Année 2016–2017

FIMFA – Partiel Intégration (2 heures)

Sans document et sans calculatrice.

Cette épreuve comporte 3 questions de cours, 2 problèmes et 1 exercice indépendants.

Questions de cours:
1) Enoncez le lemme de Fatou.
2) Enoncez le théorème de convergence dominée.
3) Enoncez le théorème de Radon–Nikodym.

Problème: Soit d un entier non nul. On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Pour $r > 0$, on note $B(r)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0 et de rayon r.
1) Exprimer $\lambda_d(B(r))$ en fonction de $\lambda_d(B(1))$.
2) Soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un unique $r(A) \in [0, +\infty]$ tel que

$$\lambda_d(B(r(A))) \,=\, \lambda_d(A)\,.$$

On définit alors $A^* = B(r(A))$. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. On définit les ensembles de niveaux de f par:

$$\forall t \geq 0 \qquad L(f,t) \,=\, \big\{\, x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t \,\big\}\,.$$

3) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \qquad f(x) \,=\, \int_0^{+\infty} 1_{L(f,t)}(x)\, dt\,.$$

On définit le réarrangement symétrique de f, noté f^*, par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \qquad f^*(x) \,=\, \int_0^{+\infty} 1_{L(f,t)^*}(x)\, dt\,.$$

4) Montrer que f^* est bien définie et que c'est une fonction borélienne.
5) Quand a–t–on $f = f^*$?
6) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\lambda_d(x) \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)\, d\lambda_d(x)\,.$$

7) Montrer que $||f||_p \,=\, ||f^*||_p$ pour tout $p \geq 1$.
8) Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\lambda_d(A \cap B) \,\leq\, \lambda_d(A^* \cap B^*)$.
9) Quand a–t–on égalité dans l'inégalité précédente?
10) Soient f, g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\, d\lambda_d(x) \,\leq\, \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x)\, d\lambda_d(x)\,.$$

11) Discuter le cas d'égalité de l'inégalité précédente.

Exercice: Calculez l'intégrale ci–dessous à l'aide d'une série:

$$I \,=\, \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \frac{dx\, dy\, dz}{1 - xyz}\,.$$

The only teaching that a professor can give, in my opinion, is that of thinking in front of his students.
Henri Lebesgue (1875–1941)

Problème: On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le problème se décompose en quatre parties qui peuvent être traitées indépendamment.

Partie I: Préliminaires. Soit g une fonction borélienne intégrable sur $\mathbb{R}$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad G(x) \;=\; \int_{[0,x]} g(t)\, d\lambda(t)\,.$$

1) Montrer que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Supposons que g est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que G est dérivable.
3) Donner un exemple de fonction g qui n'est continue nulle part et telle que G soit dérivable partout.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) \;=\; f(x) + f(y)\,. \qquad\qquad (*)$$

Partie II: Généralités sur f.
4) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(nx) \;=\; nf(x)\,.$$

5) Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(rx) \;=\; rf(x)\,.$$

6) Comment pourrait–on décrire f du point de vue de l'algèbre linéaire?
7) Montrer que si f est monotone, alors f est linéaire.
8) Montrer que si f est continue, alors f est linéaire.
9) Montrer que si f est continue en 0, alors f est linéaire.

Partie III: Cas borélien. Dans toute cette partie, nous supposons que f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de $(*)$ et nous mettons en œuvre une idée de Mark Kac. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) \;=\; \exp\big(if(x)\big)\,.$$

10) Montrer que la fonction g est Lebesgue intégrable sur tout intervalle compact. Posons alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad F(x,y) \;=\; \int_{[x,x+y]} g(u)\, d\lambda(u)\,.$$

11) Fixons $y \in \mathbb{R}$. Que peut–on dire de l'application partielle $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x,y)$?
12) Montrer qu'il existe une fonction ϕ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad F(x,y) \;=\; \phi(y)\, g(x)\,.$$

13) Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(y_0) \neq 0$.
14) Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x,y)$ est dérivable.
15) En déduire une équation différentielle vérifiée par g et conclure.

Partie IV: Solutions non linéaires.
16) Que peut–on dire d'une solution de $(*)$ qui ne soit pas linéaire?
17) Construire une solution de $(*)$ qui ne soit pas linéaire.

There are surely worse things than being wrong,
and being dull and pedantic are surely among them.
Mark Kac (1914–1984)