III Exples utiles / classiques de CM.

Rappels :
1. 2 états
2. fenêtre
3. ruine du joueur
4. collectionneur de coupons
5. naissance & mort
6. modèle de conductances

} séances 1, 2 (chap. 2).

Prop 3.1 $\pi(x) = \frac{c_x}{c_{\mathcal{G}}}$, $x \in \mathcal{V}$.

$c(e) = 1 \ \forall e \in \mathcal{E}$ } marche simple sur le graphe $\mathcal{G}$

Thm 3.2 tte chaîne rév. peut être représentée par un modèle de conductances.

(7) Marche sur groupe G fini

μ distribution sur G $\qquad P(x, gx) = \mu(g) \quad \forall g \in G$.

Thm 3.3
i) L'dist unif. sur G est lpj stationnaire
ii) irréductibilité $\iff \{h : \mu(h) > 0\}$ engendre G.
iii) réversible $\iff \mu(g^{-1}) = \mu(g) \quad \forall g \in G$.

Exples : mélanges / top-to-random (irred., non rév)
coupes (non irréd)
random transpositions (irred, rev)

(marche sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$) $\longleftrightarrow$ marche sur l'hypercube $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d, \mathcal{E})$
} marche simple
marche simple paresseuse.

$\mathcal{E}$: $(x,y) \in \mathcal{E}$ si $\|x-y\|_1 \leq 1$

marche sur tore discret $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$. $\mathcal{E}$ idem.
(sont irréd, réversibles.)

(7bis) Les marches sur groupes sont des chaînes transitives.

Déf : X de noyau P sur Ω est transitive ssi
$\forall (x,y) \in \Omega^2 \ \exists \varphi_{(x,y)} : \Omega \to \Omega$ bijection t.q. $\varphi(x) = y$
$P(z,w) = P(\varphi(z), \varphi(w))$
$\forall (z,w) \in \Omega^2$.

↳ dist unif est stationnaire.

(8) random mapping representation

$\{Z_n\}$ iid à valeurs ds Λ. $\quad \varphi : \Omega \times \Lambda \to \Omega \qquad X_{n+1} = \varphi(X_n, Z_{n+1})$

$$P(x,y) = \mathbb{P}(Z_1 \in A_{x,y}) = \sum_{z \in A_{x,y}} \mathbb{P}(Z_1 = z)$$

où $A_{x,y} = \{z \in \Omega : \varphi(x,y) = z\}$.

Exple : $\varphi : \Omega \times \{1,\dots,d\} \times \{0,1\} \longrightarrow \Omega$

$$(x, j, b) \longrightarrow (x_1, \dots, x_{j-1}, b, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

permet de retrouver une marche paresseuse sur l'hypercube

$Z \sim \mathrm{Unif}\{1,\dots,d\} \otimes \mathrm{Unif}\{0,1\}$ pour la marche simple symétrique, paresseuse

(↳ ou direct pour la suite la marche paresseuse sur l'hypercube)

(9) Chaîne projetée (exo 19)

Q naturelle : $\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega_2$, $x \longrightarrow \varphi(x)$

$(X_n)_{n\geq 0}$ chaîne sur Ω

$(\varphi(X_n))_{n\geq 0}$ est-elle une chaîne sur $\tilde{\Omega}$ a priori non.

Quitte à voir les antécédents des points de $\tilde{\Omega}_2$ ĉ des classes pour la relation $\sim$: $x \sim y$ ssi $\varphi(x) = \varphi(y)$

on a bien une chaîne de Markov pourvu que

$$P(x, \tilde{y}) = \sum_{y \in \tilde{y}} P(x,y)$$ ne dépend pas du choix de $x \in \tilde{x}$.

2 exples : • marche sur cercle discret → marche sur segment

• marche sur hypercube (simple sym) → Ehrenfest.

(10) Chaîne produit : $X^{(j)}$ marche sur Ω_j, ν loi sur $\{1,\dots,d\}$

$X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ sur $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$

$$P(x,y) = \sum_{j=1}^{d} \nu(j) P_j(x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{x_i = y_i\}}$$

Exple marche sur le cercle discret → marche sur le tore discret d-dim

chaîne à deux états → marche paresseuse sur l'hypercube

IV Distance en variation totale

Déf 4.1 μ, ν probas sur Ω

$$d_{TV}(\mu,\nu) = \|\mu-\nu\|_{TV} := \sup_{A\subset\Omega} \mu(A)-\nu(A).$$

Prop 4.2 : $\|\mu-\nu\|_{TV} = \sum_{x:\mu(x)\geq\nu(x)} \mu(x)-\nu(x) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega} |\mu(x)-\nu(x)|.$

$$= 1 - \sum_{x\in\Omega} (\mu(x)\wedge\nu(x)).$$

Exple (exo 6) $X\sim Ber(p)$, $X\sim\nu$ $\quad Y\sim Po(p)$, $Y\sim\mu$ $\quad \|\mu-\nu\|_{TV} = p(1-e^{-p})$.

Preuve :

$B = \{x\in\Omega : \mu(x)\geq\nu(x)\}$

$$\mu(A)-\nu(A) \leq \mu(A\cap B)-\nu(A\cap B) \leq \mu(B)-\nu(B)$$

$\mu(A\cap B^c)-\nu(A\cap B^c)\leq 0$

donc B réalise le sup. et on a la 1ère égalité

B^c réalise $-\sup$ donc on a la 2e

enfin $\sum_{x\in\Omega}\mu(x)\wedge\nu(x) = \sum_{x\in B^c}\mu(x) + \sum_{x\in B}\nu(x)$

$$\|\mu-\nu\|_{TV} + \sum_{x\in\Omega}(\mu(x)\wedge\nu(x)) = \sum_{x\in B}\mu(x) + \sum_{x\in B^c}\mu(x) = 1.$$

Prop 4.3 $\|\mu-\nu\|_{TV} = \frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{x\in\Omega} f(x)(\mu(x)-\nu(x)) : \|f\|_\infty\leq 1\right\}$

(i) $\sum f(x)\,\mu(x)-\nu(x) \leq \|f\|_\infty \sum|\mu(x)-\nu(x)| \leq 2\|\mu-\nu\|_{TV}$.

(ii) $f = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{B^c}$

Thm 4.4 : $\|\mu-\nu\|_{TV} = \inf\{\mathbb{P}(X\neq Y) : (X,Y) \text{ couplage de } \mu \,\&\, \nu\}$.

où (X,Y) couplage de μ & ν pourvu que $\mathbb{P}_X=\mu$, $\mathbb{P}_Y=\nu$.

Preuve : $\mathbb{P}(X\neq Y) \geq \mathbb{P}(X\in A, Y\in A^c) = \mathbb{P}(X\in A) - \mathbb{P}(X\in A, Y\in A)$

$$\geq \mu(A)-\nu(A) \quad \forall A\subset\Omega.$$

d'où $\mathbb{P}(X\neq Y) \geq \|\mu-\nu\|_{TV}$

Reste à trouver X & Y $\quad P_X = \mu$, $P_Y = \nu$ et $P(X \neq Y) = \|\mu - \nu\|_{TV}$

(i) Supposons $p := \sum_{x \in \Omega} \mu(x) \wedge \nu(x) \in (0,1)$

$Z_0 \sim \gamma_0$ où $\forall x \in \Omega \quad \gamma_0(x) = \dfrac{\mu(x) \wedge \nu(x)}{\sum_{x \in \Omega} \mu(x) \wedge \nu(x)} = \dfrac{\mu(x) \wedge \nu(x)}{p}$

$Z_1 \sim \gamma_1$ où $\gamma_1(x) = \dfrac{\mu(x) - \nu(x)}{1-p}$, $x \in B$

$Z_2 \sim \gamma_2$ où $\gamma_2(x) = \dfrac{\nu(x) - \mu(x)}{1-p}$, $x \in B^c$.

$$X = \xi Z_0 + (1-\xi) Z_1$$
$$Y = \xi Z_0 + (1-\xi) Z_2 \quad \text{où } \xi \sim \mathrm{Ber}(p)$$
$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - p = \|\mu - \nu\|_{TV}.$$

(ii) Si $p = 0$ $\quad \mu \perp \nu$, $\quad \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 = \|\mu - \nu\|_{TV}$ choix de X, Y pas important

(iii) Si $p = 1$ $\quad \mu = \nu$, on peut prendre $X = Y$ et $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0 = \|\mu - \nu\|_{TV}$.

<u>Thm 4.5</u> (convergence) Rappelons $d(t) = \max_{x \in \Omega} \|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{TV}$

$\exists \alpha \in [0,1)$ tq $d(t) \leq C\alpha^t$.

<u>Preuve</u> Par aréd, apér. $\exists r \in \mathbb{N} \quad P^r(x,y) \geq \delta \pi(y) \quad \forall x, y \in \Omega$

Notons $\Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$ de sorte que $\Pi P = \Pi$

et $P\Pi = \Pi$ car P stoch.

$P^r = (1-\theta)\Pi + \theta Q$ avec méc. $Q\Pi = \Pi$.

$\hookrightarrow P^{rk} = (1-\theta^k)\Pi + \theta^k Q^k$.

$$P^{r(k+1)} = (1-\theta^k)\Pi + \theta^k Q^k((1-\theta)\Pi + \theta Q)$$
$$= (1-\theta^{k+1})\Pi + \theta^{k+1} Q^{k+1}$$

Par ailleurs $P^{(rk+j)} - \Pi = (1-\theta^k)\Pi + \theta^k Q^k P^j - \Pi = \theta^k \underbrace{(Q^k P^j - \Pi)}_{\max_x \frac{1}{2} \sum |\ | \leq \|\ \|_{TV} \leq 1}$

d'où $\|P^{(rk+j)} - \Pi\|_{TV} \leq \theta^k$ comme souhaité.

Rappels : • $\|\mu-\nu\|_{TV} = \sup_{A\subset\Omega} \mu(A)-\nu(A) = \sum_{x:\mu(x)\geq\nu(x)} \mu(x)-\nu(x) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega}|\mu(x)-\nu(x)|$

$= \inf\{\mathbb{P}(X\neq Y),\ (X,Y) \text{ couplage de } \mu \text{ et } \nu\}$

• d_{TV} est distance sur $\mathcal{P}(\Omega)$

• $d(t) = \max_{x\in\Omega} \|P^t(x,\cdot)-\pi\|_{TV}$

Thm 4.5 (de convergence*) X irréd, apér. $\exists\, \alpha\in[0,1[$ $C\geq 0$ t.q $d(t)\leq C\alpha^t$.

Preuve $\exists\, \delta>0$, $\exists\, r\in\mathbb{N}$ $P^r(x,y)\geq \delta\pi(y)$ $\forall x,y\in\Omega$. par irréd, apér.

$\delta = 1-\theta$ $P^r = (1-\theta)\Pi + \theta Q$. $\Pi = \begin{pmatrix}\pi\\ \vdots \\ \pi\end{pmatrix}$ Q stoch., $\pi Q = \pi$.

Lemme : $P^{rk} = (1-\theta^k)\Pi + \theta^k Q^k$

Véif : $P^{r(k+1)} = \left((1-\theta^k)\Pi + \theta^k Q^k\right)\left((1-\theta)\Pi + \theta Q\right)$

$= \left[(1-\theta^k)(1-\theta) + (1-\theta^k)\theta + \theta^k(1-\theta)\right]\Pi + \theta^{k+1}Q^{k+1}$

$= (1-\theta^{k+1})\Pi + \theta^{k+1}Q^{k+1}$ ✓

$P^{rk+j} - \Pi = (1-\theta^k)\Pi + \theta^k Q^k P^j - \Pi = \theta^k\left[Q^k P^j - \Pi\right]$.

$\|P^{rk+j}(x,\cdot) - \Pi\|_{TV} = \theta^k \|Q^k P^j(x,\cdot) - \pi\|_{TV} \leq \theta^k$. □

Déf 4.6 : $\bar{d}(t) = \max_{x,y\in\Omega} \|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{TV}$

Prop 4.7 $d(t)\leq \bar{d}(t)\leq 2d(t)$

Preuve : seconde inégalité évidente grâce à inég. triang.

$d(t) = \max_{x\in\Omega}\sup_{A\subset\Omega} P^t(x,A) - \pi(A) \leq \max_x \sup_A \sum_{y\in\Omega} |P^t(x,A)\pi(y) -$

$\leq \max_x \sum_{y\in\Omega}\pi(y) \underbrace{\sup_A |P^t(x,A) - P^t(y,A)|}_{\leq \bar{d}(t)} |P^t(y,A)\pi(y)|$

$\leq \bar{d}(t)$.

Prop 4.8 $\bar{d}(t+s) \leq \bar{d}(t)\,\bar{d}(s)$

Preuve $\|P^{t+s}(x,\cdot) - P^{t+s}(y,\cdot)\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{w} \left|\mathbb{E}_{x,y}\left[P^t(X_s,w) - P^t(Y_s,w)\right]\right|$ pourvu que $X_s \sim P^s(x,\cdot)$, $Y_s \sim P^s(y,\cdot)$ ss $\mathbb{P}_{x,y}$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{w} \mathbb{E}_{x,y}\left[|P^t(X_s,w) - P^t(Y_s,w)|\,\mathbb{1}_{\{X_s \neq Y_s\}}\right]$$

$$\leq \bar{d}(t)\,\mathbb{P}_{x,y}(X_s \neq Y_s)$$

$$\leq \bar{d}(t)\,\bar{d}(s)$$ quitte à prendre X_s & Y_s réalisant couplage optimal de $P^s(x,\cdot)$ et $P^s(y,\cdot)$

Prop 4.9 $t_{mix}(\varepsilon) \leq \left\lceil \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\rceil t_{mix}$.

Preuve $d(\ell t_{mix}) \underset{4.7}{\leq} \bar{d}(\ell t_{mix}) \underset{4.8}{\leq} \bar{d}(t_{mix})^{\ell} \underset{4.7}{\leq} (2d(t_{mix}))^{\ell} \leq \frac{1}{2^{\ell}}$ □

Exo 6 : $\mu \sim Ber(p)$ $\nu \sim Poi(p)$ $\|\mu - \nu\|_{TV} = p(1-e^{-p})$.

Exo 7

$$\|\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{y\in\mathbb{Z}} \mu_1(y)\mu_2(x-y) - \sum_{y\in\mathbb{Z}} \nu_1(y)\nu_2(x-y)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{y}\sum_{z} |\mu_1(y)\mu_2(z) - \nu_1(y)\nu_2(z)|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{y}\sum_{z} |\mu_1(y)\mu_2(z) - \nu_1(y)\mu_2(z)| + |\nu_1(y)\mu_2(z) - \nu_1(y)\nu_2(z)|\right)$$

$$\leq \|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} + \|\nu_1 - \nu_2\|_{TV}.$$

Exo 8 : μ_n loi de $\sum_{m=0}^{n} \xi_{n,m}$, $\xi_{n,m} \sim Ber(p_{n,m})$. $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} = \lambda_n$

ν_n loi de $Poi(\lambda_n)$ $\lambda_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

d'après exo 7 $\|\mu_n - \nu_n\|_{TV} \leq \sum_{m=1}^{n} p_{n,m}\left(1 - \exp(-p_{n,m})\right)$

$\|\mu_n - \nu\|_{TV} \longrightarrow 0$ pourvu que $\max_m p_{n,m} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$

Exo 9 $\quad X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$Y \sim \mathrm{Bin}(n,q)$ $\qquad p \leq q$.

1) $$\|P_X - P_Y\|_{TV} = \mathbb{P}(X \leq k_0) - \mathbb{P}(Y \leq k_0)$$

où $k_0 = \lceil n\, c(p,q) \rceil$.

2) $p = 1/2 \qquad q = q_n = \frac{1}{2} + \frac{c}{2\sqrt{n}}$ $\qquad \mathbb{E}[Y_n] = \frac{n}{2} + \frac{c\sqrt{n}}{2}$.

$\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{n}{4} - \frac{c^2}{4}$.

Ici $k_0 = \frac{n}{2} + \frac{c\sqrt{n}}{4} + O(1)$

$$\mathbb{P}(X \leq k_0) = \mathbb{P}\left(\frac{2X-n}{\sqrt{n}} \leq \frac{c}{2} + O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\,\infty]{} \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{c}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(Y_n \leq k_0) = \mathbb{P}\left(\frac{2Y_n - n - c\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leq -\frac{c}{2} + O\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\,\infty]{} \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-c}{2}\right)$$

e.g TCL pour martingales

$$\|P_X - P_{Y_n}\|_{TV} \xrightarrow[n\,\infty]{} \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{c}{2}\right).$$

Généralisation $X \sim \mathrm{Bin}(n,p_n)$ $\quad Y \sim \mathrm{Bin}(n,q_n)$, $\quad p_n \xrightarrow[n\,\infty]{} p$, $q_n \xrightarrow[n\,\infty]{} p$.

$p_n - q_n \ll 1/\sqrt{n} \qquad \|P_{X_n} - P_{Y_n}\|_{TV} \xrightarrow[n\,\infty]{} 0$

$p_n - q_n \gg 1/\sqrt{n} \qquad \|P_{X_n} - P_{Y_n}\|_{TV} \xrightarrow[n\,\infty]{} 1$

$p_n - q_n \sim \alpha\sqrt{n}$. $\qquad \|P_{X_n} - P_{Y_n}\|_{TV} \longrightarrow f(\alpha) \in (0,1)$.

Idée : si j'efface/change $\alpha \ll \sqrt{n}$ bits, on n'est pas capable de détecter une différence.

Exo 11 : $d(t) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}(\Omega)} \|\mu P^t - \pi\|_{TV}$

$\bar{d}(t) = \sup_{\mu,\nu \in \mathcal{P}(\Omega)} \|\mu P^t - \nu P^t\|_{TV}$.

Exo 12 $\bar{d}_t^P(\mu,\nu) = \|\mu P^t - \nu P^t\|_{TV}$

↳ pseudo-distance sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

2. eg $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. $P \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ t.q $p+q \neq 1$

4. $\bar{d}_t^P(\mu,\nu) = \inf \{ \mathbb{P}(X \neq Y) \quad X \sim \mu P^t \quad Y \sim \nu P^t \}$.

soient (X_t, Y_t) réalisant couplage optimal

$X_{t+1} \sim P(X_t, \cdot)$

$Y_{t+1} = \begin{cases} X_{t+1} \text{ si } X_t = Y_t \\ \sim P(Y_t, \cdot) \text{ indep de } X_{t+1} \text{ sinon} \end{cases}$

$$\bar{d}_{t+1}^P(\mu,\nu) \leq \mathbb{P}(X_{t+1} \neq Y_{t+1}) \leq \mathbb{P}(X_t \neq Y_t) = \bar{d}_t^P(\mu,\nu).$$

5. $d(t) = \max_x \bar{d}_t^P(\delta_x, \pi)$ réalisé en x_t.

$$d(t+1) = \bar{d}_{t+1}^P(\delta_{x_{t+1}}, \pi) \leq \bar{d}_t^P(\delta_{x_{t+1}}, \pi) \leq d(t).$$

et donc $t \to d(t) \searrow$.

On m'a pas montré que $t \to \bar{d}(t) \searrow$. (cependant c'était évident pour ss mult : $\bar{d}(t+1) \leq \bar{d}(1)\bar{d}(t)$ et $\bar{d}(1) \leq 1$.)

V Couplage de chaînes

Déf 5.1 : $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ est un couplage de chaînes de noyau P ssi $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ sont toutes deux des chaînes de noyau P.

On dit que c'est un couplage markovien si (X,Y) est elle-même une CM.

Déf 5.2 : On dit qu'on a affaire à un couplage coalescent si

$$X_s = Y_s \Rightarrow X_t = Y_t \quad \forall t \geq s.$$

Déf 5.3 : On dit qu'on a affaire à un grand couplage lorsque $(X_t^x, t\geq 0, x\in \mathcal{X})$ est tq $(X_t^x)_{t\geq 0}$ marche δ_x, P $\forall t\geq 0$

Exptes : ⓐ couplage indép : $X_{t+1} \sim P(X_t, \cdot)$ indép de $Y_{t+1} \sim P(Y_t, \cdot)$

ⓑ couplage libre grâce à random mapping representation

$$X_{t+1} \overset{(loi)}{=} f(X_t, U_{t+1}) \quad \text{où } U_{t+1} \sim \mathrm{Unif}[0,1], \text{ indép de } \mathcal{F}_t$$

On pose alors
$$X_{t+1} = f(X_t, U_{t+1}) \qquad \forall t\geq 0$$
$$Y_{t+1} = f(Y_t, U_{t+1})$$

ⓒ indép. coalescent (Doeblin) $X_{t+1} \sim P(X_t, \cdot)$

$$Y_{t+1} = \begin{cases} X_{t+1} & \text{si } Y_t = X_t \\ Y_{t+1} \sim P(Y_t, \cdot) \text{ indép.} & \text{sinon} \end{cases}$$

Rque ⓑ, ⓒ sont des couplages coalescents, mais pas ⓐ.

Prop 5.4 : A tout couplage (X,Y) on peut associer (X,Z) couplage coalescent

$$\tau = \inf\{t\geq 0 : X_t = Y_t\}$$
$$Z_t = \begin{cases} Y_t & \text{si } t\leq \tau \\ X_t & \text{si } t > \tau \end{cases}$$

(Sauf mention contraire, dans la suite on travaillera syst. avec des couplages coalescents.)

Thm 5.5 : (X,Y) couplage de noyau P, $\mathbb{P}_{x,y}(X_0 = x, Y_0 = y) = 1$

$\tau_{couple} = \inf\{t\geq 0 : X_t = Y_t\}$. Alors $\| P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{TV} \leq \mathbb{P}_{x,y}(\tau_{couple} > t)$

Preuve : quitte à considérer (X,Z) couplage valement associé

$$\|P^t(x,\cdot) - P^t(y,\cdot)\|_{TV} \leq \mathbb{P}_{x,y}(X_t \neq Z_t) = \mathbb{P}_{x,y}(\tau_{couple} > t).$$

Corollaire 5.5 $\quad d(t) \leq \max_{x,y} \mathbb{P}_{x,y}(\tau_{couple} > t)$

Exple 1 (Exo 17) marche sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d =: \mathbb{Z}_n^d$, paresseuse

indep de $\mathcal{F}_t$ où tire

$i_{t+1} \sim \mathrm{Unif}\{1,\dots,d\}$ → coordonnée i suivant laquelle on va faire évoluer les 2 chaînes au temps $t+1$

$\varepsilon_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{proba } 1/4 \\ -1 & \text{— } 1/4 \\ 0 & \text{— } 1/2 \end{cases}$ → évolution des 2 coordonnées lorsque $X_t^i = y_t^i$. i.e lorsque la i^e coord des 2 chaînes coïncide déjà au tps t

si $X_t^i \neq y_t^i$

$B_{t+1} \sim \mathrm{Ber}(1/2)$ → choix de la chaîne qui se repose

$\varepsilon_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{proba } 1/2 \\ -1 & \text{— } 1/2 \end{cases}$ → évolution de la chaîne qui se déplace

i.e on pose $y_{t+1}^{i_{t+1}} = X_{t+1}^{i_{t+1}} = X_t^{i_{t+1}} + \varepsilon_{t+1}$ si $X_t^{i_{t+1}} = y_t^{i_{t+1}}$

$$\begin{cases} X_{t+1}^{i_{t+1}} = X_t^{i_{t+1}} + B_{t+1}\varepsilon_{t+1} \\ y_{t+1}^{i_{t+1}} = y_t^{i_{t+1}} + (1-B_{t+1})\varepsilon_{t+1} \end{cases} \quad \text{si } X_t^{i_{t+1}} \neq y_t^{i_{t+1}}$$

1) $\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t \mid (X_t, y_t) = (x,y)) = \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(i_{t+1} = i)\left[\mathbb{P}(\varepsilon_{t+1} = 0)\mathbb{1}_{\{x^i = y^i\}} + \mathbb{P}(B_{t+1} = 0)\mathbb{1}_{\{x^i \neq y^i\}}\right] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X_{t+1} = X_t + e_i \mid (X_t, y_t) = (x,y)) = \mathbb{P}(i_{t+1} = i)\left[\underbrace{\mathbb{P}(\varepsilon_{t+1} = 1)}_{=1/4}\mathbb{1}_{\{x^i = y^i\}} + \underbrace{\mathbb{P}(B_{t+1} = 1, \varepsilon_{t+1} = 1)}_{=1/4}\mathbb{1}_{\{x^i \neq y^i\}}\right]$

$= \frac{1}{4d}$

donc $(X_t)_{t\geq 0}$, de m̂ $(y_t)_{t\geq 0}$ sont bien des marches paresseuses sur $\mathbb{Z}_n^d$.

2) $Z_t^i := X_t^i - Y_t^i$ est une CM de noyau Q sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} Q(0,0) = 1 \\ Q(k,k) = \frac{d-1}{d} \\ Q(k,k-1) = Q(k,k+1) = \frac{1}{2d}, \quad \forall k \in \{1,\dots,n-1\}. \end{cases}$$

i.e $(Z_t^i)_{t\geq 0}$ marche simple $\left(\frac{d-1}{d}\right)$-paresseuse sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, absorbée en 0.

3) $\mathbb{E}_{x,y}\left[\inf\{t\geq 0 : Z_t^i = 0\}\right] = d\,(x_i - y_i)^2$ cf ruine du joueur.

$\max_{x,y} \mathbb{E}_{x,y}[\tau_i] = d\,\frac{n^2}{4}$ et $\mathbb{E}[\tau_{couple}] \leq \frac{d^2 n^2}{4}$

4.) $\max_{x,y} \mathbb{P}_{x,y}[\tau_{couple} > t] \leq \frac{d^2 n^2}{4t}$

finalement $t_{mix} \leq d^2 n^2$

$t_{mix}(\varepsilon) \underset{4.9}{\leq} d^2 n^2 \lceil \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil$.

Rque : en travaillant un peu plus, on peut obtenir $t_{mix}(\varepsilon) \leq C_0 (d \log d) n^2 \lceil \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil$ (voir Exo 5.4)

Exple 2 marche paresseuse sur $\mathbb{Z}_2^d$.

Indep de $\mathcal{F}_t$ $i_{t+1} \sim \mathrm{Unif}\{1,\dots,d\}$, et on pose $X_{t+1}^{i_{t+1}} = Y_{t+1}^{i_{t+1}} = B_{t+1}$ (couplage c'est le libre !).

$B_{t+1} \sim \mathrm{Ber}(1/2)$

Si $x^i \neq y^i$ $\forall i = 1,\dots,d$, $\tau_{couple} = \inf\{t\geq 0 : \{i_1,\dots,i_t\} = \{1,\dots,d\}\}$
$= \tau_{collec}^{(d)}$.

d'après exo I 4 $\mathbb{P}(\tau_{couple} \geq d\log d + cd) \leq e^{-c}$

et $t_{mix} \leq d\log d + \log(4)\, d$.

$t_{mix}(\varepsilon) \leq d\log d + \lceil \log(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil d$

⚠ pas une borne optimale (!) cf exo I 9

⚠ ici la méthode directe donne meilleure borne que 4.9.

~~Déf 5.6 : "Grand couplage" : $\left((X_t^x)_{t\geq 0}, x\in\Omega\right)$ t.q. $\forall x\in\Omega$ $(X_t^x)_{t\geq 0}$ est Markov (δ_x, P).~~

On a tjs une "random mapping rep." et donc

Prop 5.6 : Le couplage libre permet toujours de définir un grand couplage.

(cf exple 2 + haut)

Exple 3 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ $\Omega = \{$coloriage admissible de $\mathcal{G}$ avec q couleurs$\}$ $\subseteq \{1,\dots,q\}^{\mathcal{V}}$,

on suppose q assez grand pour que $\Omega \neq \emptyset$.

grand couplage : $v_{t+1} \sim \mathrm{Unif}\{\mathcal{V}\}$.

$k_{t+1} \sim \mathrm{Unif}\{1,\dots,q\}$.

si le coloriage reste admissible $X_{t+1}(v_{t+1}) = k_{t+1}$,

les couleurs des autres noeuds restent inchangées.

Exo III.3 : $d^\circ_{max} = \Delta$, $q > 3\Delta$, $|\mathcal{V}| = n$ $t_{mix}(\varepsilon) \leq \left\lceil \frac{q}{q-3\Delta} n \left(\log(n) + \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\right\rceil$.

Exple 4 (Exo 18) marche paresseuse, simple, sur l'arbre binaire de profondeur k

on note $|v|$ la profondeur de v.

1) $(|X_t|, t\geq 0)$ reste Markov, de noyau Q :

$$\begin{cases} Q(\ell,\ell) = 1/2 & \forall \ell \in \{0,\dots k\} \\ Q(0,1) = Q(k,k-1) = 1/2 \\ Q(\ell,\ell-1) = 1/6, \quad Q(\ell,\ell+1) = \frac{1}{3} & \forall \ell \in \{1,\dots,k-1\}. \end{cases}$$

2) π mes. stat. de X, prop au d°. , l'arbre compte $n = 2^{k+1}-1$ noeuds

$2^{k+1}-2$ arêtes

donc $d_{\mathcal{G}} = \sum_{x\in T} d^\circ_x = 2^{k+2}-4$.

$= 2n-2$

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n-2} & \text{si } |x| = k \\ \frac{3}{2n-2} & \text{si } |x| \in \{1,\dots,k-1\} \\ \frac{2}{2n-2} & \text{si } |x| = 0 \end{cases}$$

λ mes. stat. de $|X|$: $\lambda(\ell) = \sum_{x : |x| = \ell} \pi(x)$

$$= \begin{cases} \frac{2}{2n-2} & \text{si } \ell = 0 \\ \frac{3 \cdot 2^\ell}{2n-2} & \text{si } \ell \in \{1, \dots, k-1\} \\ \frac{2^k}{2n-2} & \text{si } \ell = k. \end{cases}$$

3) Markov fournit une relation de rec. sur $\mathbb{E}_i[\tau_k] - \mathbb{E}_{i+1}[\tau_k] = u_i$
et sur $\mathbb{E}_i[\tau_0] - \mathbb{E}_{i-1}[\tau_0] = v_i$.

$\hookrightarrow$ $E = 4n - 12 + O(1/n)$

4) (X, Y) couplage : • si $|X_t| = |Y_t|$ on fait le m̂ mvt "ds l'arbre au tps $t+1$.

• sinon on tire $B_{t+1} \sim Be(1/2)$ et on fait évoluer X si $B_{t+1} = 1$ et sinon Y

quitte à supposer $|x| < |y|$

les hauteurs coïncident au + tard lorsque X atteint la profondeur k, disons en τ_1
(puisque $|X_t| \leq |Y_t|$ $\forall t \geq 0$)

les chaînes coïncident au + tard lorsque X retourne à la racine après τ_1,
disons en $\tau_2 = \inf\{t \geq \tau_1 : |X_t| = 0\}$.

$\forall x, y$ $\quad \tau_{couple} \leq \tau_2$, $\quad \mathbb{E}[\tau_2] \leq E$

on déduit $\quad \max_{x,y} \mathbb{P}_{x,y}(\tau_{couple} > t) \leq \frac{E}{t} = \frac{4n - 12 + O(1/n)}{t}$

et donc $t_{mix} \leq 16n$,

$t_{mix}(\varepsilon) \leq 16n \lceil \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil$.

Rque : bon ordre de grandeur !
On verra + tard que t_{mix} est bien d'ordre n