f) Résistance effective de a à Z

Déf 9.11 : $R(a \leftrightarrow Z) := \dfrac{V(a) - V(Z)}{\|I\|} \quad \left(= \dfrac{\alpha - \beta}{\|I_{\alpha,\beta}\|} \right)$

⚠ ne dépend pas du choix de α, β, mais dépend de K (exo 7)

$R^{(K)}(a \leftrightarrow Z) = \frac{1}{K} R^{(1)}(a \leftrightarrow Z)$

Rques : ∘ $R(a \leftrightarrow Z) = \underline{V_1(a)}$ si V_1 est le potentiel, nul sur Z, associé à I_1 courant unité.

∘ $R(a \leftrightarrow Z) = \dfrac{1}{\|I_2\|}$ si I_2 est le courant associé au potentiel $V_2 = V_{1,0}$.

Thm 9.12 (i) $\mathbb{P}_a(\tau_Z < \tau_a^+) = \dfrac{1}{c(a) R(a \leftrightarrow Z)}$

(ii) $\#\{\text{visites en } a \text{ avant } \tau_Z\} \sim \text{geom}\left(\left(c(a) R(a \leftrightarrow Z)\right)^{-1}\right)$

Preuve de 9.12 : (i) est clairement équiv. à (ii) : grâce à Markov aux tps successifs de retour en a.

$\#\{\text{visites en } a \text{ avant } \tau_Z\} \sim \text{geom}(\mathbb{P}_a(\tau_Z < \tau_a^+))$

Or $\mathbb{E}[\#\text{visites en } a \text{ avant } \tau_Z] = G_{\tau_Z}(a,a)$

et $\dfrac{G_{\tau_Z}(a,a)}{c(a)} = V_1(a)$ (cor 9.7) □.

(ou) Preuve directe de (i) : $V_{1,0}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_Z)$, I_2 associé

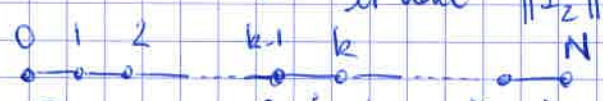
$$\|I_2\| = \text{div}_a(I_2) = \sum_{y : y \sim a} \left(V_{1,0}(a) - V_{1,0}(y)\right) c(a,y)$$

$$= c(a) - c(a) P V_{1,0}(a)$$

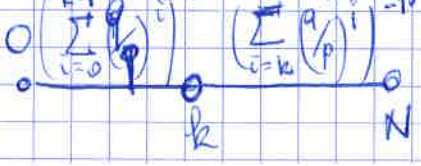
Or $P V_{1,0}(a) = \sum_{y \sim a} P(a,y) V_{1,0}(y) = \mathbb{P}_a(\tau_a^+ < \tau_Z)$

et donc $\|I_2\| = c(a) \mathbb{P}_a(\tau_Z < \tau_a^+)$. □

Exple Exo 13 :



Posons $c(i, i+1) = \left(\frac{p}{q}\right)^i$:

$\sim$ 

$\left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)^{-1}$ $\left(\sum_{i=k}^{N} \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)^{-1}$

sans changer $V_2(k) = \mathbb{P}_k(\tau_N < \tau_0)$

$P(i, i+1) = \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^i}{\left(\frac{p}{q}\right)^{i-1} + \left(\frac{p}{q}\right)^i} = p$

$P(i, i-1) = q$.

On déduit $\mathbb{P}_k(\tau_N < \tau_0) = \dfrac{C_{k\leftrightarrow N}}{C_{k\leftrightarrow N} + C_{0\leftrightarrow k}} = \dfrac{r_{0\leftrightarrow k}}{r_{0\leftrightarrow k} + r_{k\leftrightarrow N}} = \dfrac{\sum_{i=0}^{k-1} (q/p)^i}{\sum_{i=0}^{N-1} (q/p)^i}$

$$= \begin{cases} k/N & \text{si } p = q = 1/2 \\ \dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N} & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

voir aussi exos 14, 17, 18.

(9) Energie. Déf 9.13 $E(\theta) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \theta(e)^2 r(e) = \frac{1}{2} \sum_{e\in\vec{\mathcal{E}}} \theta(e)^2 r(e)$.

Prop 9.14 $E(I_1) = R(a \leftrightarrow Z) = \dfrac{1}{E(I_2)}$.

Thm 9.15 (Thomson) $R(a\leftrightarrow Z) = \inf\{E(\theta) : \theta \text{ flot de } a \text{ à } Z,\ \|\theta\| = 1\}$.
et l'inf est réalisé en $\theta = I_1$.

Preuve de 9.14 : $E(I_1) = \frac{1}{2} \sum_{x\in\Omega, y\in\Omega} I_1(x,y)^2 r(x,y) = \frac{1}{2} \sum_x \sum_y I_1(x,y)(V_1(x) - V_1(y))$

antisym de I_1 $= \sum_x \sum_y I_1(x,y) V_1(x) = \|I_1\| V_1(a) = V_1(a) = R(a\leftrightarrow Z)$.

$\mathrm{div}_x(I_1) = 0$ si $x \in D$, $= 0$ si $x \in Z$

Par la rque précédente $\|I_2\| = 1/R(a\leftrightarrow Z)$, et donc $I_2 = \dfrac{I_1}{R(a\leftrightarrow Z)}$ $E(I_2) = \dfrac{E(I_1)}{R(a\leftrightarrow Z)^2}$

Preuve de 9.15 : inf atteint car $\{\theta$ flot, $\|\theta\| = 1\}$ compact. Notons θ_0 minimiseur

$e_1, \dots, e_n$ un cycle, γ : $\gamma(e_i) = 1$ $\forall i = 1, n$, $\gamma(e) = 0$ $\forall e \notin \{e_i\}$.

$$0 \leq E(\theta_0 + \varepsilon\gamma) - E(\theta_0) = 2\varepsilon \sum_{i=1}^n r(e_i)\theta_0(e_i) + O(\varepsilon^2) \quad \forall \varepsilon$$

et donc $\sum_{i=1}^n r(e_i)\theta_0(e_i) = 0$ i.e θ_0 vérifie les cycles, par 9.9 c'est I_1.

Rque : Pour Thomson il suffit D fini, $\mathcal{G}$ loc. fini.

Thm 9.16 (Rayleigh) : $r(e) \leq r'(e)$ $\forall e \in \mathcal{E}$
alors $R(a\leftrightarrow Z, r) \leq R(a\leftrightarrow Z, r')$.

Preuve : $E_r(\theta) \leq E_{r'}(\theta)$ & Thomson.

Csq : retirer des arêtes (ou leur donner résist. ∞) ne peut qu'augmenter $R(a\leftrightarrow Z)$
ajouter ——— ne peut que diminuer $R(a\leftrightarrow Z)$
glucer nœuds (de m̂ potentiel distinct) ne peut que diminuer $R(a\leftrightarrow Z)$.
↳ donner résist. nulle à l'arête

Thm 9.17 (Nash-Williams)

$\Pi \subset \mathcal{E}$ ens de coupure entre a et z ssi tt chemin de a à z emprunte nécessairement une arête de Π.

$\{\Pi_k\}_{k=1,\dots,K}$ ens de coupures disjoints, de a à z.

$$R(a \leftrightarrow z) \geq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sum_{e\in\Pi_k} c(e)}.$$

Preuve : θ flot unité de a à z donc

$$1 \leq \Big(\sum_{e\in\Pi_k} |\theta(e)|\Big)^2 \overset{C.S.}{\leq} \sum_{e\in\Pi_k} c(e) \sum_{e\in\Pi_k} r(e)\theta(e)^2$$

$$E(\theta) \geq \sum_{k=1}^{K} \sum_{e\in\Pi_k} r(e)\theta(e)^2 \geq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sum_{e\in\Pi_k} c(e)}.$$

Π_k disjoints

puis on minimise en θ & Thomson.

(h) Transience / récurrence

1) (Exo 15) $\mathcal{G}$ infini dénombr. localement fini ($d^\circ x < \infty \ \forall x \in V$).

$\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}$ fini $\forall n$ $\mathcal{G}_n \nearrow \mathcal{G}$.

Par Rayleigh, $R(0 \leftrightarrow \mathcal{G}_n^c) \nearrow$, $\lim R(0 \leftrightarrow \mathcal{G}_n^c)$ existe ds $\overline{\mathbb{R}}_+$

Tjs par Rayleigh, cette limite ne dépend pas du choix de $(\mathcal{G}_n)$.

On la note $R(0 \leftrightarrow \infty)$

Par Thm 9.12, $\mathbb{P}_0(\tau_{\mathcal{G}_n^c} < \tau_0^+) = \dfrac{1}{c(0)R(0\leftrightarrow \mathcal{G}_n^c)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{c(0)R(0\leftrightarrow\infty)}$

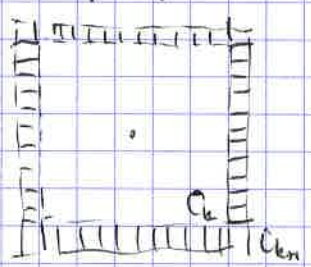
$\downarrow n\to\infty$

$\mathbb{P}_0(\tau_0^+ = \infty)$

Thm 9.18 : X récurrent $\iff \mathbb{P}_0(\tau_0^+ = \infty) = 0 \iff R(0\leftrightarrow\infty) = +\infty$.

2) (Exo 16) marche simple sur $\mathbb{Z}^d$.

$\Pi_k = \{(x,y) \in \mathcal{E} : \|x\|_\infty = k, \|x\|_\infty = k+1\}$.



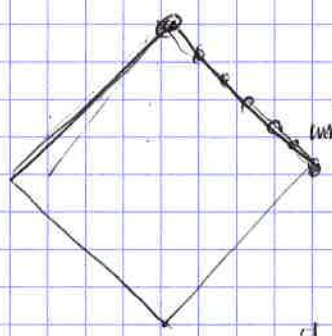
Chaque face de C_k cube de dim $d-1$ de côté $2k+1$ compte $(2k+1)^{d-1}$ noeuds

$$\#\Pi_k = 2d\,(2k+1)^{d-1} = \sum_{e\in\Pi_k} c(e)$$

$$R(0 \leftrightarrow \infty) \geq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\# \Pi_k} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2d(2k+1)^{d-1}} \begin{cases} = +\infty & \text{si } d \leq 2 \\ < \infty & \text{si } d > 2. \end{cases}$$

On conclut que la marche simple sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ est récurrente.

3) (Exos 19-20) $\quad S_k = \{ x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 = k \}$.



on définit un flot θ de 0 à $B_1(0,n)^c$ unité, t.q. le flot entrant / sortant en chaque noeud de S_k est unif^t réparti sur S_k.

C'est possible grâce à exo 19., exo 20.2

il y a $K_d\, k^{d-1}$ noeuds de S_k, i.e

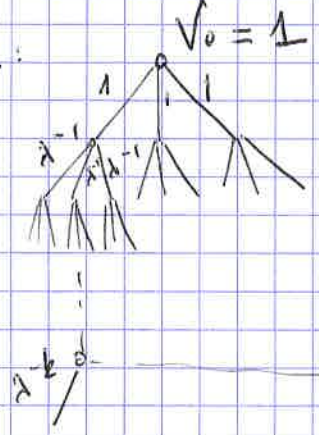
$$\theta(e) \leq \frac{C_d}{k^{d-1}}, \quad \forall e : e^+ \in S_k.$$

$$E(I_1) \leq E(\theta) \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{e^+ \in S_k} \left(\frac{C_d}{k^{d-1}} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{C'_d}{k^{d-1}} \begin{cases} = +\infty & \text{si } d \leq 2 \\ < \infty & \text{si } d \geq 3 \end{cases}$$

On conclut $R(0 \leftrightarrow \infty) < \infty$ si $d \geq 3$, i.e

marche sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ est récurrente.

Ex. 17 :



$\sim$

niveau k. Ts les noeuds ont ~~m~~ potentiel V_k.

niveau n, $V_n = 0$.

$$R(0 \leftrightarrow n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{d^{k+1}} = \begin{cases} \frac{1}{d} \, \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{d}\right)^n}{1 - \frac{\lambda}{d}} & \text{si } \lambda \neq d \\ \frac{n}{d} & \text{si } \lambda = d. \end{cases}$$

marche récurrente $\Leftrightarrow \lambda \geq d$.

X Tps d'atteinte

On a vu : 1) $\mathbb{P}_a(\tau_Z < \tau_a^+) = \dfrac{1}{c(a)\,R(a \leftrightarrow Z)}$

2) $\mathbb{E}_a(\tau_Z) = \sum_{x\in\Omega}' c(x) V_1(x)$ où $\left\{ \begin{array}{l} V_1(a) = R(a \leftrightarrow Z) \\ V_1(z) = 0 \ \forall z \in Z \\ V_1 \text{ harmon. sur } D \end{array} \right.$

(où V_1 associé à I_1 de a à Z de force 1.)

3) $\mathbb{E}_a[\tau_b] + \mathbb{E}_b[\tau_a] = C_g R(a \leftrightarrow Z)$. Voir aussi exos 6, 7. feuille V

4) Soit $t_\odot = \sum_{x\in\Omega} \mathbb{E}_a[\tau_x]\,\pi(x)$ ("$\mathbb{E}_a(\tau_\pi)$").

Lemme 10.1 ne dépend pas de a. $h(a) = \sum_{x\in\Omega} \mathbb{E}_a(\tau_x)\,\pi(x)$

$$Ph(a) = \sum_{x\in\Omega} \underbrace{\sum_{y\in\Omega}' P(a,y)\,\mathbb{E}_y[\tau_x]}_{\substack{\mathbb{E}_a(\tau_x) - 1 \text{ si } x \neq a \\ \mathbb{E}_a(\tau_a^+) - 1 \text{ si } x = a}} \pi(x).$$

$$= \sum_{x\neq a}' \left(\mathbb{E}_a(\tau_x) - 1\right)\pi(x) + \left(\mathbb{E}_a(\tau_a^+) - 1\right)\pi(a)$$

$$= h(a) - (1 - \pi(a)) + 1 - \pi(a) = h(a)$$

h harmonique sur Ω $\Rightarrow$ constante.

Lemme 10.2 $\max_w \mathbb{E}_\pi[\tau_w] \leq t_{hit} := \max_{x,y\in\Omega} \mathbb{E}_x(\tau_y) \leq 2\max_w \mathbb{E}_\pi(\tau_w)$

Preuve : $\mathbb{E}_x(\tau_y) \leq \underbrace{\mathbb{E}_x(\tau_\pi)}_{= \mathbb{E}_\pi(\tau_\pi) \text{ par } 10.1} + \mathbb{E}_\pi(\tau_w) \leq 2\max_w \mathbb{E}_\pi(\tau_w)$.

Prop 10.3 Si X rév. $P^{2t+2}(x,x) \leq P^{2t}(x,x)$

Si X rév paresseuse $t \to P^t(x,x) \searrow$

(en fait : Si X rev, v.p ≥ 0, $t \to P^t(x,x) \searrow$.) Preuve : + tard chap 12

Prop 10.4 $\pi(x)\,\mathbb{E}_\pi(\tau_x) = \sum_{t\geq 0}' \left(P^t(x,x) - \pi(x)\right)$

(X irréd. apériodique)

Preuve : $\tau_x^{(m)} = \inf\{t \geq m : X_t = x\}$ $\mu_m = P^m(x,\cdot)$

$$\mathbb{E}_x\left(\sum_{t=0}^{\tau_x^{(m)}-1} \mathbb{1}_{\{X_t=\cdot\}}\right) = \mathbb{E}_x\left(\tau_x^{(m)}\right) \times \pi(\cdot)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} P^t(x,x) = \mathbb{E}_x\left(\tau_x^{(m)}\right)\ \pi(x) = \pi(x)\left[m + \mathbb{E}_{\mu_m}(\tau_x)\right].$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(P^t(x,x) - \pi(x)\right) = \pi(x)\ \mathbb{E}_{\mu_m}(\tau_x) \xrightarrow[m\ \infty]{} \pi(x)\ \mathbb{E}_\pi(\tau_x)$$

<u>Thm 10.5</u> : (i) Si X rev. $\|P^m(x,\cdot)-\pi\|_{TV}^2 \leq \frac{1}{4}\left(\frac{P^{2m}(x,x)}{\pi(x)} - 1\right)$

& $t_{mix} \leq \left\lceil 4 \max_{x\in\Omega} \mathbb{E}_\pi\left(\tau_x^\#\right)\right\rceil$. (exo 8) où $\tau_x^\# = \inf\{t \geq 0 \text{ pair} : X_t = x\}$

(ii) si X rev, paresseuse

$$t_{mix} \leq \left\lceil 2 \max_{x\in\Omega} \mathbb{E}_\pi(\tau_x)\right\rceil \leq \lceil 2 t_{hit} \rceil.$$

<u>Preuve</u> : (i) $\left(\frac{1}{2}\sum_{y\in\Omega} \pi(y)\left|\frac{P^m(x,y)}{\pi(y)} - 1\right|\right)^2 \overset{C.S}{\leq} \frac{1}{4}\sum_{y\in\Omega} \pi(y)\left(\frac{P^m(x,y)}{\pi(y)} - 1\right)^2$

$$\leq \frac{1}{4}\sum_{y\in\Omega}\left(\frac{P^m(x,y)P^m(y,x)}{\pi(x)} - 2P^m(x,y) + \pi(y)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{P^{2m}(x,x)}{\pi(x)} - 1\right).$$

(ii) $\pi(x)\ \mathbb{E}_\pi(\tau_x) \geq \sum_{t=1}^{2m}\left(P^t(x,x) - \pi(x)\right) \geq 2m\left(P^{2m}(x,x) - \pi(x)\right)$

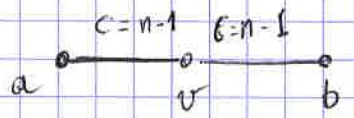
car $t \mapsto P^t(x,x) \searrow$

$$\frac{\mathbb{E}_\pi(\tau_x)}{8m} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{P^{2m}(x,x)}{\pi(x)} - 1\right) \geq \|P^m(x,\cdot) - \pi\|_{TV}^2$$

et si $m \geq \lceil 2\,\mathbb{E}_\pi(\tau_x)\rceil$, $\|P^m(x,\cdot)-\pi\|_{TV} \leq 1/4$ □.

<u>Exple</u> • marche sur cycle discret $t_{mix} \leq \lceil 2 t_{hit} \rceil \leq Cn^2$.

• graphes complets glués en 1 sommet



$$\mathbb{E}_a(\tau_b) + \mathbb{E}_b(\tau_a) \sim c.(n-1)^2\ \frac{2}{n-1} \sim c.n.$$

$$t_{mix} \leq c.n.$$

• tores glués en 1 sommet
2 dim

$t_{mix} \leq C n^2 \log(n)$. via résist. équiv.

XI Tps de couverture → exposé ?

XII Analyse spectrale : une intro

Lemme 12.1 : P matrice de la chaîne X (quitte à numéroter les éléments de Ω fini)

(i) λ v.p de $P \Rightarrow |\lambda| \leq 1$

(ii) $\mathcal{E}_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right\}$. pourvu que P irréd.

(iii) Si P irréd. apér., alors $\lambda \neq 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$.

Preuve : (i) $|Pf(x)| \leq \sum_{y\in\Omega} P(x,y)\,|f(y)| \leq \|f\|_\infty$ donc $\|f\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \|Pf\|_\infty \leq 1$.

(ii) Si P irréd on a vu que $\pi P = \pi$ a une unique solution

(iii) Si P irréd apér. on a vu que $\exists\, r \geq 0$ $P^r(x,y) > 0$ $\forall x,y \in \Omega$.

Par Perron-Frobenius et ce qui précède, P^r a $\begin{cases} \text{la v.p } 1 \text{ associé à } \mathcal{E}_1 \\ \text{ttes ses autres v.p sont en module, } < 1. \end{cases}$

Enfin $|\lambda^r| < 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$.

Lemme 12.2 Si P est réversible (irréductible), π la dist stat. associée.

(i) $(\mathbb{R}^\Omega, \langle\cdot,\cdot\rangle_\pi)$ a une b.o.n de fcts propres réelles $\{f_j, j=1,\dots,n\}$ associées aux v.p $\{\lambda_j, j=1,\dots,n\}$ réelles.

(ii) $\dfrac{P^t(x,y)}{\pi(y)} = \sum_{j=1}^n f_j(x) f_j(y) \lambda_j^t$ $\left(\text{et donc } \dfrac{P^t(x,x)}{\pi(x)} - 1 = \sum_{j=2}^n f_j(x)^2 \lambda_j^t\right)$ ↪ 10.3

(iii) Avec $\lambda_1 = 1$, $f_1 \equiv 1$, $\dfrac{P^t(x,y)}{\pi(y)} = 1 + \sum_{j=2}^n f_j(x) f_j(y) \lambda_j^t$.

Preuve : (i) $A(x,y) = P(x,y)\sqrt{\dfrac{\pi(x)}{\pi(y)}}$ sym car P réversible $\%\,\pi$.

Soit $\{\varphi_j, j=1,\dots,n\}$ une b.o.n pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de fcts propres réelles $\{\varphi_j, j=1,\dots,n\}$ associées aux v.p réelles $\{\lambda_j, j=1,\dots,n\}$

En fait $A = D_\pi^{1/2} P D_\pi^{-1/2}$, et si on pose $f_j = D_\pi^{-1/2}\varphi_j$,

on a $\langle f_i, f_j\rangle_\pi = \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}$ donc $\{f_j, j=1,\dots,n\}$ b.o.n pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$

avec bien sûr $A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i \iff Pf_i = \lambda_i f_i$, comme souhaité.

(ii) pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle_\pi \, f_j(x)$

$$P^t f(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle_\pi \, \lambda_j^t \, f_j(x).$$

pour $f = \mathbb{1}_{\{y\}}$ on trouve

$$P^t(x,y) = \sum_{j=1}^{n} f_j(y)\, \pi(y)\, \lambda_j^t \, f_j(x)$$

l'égalité souhaitée en découle

enfin (iii) se déduit de (ii) et 12.1.

Dorénavant, on écrira, quitte à réindicer

$$\lambda_1 = 1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \geq \lambda_n \geq -1$$

Corollaire 12.3 : $\left\| \frac{P^t(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{2,\pi}^2 = \sum_{j=2}^{n} f_j^2(x) \lambda_j^{2t}$ (et $\lambda_n > -1$ si la chaîne est apériodique)

Déf 12.4 : • trou spectral $\gamma = 1 - \lambda_2$

• trou spectral absolu $\gamma^* = 1 - \max\{|\lambda_i|, i \geq 2\} = 1 - \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$

• $t_{relax} = \frac{1}{\gamma^*}$

idée de l'intérêt

$$4 \|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV}^2 \leq \left\| \frac{P^t(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{2,\pi}^2 \leq \underbrace{\left(\sum f_j^2(x)\right)(1-\gamma^*)^{2t}}_{=: 1 - \lambda^*}.$$

Suite Csq du Théorème 12.2 : exo 16

1. $W \sim \pi$ $\quad \mathbb{E}[f(W)] \left(= \mathbb{E}_\pi(f(X))\right) = \sum_{x \in \Omega} f(x)\pi(x) = \langle f, \mathbb{1} \rangle_\pi$

2. $\mathbb{E}[f_j(W)] = \langle f_j, \mathbb{1} \rangle_\pi = \langle f_j, f_1 \rangle_\pi = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$

3. $\mathbb{E}[P^t f(W)] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle_\pi \, \lambda_j^t f_j(W)\right] = \langle f, f_1 \rangle_\pi = \mathbb{E}[f(W)].$

4. $\mathrm{Var}(P^t f(W)) = \mathbb{E}\left[\left(P^t f(W) - \mathbb{E}[P^t f(W)]\right)^2\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=2}^{n} \langle f, f_j \rangle_\pi \, \lambda_j^t \, f_j(W)\right)^2\right]$$

$$\mathrm{Cov}(f_i(W), f_j(W)) = \underbrace{\mathbb{E}[f_i f_j(W)]}_{\langle f_i, f_j \rangle_\pi = 0 \text{ si } i \neq j} - \underbrace{\mathbb{E}[f_i(W)]\,\mathbb{E}[f_j(W)]}_{=0 \text{ si } i,j \geq 2} = 0 \text{ si } i \neq j, \; i,j \geq 2.$$

d'où $\mathrm{Var}(P^t f(W)) = \sum_{j=2}^{n} \langle f, f_j \rangle_\pi^2 \, \lambda_j^{2t} \, \mathrm{Var}(f_j(W)) \leq (\lambda^*)^{2t} \, \mathrm{Var}(f(W))$

Rappelons $t_{relax} = \frac{1}{\gamma^*}$, $\gamma^* = 1 - |\lambda^*|$. trou spectral.

XII.1

Thm 12.5 (i) $4\|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV}^2 \leq \left\| \frac{P^t(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{2,\pi}^2 = \sum_{j=2}^n f_j^2(x) \lambda_j^{2t}$

$\leq \frac{|\lambda^*|^{2t}}{\pi_{min}}$. d'où $d(t) \leq \frac{1}{2} \frac{|\lambda^*|^t}{\sqrt{\pi_{min}}}$

- En particulier $t_{mix}(\varepsilon) \leq t_{relax} \log\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi_{min}}}\right)$.

- Pour une chaîne transitive $\left\| \frac{P^t(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{2,\pi}^2 = \sum_{j=2}^n \lambda_j^{2t}$.

(ii) $d(t) \geq \frac{1}{2} |\lambda^*|^t$

En conséquence $t_{mix}(\varepsilon) \geq (t_{relax} - 1) \log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$.

(iii) $d(t)^{1/t} \xrightarrow[t \to \infty]{} |\lambda^*|$.

<u>Preuve de (i)</u> La 1ère inégalité est exo 13.(II), Q3 et provient de ↗ de $p \to \| \|_{\pi,p}$.

L'égalité vient du lemme 12.2

Enfin il reste à voir que $\mathbb{1}_{\{x\}} = \sum_{j=1}^n f_j(x) \pi(x) f_j$

donc $1 = \sum_{j=1}^n f_j^2(x) \pi(x)$, $\sum_{j=2}^n f_j^2(x) = \frac{1}{\pi(x)} - 1 \leq \frac{1}{\pi_{min}}$.

Pour la csq, on écrit $d(t) \leq \frac{1}{2} \frac{e^{-\gamma^* t}}{\sqrt{\pi_{min}}}$ et on conclut (cf $\lambda^* \leq e^{-\gamma^*}$).

Enfin si la chaîne est transitive $\left\| \frac{P^t(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{2,\pi}^2$ ne dépend pas de x.

on a donc $n \left\| \frac{P^t(x,\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1 \right\|_{2,\pi}^2 = \sum_{j=2}^n \underbrace{\sum_{x \in \Omega} f_j^2(x)}_{(\pi_{min}^{-1}) = n \|f_j\|_{2,\pi}^2 = n.} \lambda_j^{2t} = n \sum_{j=2}^n \lambda_j^{2t}$ et on conclut

(ii) Soit f^* vecteur propre pour λ^*.

$\langle f^*, \mathbb{1} \rangle_\pi = 0$ i.e $\sum_{y \in \Omega} f^*(y) \pi(y) = 0$

$|\lambda^*|^t |f^*(x)| = |P^t f^*(x)| = \left| \sum_{y \in \Omega} \left(P^t(x,y) f^*(y) - f^*(y) \pi(y) \right) \right| \leq 2 \|f^*\|_\infty d(t)$

d'où $|\lambda^*|^t \leq 2 d(t)$

$t_{mix}(\varepsilon)\left(\frac{1}{|\lambda^*|} - 1\right) \geq t_{mix}(\varepsilon) \log\left(\frac{1}{|\lambda^*|}\right) \geq \log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$

Enfin (iii) est immédiat avec $\frac{|\lambda^*|^t}{2} \leq d(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi_{min}}} |\lambda^*|^t$.

Exple 1 $\quad G = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} \qquad \omega = e^{2i\pi/n}$.

On considère marche sur G, $\quad \mu(\omega) = \mu(\omega^{-1}) = 1/2 \to$ MAS sur cercle discret

$\tilde{\mu}(\omega) = \tilde{\mu}(\omega^{-1}) = 1/4$, $\tilde{\mu}(1) = 1/2 \to$ MAS paresseuse sur cercle discret

1) f fct propre $\qquad \lambda f(\omega^k) = Pf(\omega^k) = \frac{f(\omega^{k-1}) + f(\omega^{k+1})}{2}$, $0 \leq k \leq n-1$

$\varphi_j : \omega^k \to (\omega^k)^j$

$$P\varphi_j(\omega^k) = \frac{\omega^{jk-j} + \omega^{jk+j}}{2} = \omega^{kj}\left(\frac{\omega^j + \omega^{-j}}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \varphi_j(\omega^k).$$

donc φ_j v.p associé à v.p $\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = \lambda_j$, $\quad 0 \leq j \leq n-1$.

Note $\quad Re(\varphi_j)$ et $Im(\varphi_j)$ restent v.p associées à λ_j.

2) $\tilde{f}$ fct propre de $\tilde{P} = \frac{P+I}{2}$ est également fct propre de P

φ_j v.p de $\tilde{P}$ associé à v.p $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$.

Quand n est pair 1) est périodique $\to$ pas de trou spectral absolu

mais pour 2) $\quad \lambda^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi j}{n} = 1 - \frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et $t_{relax} = \frac{n^2}{\pi} + o(n^2)$.

on trouve ici directement $t_{mix}(\varepsilon) \geq \left(\frac{n^2}{\pi} - \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ qui est du bon ordre

En revanche $t_{mix}(\varepsilon) \leq \log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right) t_{relax}$

$\leq C\, n^2 \log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)$ manque la cible d'un facteur $\log(n)$.

Exple 2 : transpositions aléatoires.

Diaconis '88 $t_{relax} = n/2$. et on a vu plus tôt que

$$t_{mix} = \Theta(n \log n).$$

Les bornes du Thm 12.5 sont décevantes : (en particulier la borne sup. cf Ω "trop gros")

$$\begin{cases} t_{mix} \leq t_{relax} \log\left(\frac{4}{\sqrt{\pi_{min}}}\right) \leq C n^2 \log n. \\ t_{mix} \geq (t_{relax} - 1) \log(2) \geq c' n. \end{cases}$$

Exple 3 Chaînes produit.

Exo 18 $X_1, \dots, X_d$ de noyaux resp. $P_1, \dots, P_d$ sur $\Omega_1, \dots, \Omega_d$.

w dist sur $\{1, \dots, d\}$

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{d} w(j) P_j(x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{x_i = y_i\}} \text{ sur } \Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$$

1) $\lambda^{(j)}$ v.p de P_j, $j = 1, \dots, d$. fct propre $f^{(j)}$.

$$f : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ x \to \prod_{i=1}^{d} f^{(i)}(x_i) \end{cases}$$

$$Pf(x) = \sum_{y \in \Omega} \sum_{j=1}^{d} w(j) P_j(x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{x_i = y_i\}} \left(\prod_{k=1}^{d} f^{(k)}(y_k)\right).$$

$$= \sum_{j=1}^{d} w(j) \underbrace{\left(\sum_{y_j \in \Omega_j} P_j(x_j, y_j) f^{(j)}(y_j)\right)}_{\lambda^{(j)} f^{(j)}(x_j)} \prod_{k \neq j} f^{(k)}(y_k).$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{d} w(j) \lambda^{(j)}}_{= \lambda} f(x). = \lambda f(x).$$

et donc f est propre associée à $\lambda = \sum_{j=1}^{d} w(j) \lambda^{(j)}$.

2) $\gamma = \min_{1 \leq j \leq d} w_j \gamma_j$

3) (on peut réécrire la marche sur l'hypercube comme une ballade sur $\{-1, 1\}^d$.)

$$f^{(j,0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f^{(j,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x) = \prod_{j=1}^{d} f^{(j, \alpha_j)}(x_j)$$

est propre associée à $\frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \lambda^{(\alpha_j)}$

i.e. $1-\frac{k}{d}$ est propre, de multiplicité $\binom{d}{k}$, $k=0,1,\dots,d$.

trou spectral $\frac{1}{d}$. $t_{relax} = d$.

$$\left(t_{mix}(\varepsilon) \leq t_{relax} \log \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi_{min}}} = d\log\varepsilon + \frac{d}{2}\log(2^d) \right)$$

trop grossier

Mais : $\left\| \frac{P^t(x,\cdot)}{\pi} - 1 \right\|_{2,\pi}^2 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j^{2t}$ car la chaîne est transitive

$$= \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} \left(1-\frac{k}{d}\right)^{2t}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{d} e^{-\frac{2tk}{d}} \binom{d}{k} = \left(1+e^{-2t/d}\right)^d - 1.$$

$$\Rightarrow \max_x d_{TV}\left(P^t(x,\cdot),\pi\right)^2 \leq \left(1+e^{-2t/d}\right)^d - 1$$

$$\left(d\left(\frac{d\log d}{2} + cd\right)\right) \leq e^{e^{-2c}} - 1$$

et on conclut que $t_{mix}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2} d\log d + C_\varepsilon d$.

On avait vu que $t_{mix}(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} d\log d - C'_\varepsilon d$.

finalement $t_{mix}(\varepsilon) \sim \frac{1}{2} d\log d$

Anticipation : Ch XIII

Thm (Wilson) $(X_t)_{t\geq 0}$ irred. aper., ϕ propre associée à $\lambda \in (\frac{1}{2},1)$, $R>0$ t.q.

$$\mathbb{E}_x\left(|\phi(X_1)-\phi(x)|^2\right) \leq R \quad \forall x \in \Omega$$

$$\forall \varepsilon \in (0,1), x \in \Omega \quad t_{mix}(\varepsilon) \geq \frac{1}{2\log(1/\lambda)} \left[\log\left(\frac{(1-\lambda)\phi(x)^2}{2R}\right) + \log\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right].$$

hypercube : $\phi(x) = W(x) - \frac{d}{2} = \sum_{i=1}^{d} x_i - \frac{d}{2}$ propre pour $\lambda_2 = 1-\frac{1}{d}$.

$\mathbb{E}\left((\phi(X_1)-\phi(x))^2\right) = 1/2 \hookrightarrow R = 1/2$

$\hookrightarrow t_{mix}(\varepsilon) \geq \dots \sim \frac{1}{2} d\log d$.