *Soit une courbe $F_0(\cdot)$ (elle n'est pas supposée plongée ou fermée). Si elle satisfait la condition d'auto-similarité : $k = -\lambda \langle x, N \rangle$ pour un $\lambda > 0$, alors la famille homothétique contractante*

$$F(u, t) = \sqrt{1 - 2\lambda t} F_0(u)$$

donne une solution du flot 1.

Réciproquement, soit une famille de courbes $F(u, t)$ (non supposées plongées ou fermées), solution du flot 1 définie sur l'intervalle de

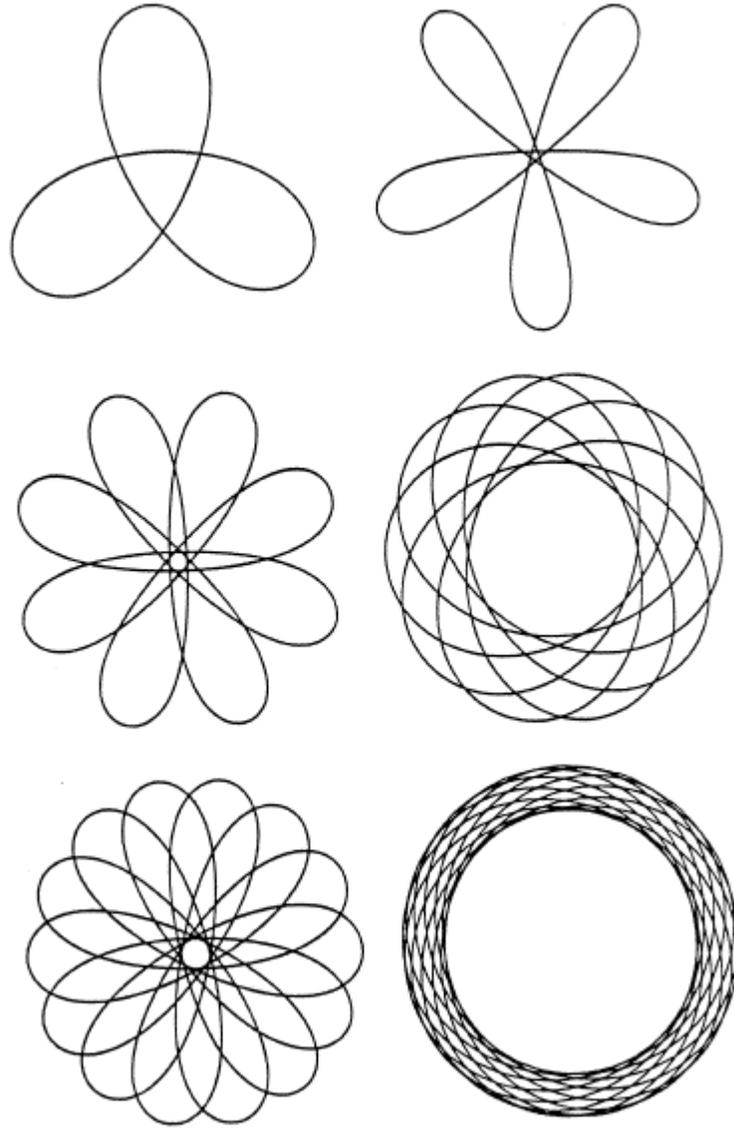


FIGURE 3. Quelques exemples de solutions homothétiques non plongées (figure tirée de [1]).

temps maximal $[0, T)$. On suppose qu'elle est une solution homothétique contractante en O , c'est-à-dire que $F(u, t) = f(t)F(u, 0)$ où f est une fonction telle que $f(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow T} f(t) = 0$. Alors ou bien $F(., t) =$

$F(., 0)$ est une droite, ou bien $f(t) = \sqrt{1 - t/T}$ et

$$k(u, 0) = -\frac{1}{2T} \langle F(u, 0), N(u, 0) \rangle.$$

De plus, les seules courbes planaires plongées vérifiant la condition d'auto-similarité $k = -\langle x, N \rangle$ sont les droites passant par l'origine et le cercle unité.

Remarque 4.9. *Il existe des courbes fermées solutions homothétiques contractantes du flot 1 qui ne sont pas plongées (elles ressemblent à des rosettes, voir la figure 4.2).*

Rappelons la notation : $U(t) = \max_u k^2(u, t)$. Introduisons à présent quelques définitions.

Définition 4.10. *On dit que le flot présente une singularité du type I en T si*

$$\limsup_{t \rightarrow T} (U(t)(T - t)) < \infty,$$

c'est-à-dire si la condition de croissance 5 est satisfaite.

Définition 4.11. *On dit qu'une suite $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est singulière si $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} k^2(p_n, t_n) = \infty$.*

On dit qu'une suite $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est singulière essentielle si de plus : $\exists \rho > 0$, indépendant de n , tel que $\rho U(t) \leq k^2(p_n, t_n)$ lorsque $t \leq t_n$.

Définition 4.12. *On dit que $p \in \mathbb{S}^1$ est un point singulier s'il existe une suite singulière essentielle $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $p_n \rightarrow p$.*

On dit que $p \in \mathbb{S}^1$ est un point singulier spécial s'il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(p, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite singulière essentielle.

Remarquons tout de suite que, du fait de la compacité de \mathbb{S}^1 et du lemme 4.1, dans le cas d'une singularité du type I il existe toujours au moins un point singulier p et il existe une suite singulière essentielle $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $p_n \rightarrow p$ et

$$\frac{\rho}{2(T - t)} \leq k^2(p_n, t_n)$$

pour un $\rho > 0$. Cependant, a priori rien n'indique l'existence d'un point singulier spécial.

Supposons que $F(u, t)$ est une solution du flot 1, développant une singularité du type I en T . On observe que si l'on normalise les courbes par rapport à un point limite O (qu'on définit alors comme la nouvelle origine) tel que $\lim_{t \rightarrow T} F(p, t) = O$ et si p est un point singulier spécial, alors il est possible d'obtenir une courbe limite au sens de la proposition 4.5 qui ne soit pas une droite. En effet, si l'on note $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les temps

donnés par la définition de p , les points $\tilde{F}(p, t_n)$ reste à une distance bornée de O et en ces points :

$$\tilde{k}^2(p, t_n) = 2(T - t_n)k^2(p, t_n) \geq \rho > 0,$$

donc les courbes limites obtenues grâce à des sous-suites de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas des droites.

La proposition suivante permet alors de conclure le cas des singularités du type I :

Proposition 4.13. *Tout point singulier est un point singulier spécial. En particulier, il existe des courbes limites au sens de la proposition 4.5 qui ne soient pas des droites.*

Résumons la situation : dans le cas d'une singularité du type I, il est possible, après normalisation, d'obtenir des courbes limites plongées (proposition 4.5) qui ne sont pas des droites (proposition 4.13). Ces limites vérifient alors la condition d'auto-similarité $k = -\langle x, N \rangle$ (théorème 4.6). Elles sont donc toutes les mêmes : c'est le cercle unité (théorème 4.8).

4.2.2. *Singularités du type II.* Rappelons la notation : $U(t) = \max_u k^2(u, t)$.

Définition 4.14. *On dit que le flot présente une singularité du type II en T si*

$$\limsup_{t \rightarrow T} (U(t)(T - t)) = \infty.$$

Définition 4.15. *On dit qu'une suite $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est singulière si $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} k^2(p_n, t_n) = \infty$.*

On dit qu'une suite $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est singulière essentielle si de plus : $\exists \rho > 0$, indépendant de n , tel que $\rho U(t) \leq k^2(p_n, t_n)$ lorsque $t \leq t_n$.

Définition 4.16. *Étant donnée une solution F de l'équation 1, on définit la suite de solutions normalisées $F_n : \mathbb{S}^1 \times [-\lambda_n^2 t_n, \lambda_n^2 (T - t_n)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le long d'une suite singulière essentielle $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :*

$$F_n(\cdot, \bar{t}) = \lambda_n(A_n F(\cdot, t) + B_n) \quad \bar{t} = \lambda_n^2(t - t_n),$$

où $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$, $A_n \in SO(2)$, $B_n \in \mathbb{R}^2$ sont choisis de telle manière que :

- $F_n(p_n, 0) = O \in \mathbb{R}^2$
- le vecteur tangent unitaire de F_n en $(p_n, 0)$ vérifie $T_n(p_n, 0) = (1, 0)$
- $k_n \cdot N_n(p_n, 0) = (0, 1)$

où l'on a noté toutes les quantités relatives à la courbe F_n par l'indice n .

Il est clair que tourner et translater une solution de 1 est encore une solution. Si l'on dilate l'espace et le temps, on obtient une solution

à condition d'avoir normalisé le temps comme le carré de l'espace. Les conditions imposées par la définition impliquent en particulier que $\lambda_n = k(p_n, t_n)$.

Énonçons d'abord deux lemmes préliminaires :

Lemme 4.17. *Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $[0, T[$. Il existe alors une suite $(c_l)_{l \in \mathbb{N}}$ indépendante de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :*

$$\forall t \in (t_n, t_n + 1/(8U(t_n))) \quad \left| \frac{\partial^l \vec{T}}{\partial s^l} \right|^2 \leq \frac{c_l \cdot U(t_n)}{(t - t_n)^{l-1}}.$$

La preuve de ce lemme requiert un peu de travail technique et n'est pas présentée (voir l'article [2]).

Lemme 4.18. *Soit F une solution de l'équation 1. Supposons qu'au temps T la courbe développe une singularité du type II. Soit $\delta > 0$. Définissons :*

$$\sigma_\delta(t) = \min\{\sigma \in [t, T) \mid U(\sigma) = (1 + \delta)U(t)\},$$

$$E = \{t \leq T \mid \rho U(r) \leq U(t) \text{ pour tout } r \in [0, t]\},$$

où le ρ est celui qui apparaît dans la définition de suite singulière essentielle. Choisissons ensuite $t_0 \in E$ et posons $t_n = \sigma_\delta(t_{n-1})$. Alors

$$S = \sup_{n \rightarrow \infty} U(t_n)(t_{n+1} - t_n) = +\infty.$$

Démonstration. Remarquons que, par récurrence, tous les t_n sont dans E . Précisons la signification de ce lemme. Dans le cas d'une singularité de type II, pour tout δ , il existe une suite singulière essentielle le long de laquelle la suite de solutions normalisées satisfait la propriété suivante : l'intervalle de temps $[0, \bar{\tau})$ sur lequel $\max k_n^2(., \bar{t}) < (1 + \delta)$ devient de plus en plus grand et $\bar{\tau} \rightarrow \infty$.

Prouvons la lemme. On a $U(t_n) = (1 + \delta)^n U(t_0)$. De plus $t_n \rightarrow T$ car sinon une singularité apparaîtrait déjà avant T . Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$, $t_{n+1} - t_n \leq S/U(t_n) = (1 + \delta)^{k-n} S/U(t_k)$. D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (T - t_k)U(t_k) &= \sum_{n=k}^{\infty} (t_{n+1} - t_n)U(t_k) \\ &\leq S \sum_{n=k}^{\infty} (1 + \delta)^{k-n} \\ &= S \left(1 + \frac{1}{\delta}\right), \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme, vu que la singularité est de type II. \square

Le théorème suivant montre qu'il existe une suite de "morceaux de solutions" normalisés qui converge vers une solution limite non triviale.

Théorème 4.19. *Soit F une solution de l'équation 1. Supposons qu'au temps T la courbe développe une singularité du type II, alors il existe $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite singulière essentielle le long de laquelle les solutions normalisées F_n convergent de manière C^∞ vers une limite lisse, non triviale F_∞ , qui est une solution du flot existant sur l'intervalle $] - \infty, +\infty[$.*

Démonstration. Soit $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite singulière essentielle satisfaisant le lemme précédent. Posons $\alpha_n = -\lambda_n^2 t_n$ et $\omega_n = \lambda_n^2 (T - t_n)$. Puisque $U(t) \rightarrow \infty$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -\infty$ et la suite des ω_n est telle que $\omega_n \rightarrow \infty$ d'après le choix des t_n .

Sous réserve d'existence, une solution limite peut être une famille de courbes non compactes. Il serait donc plus convenable de changer de point de vue et de regarder les solutions comme des familles de courbes périodiques $\tilde{F}_n : \mathbb{R} \times [-\alpha_n, \omega_n[\rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\tilde{F}_n(0, \cdot) = F_n(p_n, \cdot)$. On va alors paramétrer les courbes par l'abscisse curviligne d'origine $0 \in \mathbb{R}$. Pour alléger les notations, on notera t le nouveau temps (c'est-à-dire que t appartiendra aux intervalles $[-\alpha_n, \omega_n[$). Définissons un nouvel opérateur

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \phi_n(s) \frac{\partial}{\partial s}$$

avec $\phi_n(s) = \int_0^s k_n^2 ds$, alors

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta}{\delta t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} + \phi_n(s) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi_n(s)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} - \phi_n(s) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \\ &= k_n^2 \frac{\partial}{\partial s} - k_n^2 \frac{\partial}{\partial s} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ϕ_n est donc choisi de telle manière à avoir une indépendance entre les variables temporelle et spatiale.

Alors les lemmes 4.17 et 4.18 permettent d'affirmer que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe une suite $(c_l)_{l \in \mathbb{N}}$ indépendante de n tel que :

$$\forall t \in K, \quad \left| \frac{\partial^l T_n}{\partial s^l} \right|^2 \leq c_l$$

dès que $\frac{\partial^l T_n}{\partial s^l}$ est définie pour tout temps dans K (c'est-à-dire à partir de n assez grand). Grâce à l'expression de $\phi_n(s)$ et l'équation $\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{T}}{\partial s^2} + \left| \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} \right|^2 \vec{T}$, on peut également voir qu'il existe sur les compacts de $\mathbb{R} \times] - \infty, +\infty[$ une borne uniforme sur toutes les dérivées mixtes

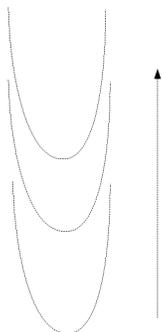


FIGURE 4. Famille de type "Grim Reaper"

$\left| \frac{\delta^j \partial^k T_n}{\delta t^j \delta s^k} \right|^2$ dès qu'elles existent. Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe une sous suite de $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le long de laquelle le vecteur tangent $T_n(s, t)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \times]-\infty, +\infty[$ vers une limite $C^\infty T_\infty(s, t)$. On obtient alors une solution du flot 1 \tilde{F}_∞ en intégrant le vecteur tangent. Notons enfin F_∞ une période de \tilde{F}_∞ (éventuellement infinie). Par des arguments similaires à ceux de la fin de la preuve de la proposition 4.5, à tout temps t , $F_\infty(\cdot, t)$ est l'image d'une immersion lisse injective propre (voir [11] proposition 4.1.4 pour les calculs détaillés). De plus F_∞ n'est nécessairement pas une famille de droites, puisque $k_\infty^2(0, 0) = 1$. \square

Théorème 4.20. *Soit F une solution de l'équation 1. Supposons qu'au temps T la courbe développe une singularité du type II, alors il existe une suite singulière essentielle $(p_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le long de laquelle la limite des courbes normalisées est une famille de courbes de type "Grim Reaper".*

Les courbes de type "Grim Reaper" sont données par l'équation $y = t - \log \cos(x)$ (voir figure 4.2.2). Donnons les idées principales de la preuve. On peut montrer que la solution limite est une famille de courbes $F_\infty(t)$ où $t \in]-\infty; +\infty[$ telle que chaque $F_\infty(t)$ est une courbe convexe ayant deux branches infinies le long desquelles la courbure tend vers 0. De plus elle tourne d'un angle π au sens suivant : $\int k ds = \pi$. Si l'on paramètre la courbe grâce aux variables θ et τ , où θ est l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente et $\tau = t$ mais étant indépendant de θ , il est alors possible de montrer que $\partial k / \partial \tau = 0$ en

utilisant l'équation d'évolution

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = k^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \theta^2} + k^3$$

sur des courbes fermées simples qui approximent les courbes $F_\infty(\tau)$. Or une famille de courbes plongées qui ne sont pas toutes des droites, solution du flot 1 et satisfaisant la condition $\partial k / \partial \tau = 0$ est forcément un Grim Reaper.

4.3. La preuve de Huisken. Dans la partie 3, on a vu que partant d'une courbe initiale convexe, la solution du flot existe en tout temps et les courbes convergent vers un point. Dans cette partie on s'intéressera plus généralement au cas où les courbes initiales sont plongées, simples et non nécessairement convexes. On se donne donc une famille $F : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ obéissant à l'équation du flot de raccourcissement

$$\frac{d}{dt} F(u, t) = \vec{k},$$

$\vec{k} = kN$ désignant le vecteur courbure de la courbe. On définit de manière générale, sur des courbes non nécessairement fermées, la distance intrinsèque de la courbe :

$$\begin{aligned} l : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q, t) &\rightarrow \int_p^q ds_t, \end{aligned}$$

s_t l'abscisse curviligne (à t fixé) sur $\gamma_t = F(\cdot, t)$ et la distance extrinsèque

$$\begin{aligned} d : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q, t) &\rightarrow \|F(p, t) - F(q, t)\|_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

Le rapport $\frac{d}{l}$ mesure en quelque sorte à quel point la courbe est proche d'une droite. Sur des courbes fermées, au lieu de l on utilisera plutôt $\psi(l) = \frac{l}{\pi} \sin(\frac{l\pi}{L})$, L étant la longueur totale de la courbe. Le rapport $\frac{d}{\psi}$ mesure alors la circularité de cette courbe.

Théorème 4.21. *Soit $F : \mathbb{S}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ obéissant à l'équation du flot 1. Alors le minimum de $\frac{d}{\psi}$ est une fonction croissante. Il est strictement croissant sauf si $\frac{d}{\psi}$ vaut identiquement 1 et dans ce cas, $F(\mathbb{S}^1)$ est un cercle.*

Démonstration. En dehors de la diagonale de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, les fonctions d et ψ sont lisses, on va alors prouver que si $\frac{d}{\psi}$ atteint un minimum spatial local tel que $\frac{d}{\psi}(p, q, t_0) < 1$ pour $(p, q) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et $t_0 \in [0, T]$, alors :

$$\frac{d}{dt}(d/\psi)(p, q, t_0) \geq 0.$$

Fixons donc t_0 et considérons s le paramétrage par longueur d'arc sur $F(\mathbb{S}^1)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $0 \leq s(p) < s(q) \leq \frac{L(t_0)}{2}$, de sorte que $l(p, q, t_0) = s(q) - s(p)$. On a alors par hypothèse

$$\delta(\xi)(d/\psi)(p, q, t_0) = 0, \quad \delta^2(\xi)(d/\psi)(p, q, t_0) \geq 0$$

où $\delta(\xi)$ et $\delta^2(\xi)$ désignent respectivement la première et deuxième variation par rapport au vecteur ξ appartenant à l'espace tangent de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en $(p, q) : \xi \in T_p\mathbb{S}_{t_0}^1 \oplus T_q\mathbb{S}_{t_0}^1$. Pour exploiter au mieux ces renseignements, on définit :

$$e_1 := \frac{d}{ds}F(p, t_0) \quad e_2 := \frac{d}{ds}F(q, t_0) \quad \text{et} \quad \omega = \frac{F(q, t_0) - F(p, t_0)}{d(p, q, t_0)}.$$

Remarquons que e_1 et e_2 sont dans $T_p\mathbb{S}_{t_0}^1 \oplus T_q\mathbb{S}_{t_0}^1$. Evaluons alors les relations en $\xi = e_1 \oplus 0$, puis en $\xi = 0 \oplus e_2$, on obtient :

$$(7) \quad \langle \omega, e_1 \rangle = \langle \omega, e_2 \rangle = \frac{d}{\psi} \cos\left(\frac{l\pi}{L}\right).$$

Puis, on calcule la dérivée temporelle de d/ψ en utilisant l'équation d'évolution 1 et $\frac{d}{dt}(ds) = -k^2(ds)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{\psi}\right) &= \frac{1}{d\psi} \langle F(q, t_0) - F(p, t_0), \vec{k}(q, t_0) - \vec{k}(p, t_0) \rangle - \frac{d}{\psi^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{l\pi}{L}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\psi} \langle \omega, \vec{k}(q, t_0) - \vec{k}(p, t_0) \rangle + \frac{d}{\pi\psi^2} \sin \alpha \int_{\mathbb{S}^1} k^2 ds \\ &\quad + \frac{d}{\psi^2} \cos(\alpha) \int_p^q k^2 ds - \frac{dl}{\psi^2 L} \cos(\alpha) \int_{\mathbb{S}^1} k^2 ds, \end{aligned}$$

où l'on a introduit le paramètre $\alpha = \frac{l\pi}{L}$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

On distingue alors deux cas :

Premier cas : $e_1 = e_2$. On choisit $\xi = e_1 + e_2$ dans l'équation de la seconde variation, on a :

$$0 \leq \delta^2(e_1 + e_2)(d/\psi) = \frac{1}{\psi} \langle \omega, \vec{k}(q, t_0) - \vec{k}(p, t_0) \rangle.$$

On alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{\psi} \right) &\geq \frac{d}{L\psi} \int_{\mathbb{S}^1} k^2 ds + \frac{d}{\psi^2} \cos(\alpha) \int_p^q k^2 ds - \frac{dl}{\psi^2 L} \cos(\alpha) \int_{\mathbb{S}^1} k^2 ds \\ &= \frac{d}{L\psi} \left(1 - \frac{l}{\psi} \cos(\alpha) \right) \int_{\mathbb{S}^1} k^2 ds + \frac{d}{\psi^2} \cos(\alpha) \int_p^q k^2 ds. \end{aligned}$$

Notons que $\frac{l}{\psi} \cos(\alpha) = \alpha(\tan \alpha)^{-1} < 1$ puisque par hypothèse $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Deuxième cas : $e_1 \neq e_2$. Dans ce cas on a : $e_1 + e_2$ est parallèle à ω , car tous les deux sont orthogonaux au vecteur $e_2 - e_1$, on utilise alors l'équation de la seconde variation cette fois pour le vecteur $\xi = e_1 - e_2$ on alors :

$$\delta(e_1 - e_2)(d/\psi) = \frac{2d}{\psi^2} - \frac{1}{\psi} \langle w, e_1 + e_2 \rangle.$$

et alors à (p, q, t_0) , sachant que $|e_1 + e_2|^2 = 4\left(\frac{d^2}{\psi^2}\right) \cos^2(l\pi/L)$, on a :

$$0 \leq \delta^2(e_1 - e_2)(d/\psi) = \frac{1}{\psi} \langle w, \vec{k}(q, t_0) - \vec{k}(p, t_0) \rangle + \frac{4\pi^2 d}{L^2 \psi}.$$

Il vient alors, en reportant dans l'équation de la dérivée temporelle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{\psi} \right) &\geq \frac{d}{L\psi} \left(1 - \frac{l}{\psi} \cos(\alpha) \right) \int_{\mathbb{S}^1} k^2 ds - \frac{4\pi^2 d}{L^2 \psi} \\ &\quad + \frac{d}{\psi^2} \cos(\alpha) \int_p^q k^2 ds \geq 0. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left(\int_{\mathbb{S}^1} k^2 ds \right) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{S}^1} 1 ds \right)}_{=L} \geq \left(\int_{\mathbb{S}^1} k ds \right)^2 = (2\pi)^2 = 4\pi^2,$$

Ainsi,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{\psi} \right) \geq \frac{d}{l\psi^2} \cos(\alpha) \left(l \int_p^q k^2 ds - \frac{4\pi^2 l^2}{L^2} \right)$$

mais remarquons que

$$l \int_p^q k^2 ds \geq \left(\int_p^q k ds \right)^2 = \beta^2$$

avec $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ représente l'angle entre e_1 et e_2 ; comme $e_1 + e_2$ est parallèle à ω et $\langle \omega, e_1 \rangle = \langle \omega, e_2 \rangle$ alors :

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \langle \omega, e_1 \rangle = \frac{d}{\psi} \cos(\alpha)$$

Par l'hypothèse faite au début, en (p, q, t_0) on a $d/\psi < 1$ et il s'ensuit alors $\cos(\frac{\beta}{2}) < \cos(\alpha)$, si bien que $\alpha < \frac{\beta}{2}$ et par suite

$$l \int_p^q k^2 ds \geq \beta^2 > 4\alpha^2 = \frac{4\pi^2 l^2}{L^2},$$

ce qui achève la preuve du théorème. \square

Théorème 4.22 (Grayson [6]). *Le problème du flot de raccourcissement admet une solution C^∞ sur un intervalle de temps $[0, T[$ et la solution converge vers un point en devenant circulaire.*

Démonstration. L'existence en temps court est prouvé dans l'article de Gage et Hamilton [3]. Considérons le premier instant T où la solution n'est plus définie au delà de T . Grâce aux théorèmes 1.10 et 1.9, cette situation n'est possible que si $\limsup_{t \rightarrow T} \max_u k(u, t) = \infty$, c'est-à-dire si une singularité apparaît. D'après les résultats de classification des singularités, si $(T - t) \max_u k^2(u, t)$ reste borné, alors la famille de courbes du flot "tend" vers une famille de cercles se rétrécissant de manière homothétique, au sens du paragraphe 4.1. Le deuxième cas correspond à $\limsup_t (T - t) \max_u k^2(u, t) = \infty$, c'est à dire une singularité du type II : par le théorème 4.20, il existe une suite de familles de courbes du flot renormalisées dont la limite est une famille de courbes du type "Grim Reaper". Or sur une courbe de cette famille le rapport d/l devient arbitrairement petit et d/ψ est du même ordre de grandeur que d/l lorsque la longueur L d'une courbe fermée tend vers l'infini et lorsque ces fonctions (toutes deux invariantes par normalisation) sont appliquées à deux points "proches". Cette observation contredit le théorème 4.21 et ce cas est par conséquent impossible. \square

5. VERS UNE GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS

Par le présent mémoire, on peut dire que le comportement du flot de raccourcissement dans le plan euclidien est bien compris pourvu que l'on parte d'une courbe initiale plongée et fermée. Il existe des prolongements de ces résultats dans différents sens. Dans un premier sens, on peut s'intéresser aux courbes plongées dans le plan non fermées : cette question a été traitée entre autres dans [10]. Un deuxième sens consiste à regarder les courbes plongées dans des surfaces Riemanniennes convexes à l'infini (c'est-à-dire telles que l'enveloppe convexe de tout compact est compacte). On démontre alors (voir [7]) que la courbe se rétrécit soit sur un point, soit sur une géodésique fermée, ce qui d'ailleurs fournit une preuve du théorème des trois géodésiques fermées. Enfin, un dernier sens développé dans [8] consiste à étudier l'effet

du flot de la courbure moyenne sur les hypersurfaces de \mathbb{R}^n ; on démontre alors que sous certaines hypothèses, les surfaces se contractent en des points et la forme limite est celle d'une sphère. Il reste cependant encore des problèmes ouverts qui constituent des sujets de recherches actifs, citons le cas des hypersurfaces non compactes et des hypersurfaces à bord (voir [11]).

RÉFÉRENCES

- [1] U. ABRESCH AND J. LANGER, *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, J. Differential Geom., 23 (1986), pp. 175–196.
- [2] S. J. ALTSCHULER, *Singularities of the curve shrinking flow for space curves*, J. Differential Geom., 34 (1991), pp. 491–514.
- [3] M. GAGE AND R. S. HAMILTON, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential Geom., 23 (1986), pp. 69–96.
- [4] M. E. GAGE, *An isoperimetric inequality with applications to curve shortening*, Duke Math. J., 50 (1983), pp. 1225–1229.
- [5] M. E. GAGE, *Curve shortening makes convex curves circular*, Invent. Math., 76 (1984), pp. 357–364.
- [6] M. A. GRAYSON, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom., 26 (1987), pp. 285–314.
- [7] ———, *Shortening embedded curves*, Ann. of Math. (2), 129 (1989), pp. 71–111.
- [8] G. HUISKEN, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geom., 20 (1984), pp. 237–266.
- [9] ———, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom., 31 (1990), pp. 285–299.
- [10] ———, *A distance comparison principle for evolving curves*, Asian J. Math., 2 (1998), pp. 127–133.
- [11] C. MANTEGAZZA, *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*, Birkauer, 2011.
- [12] W. W. MULLINS, *Two-dimensional motion of idealized grain boundaries*, J. Appl. Phys., 27 (1956), pp. 900–904.
- [13] R. OSSERMAN, *Bonnesen-style isoperimetric inequalities*, Amer. Math. Monthly, 86 (1979), pp. 1–29.
- [14] M. E. TAYLOR, *Partial Differential Equations III : Nonlinear Equations*, Springer, 1996.