Année 2016–2017 **FIMFA**

Examen de Probabilité (3 heures)

Sans document et sans calculatrice.

Cette épreuve comporte 3 questions de cours, 2 exercices et 1 problème indépendants.

Questions de cours:
1) Enoncez le lemme de Borel–Cantelli.
2) Enoncez la loi forte des grands nombres.
3) Enoncez le théorème limite central.

Exercice 1: Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = (X_n)^n$.
1) Calculer la loi de Y_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en probabilité.
3) Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^1.
4) Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge p.s.

Exercice 2: *Direction aléatoire en dimension 3*
Soit $V = (X, Y, Z)$ un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^3$ dont la loi a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 3/(4\pi) & \text{si } x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Les variables X et Y sont–elle indépendantes?
2) Calculez $E(|XY|)$.

On note (R, Θ, Φ) les coordonnées sphériques de V. Rappelons que les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) d'un vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ sont définies de la manière suivante: r est la norme de v, ϕ l'angle entre l'axe vertical et v, et enfin θ l'angle entre l'axe des abscisses et la projection de v sur le plan horizontal. Notons que $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0, \pi[$, $\theta \in [0, 2\pi[$. On a alors

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

3) Quelle est la loi du triplet (R, Θ, Φ)?
4) Les variables R, Θ, Φ sont–elles indépendantes?
5) Quelle est la loi de chaque variable R, Θ, Φ?

Soit U le vecteur $(X/R, Y/R, Z/R)$. Le vecteur U est une direction aléatoire dans $\mathbb{R}^3$.
6) Quelle est la loi de U?

He uses statistics as a drunken man uses lamp posts
– for support rather than illumination.
Andrew Lang (1844-1912).

Problème: *Récurrence et transience de la marche aléatoire dans* $\mathbb{Z}$

Soit p un nombre réel dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_n = -1) = 1 - p\,, \quad P(X_n = +1) = p\,.$$

On pose

$$S_0 = 0\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad S_n \;=\; X_1 + \cdots + X_n\,.$$

Le but du problème est d'étudier le caractère transient ou récurrent de cette marche aléatoire sur les entiers. i.e., de savoir si, avec probabilité 1, elle visite tout entier fixé une infinité de fois ou non. On pose

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f(x,n) \;=\; P(\exists k \in \{0 \cdots n\} \quad S_k = x)\,.$$

1) Dans cette question, on étudie certaines propriétés de $f(x,n)$.

a) Que vaut $f(0,n)$ pour $n \in \mathbb{N}$? Et $f(x,0)$ pour $x \in \mathbb{Z}$?

b) Montrez que

$$\forall x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \qquad f(x,n) \;=\; (1-p)\,f(x+1,n-1) \,+\, p\,f(x-1,n-1)\,.$$

c) Montrez que la limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x,n)$ existe pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et interprétez la valeur de $f(x)$.

d) Montrez que $f(x)$ vérifie une équation fonctionnelle.

2) Dans cette question, on étudie la $\limsup$ et le max de S_n.

a) Quelle est la loi de S_n pour n fixé? Que valent $E(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$?

b) Montrez que $P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty)$ vaut 0 ou 1.

c) Montrez que: $P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, k > 0 \quad f(k) < 1$.

d) Calculez la loi de $\max_{0\le k\le n} S_k$.

e) Montrez que

$$E\big(\max_{0\le k\le n} S_k\big) \;=\; \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} f(x,n)\,.$$

f) En déduire que

$$E\big(\sup_{n\ge 0} S_n\big) \;=\; \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} f(x)\,.$$

3) Dans cette question, on considère le cas $p > 1/2$.

a) Montrez que $P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.

b) En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$.

4) Dans cette question, on considère le cas $p = 1/2$.

a) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = f(-x)$.

b) A l'aide de 1)d), donnez la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

c) Montrez que $P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = P(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$.

d) En déduire que, presque sûrement, S_n visite tous les entiers une infinité de fois.

5) Dans cette question, on considère le cas $p < 1/2$.

a) Montrez que $P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 0$.

b) A l'aide de 1)d), donnez l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$.

c) Montrez que $\sup_{n\ge 0} S_n$ est dans L^1 et calculez son espérance.

Statistics: the mathematical theory of ignorance.
In N. Rose Mathematical Maxims and Minims, 1988.