

Exo 18 1) marche simple paressseuse sur arbre linéaire de prof. k .

1) $\{X_t\}$ reste Markov : e.g. $\forall w: |w| = i \in \{1, \dots, k-1\}$

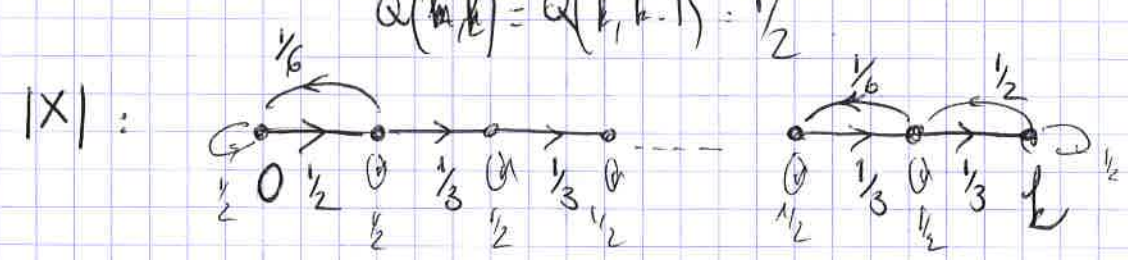
$$Q(i, i-1) = \sum_{|w|=i-1} P(o, w) = \frac{1}{6}$$

$$Q(i, i+1) = \sum_{|w|=i+1} P(o, w) = \frac{1}{3}$$

$$Q(i, i) = \sum_{|w|=i} P(o, w) = \frac{1}{2}$$

De m $Q(0,0) = Q(0,1) = \frac{1}{2}$

$Q(k,k) = Q(k, k-1) = \frac{1}{2}$



2) π mes. stat. de X : $\sum_{x \in \mathcal{E}} d^0 x = 2 \sum_{e \in \mathcal{E}} 1 = 2 \# \mathcal{E} = 2n - 2 = 2^{k+2} - 4$

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+2}-4} & \text{si } |x| = k \\ \frac{3}{2^{k+2}-4} & \text{si } k-1 \geq x \geq 1 \\ \frac{2}{2^{k+2}-4} & \text{si } x = \emptyset \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \lambda(i) = 2^i \times \begin{cases} \frac{2}{2^{k+2}-4} & \text{si } i = 0 \\ \frac{3}{2^{k+2}-4} & \text{si } i \in [1, k-1] \\ \frac{1}{2^{k+2}-4} & \text{si } i = k \end{cases}$$

3) $\mu_i = \mathbb{E}_{i-1}[\tau_k] - \mathbb{E}_i[\tau_k]$
 $\nu_i = \mathbb{E}_i[\tau_0] - \mathbb{E}_{i-1}[\tau_0]$

$\leadsto E = 2^{3+k} + 2^{3-k} - 16 = 4n - 12 + O(\frac{1}{n})$

4) quite à décomposer suivant que $|X| = |Y|$ ou $|X| \neq |Y|$, on trouve bien que X (et Y) sont des marches simples paressseuses sur \mathcal{T} .

5) $d(t) \leq \frac{E}{t} \leq \frac{4n}{t}$ et $t_{mix}(t) \leq 16n \lceil \log_2(\frac{1}{\epsilon}) \rceil$ Rque : bon ordre de grandeur...

Exo III.3

$(\sigma_t, c_t)_{t \geq 0}$ iid unif $\sigma \times \{1, \dots, q\}$

$$\begin{cases} \mathcal{R}^{\sigma, c}(A) = c \\ \mathcal{R}^{\sigma, c}(\omega) = \mathcal{R}(\omega) \quad \forall \omega \neq \sigma \end{cases}$$

$$X_t = X_{t-1}^{\sigma_{t-1}, c_{t-1}} \mathbb{1}_{\{X_{t-1}^{\sigma_{t-1}, c_{t-1}} \in \Omega\}} + X_{t-1} \mathbb{1}_{\{X_{t-1}^{\sigma_{t-1}, c_{t-1}} \notin \Omega\}}$$

- 1) + tard
- 2) évident : c'est le couplage libre
- 3) $p(x, y) = \sum_{v \in \Omega} \mathbb{1}_{\{x(v) \neq y(v)\}}$

si $p(x, y) = 1$,
alors $x(v) \neq y(v)$

$$p(X_1^x, X_1^y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_t = \sigma, \text{ et si } c_t \text{ et l.g. } \mathcal{R}^{\sigma, c} \in \Omega \\ & P(\dots) \geq \frac{1}{n} \times \frac{q-\Delta}{q} \\ 2 & \text{si } \sigma_t = \omega \sim \sigma \text{ et si } c_t \in \{x(v), y(v)\} \\ & P(\dots) \leq \frac{\Delta}{n} \times \frac{2}{q} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[p(X_1^x, X_1^y) - 1] \leq \frac{2\Delta - q + \Delta}{nq} = \frac{3\Delta - q}{nq} < 0$$

4) Observ : On peut définir une dynamique similaire sur $\Omega^{\{1, \dots, q\}}$:

$$X_t = X_{t-1}^{\sigma_{t-1}, c_{t-1}} \mathbb{1}_{\{X_{t-1}(\omega) \neq c_{t-1} \quad \forall \omega \sim \sigma_{t-1}\}} + X_{t-1} \mathbb{1}_{\{X_{t-1}(\omega) = c_{t-1}\}}$$

⊛ note donc vrai \hat{m}_i lorsque $x, y \in \Omega^{\{1, \dots, q\}}$ (et non $m \in \Omega$) $X_{t-1}(\omega) = c_{t-1}$
 quitte à considérer $\Omega^{\{1, \dots, q\}}$ il est clair que l'on peut trouver

$$x_0 = x, x_1, \dots, x_{t-1}, x_t = y \quad \text{alors } p(x, y) = n$$

$$\text{avec } p(x_k, x_{k+1}) = 1 \quad \forall k = 0, \dots, t-1$$

Mais alors $\mathbb{E}[p(X_1^x, X_1^y)] \leq \sum_{k=1}^t \mathbb{E}[p(X_1^{x_k}, X_1^{x_{k+1}})]$ pas \leq
triang.
pour p .

d'où $E[p(X_t^x, X_t^y)] \leq n \left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right)$

(VI-2)

↳ par Markov $E[p(X_t^x, X_t^y)] \leq p(x,y) \left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right)^t$

$$\mathbb{P}_{x,y}(\tau_{\text{couple}} > t) = \mathbb{P}(X_t^x \neq X_t^y) = \mathbb{P}(p(X_t^x, X_t^y) \geq 1) \leq p(x,y) \left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right)^t$$

$$d(t) \leq \max_{x,y} \mathbb{P}_{x,y}(\tau_{\text{couple}} > t) \leq n \left(1 - \frac{q-3\Delta}{nq}\right)^t \leq n \exp\left(-\frac{t}{n} \frac{q-3\Delta}{q}\right)$$

donc $d(t) \leq \varepsilon$ pourvu que $t \geq \left\lceil n \cdot \frac{q}{q-3\Delta} \left(\log n + \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \right\rceil$

et $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \text{Cste}(q, \Delta) n (\log n + \log \frac{1}{\varepsilon})$

VI Temps stationnaires - tps stationnaires forts

Def 6.1 : $(X_t)_{t \geq 0}$ chaîne de Markov de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

On dit que τ est un tps stationnaire fort si c'est un (\mathcal{F}_t) -tps d'arrêt t.q

$$\mathbb{P}_x(\tau = t, X_t = y) = \mathbb{P}_x(\tau = t) \pi(y)$$

Remarque : Il peut être parfois pratique d'utiliser $\mathcal{F}_t \supseteq \sigma(X_s, s \leq t)$.

Exemple 1 marche simple pausable sur $\{0,1\}^d$

$$(i_t, B_t)_{t \geq 0} \text{ iid } \sim \text{Unif}(\{1, \dots, d\}) \otimes \text{Ber}(1/2)$$

$$X_{t+1}^{i_{t+1}} = B_{t+1}, \quad X_{t+1}^j = X_t^j \quad \forall j \neq i_{t+1}$$

On prend $\mathcal{F}_t = \sigma(i_s, B_s, s \leq t)$
 qui est strict. + fine que $\sigma(X_s, s \leq t)$.

$\tau = \inf \{t \geq 0 : \{i_1, \dots, i_t\} = \{1, \dots, d\}\}$
 est un temps stationnaire fort:

$$P_x \left(\underbrace{\tau = t}_{\text{dépend de } \{i_1, \dots, i_t\}}, \underbrace{X_\tau = y}_{\substack{X_{L^i}^i = y^i \text{ si} \\ B_{L^i}^i = y^i \text{ ou} \\ L^i = \max \{s \leq t : i_s = i\}}} \right) = \frac{1}{2^d} P_x(\tau = t) \quad \square$$

et $P(X_\tau = y | \mathcal{F}_\tau) = \frac{1}{2}$

Exple 2: top-to-random s.p.d.g. $X_0 = \text{id}$.

$$\tau_{\text{top}} = \inf \{t \geq 0 : \sigma_t(n) = 1\}$$

$\tau = \tau_{\text{top}} + 1$ est un tps stationnaire fort.

(Contre Exemple 3)

$$y_0 \sim \pi, X_0 = x, \tau = \inf \{t \geq 0 : X_t = y_t\}$$

τ est un tps stationnaire, mais pas un tps stationnaire fort...
 $\mathbb{P}\{\tau = 0\} = \mathbb{P}\{X_0 = y_0\}$.

Prop 6.2 τ tps stationnaire fort
 Alors $d(t) \leq \max_{x \in \Omega} P_x(\tau > t)$.

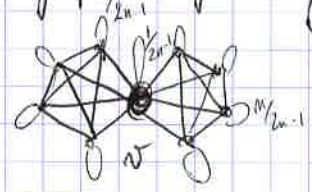
Preuve. $\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{y \in \Omega} \pi(y) \left| \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} - 1 \right| = \frac{1}{2} \sum_{y \in \Omega} \left| \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} - 1 \right| \pi(y)$

Lemme/exo 11.3 $\|e^p(\pi)\|_{TV} \nearrow$ avec p , en particulier $\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} \leq \frac{1}{2} \max_{y \in \Omega} \left| \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} - 1 \right| \pi(y)$

De manière similaire $\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} \leq \max_{y \in \Omega} \left| \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} - 1 \right| \pi(y)$

Ex 1. $\frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} = 1 - \frac{P_x(X_t=y)}{\pi(y)}$
 $= 1 - P_x(\tau \leq t) - \frac{P_x(\tau > t, X_t=y)}{\pi(y)}$
 car τ tps stationnaire fort $\leq P_x(\tau > t)$.

Exple 4 : 2 graphes complets glais en 1 sommet $(|E| = 2n-1)$ v .



$\tau = \tau_0 + 1$ est un tps stationnaire fort.
 $\tau_0 \sim \text{geom}(\frac{1}{2n-1})$,
 $(E[\tau_0] = 2n-1)$

$P(\tau_0 > t) = \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^t$
 $P(\tau > t) = \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{t-1} = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{t-1}$

$\left(\frac{1}{2n-1}\right)^{t-1} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (t-1) \log\left(\frac{1}{2n-1}\right) < \log\left(\frac{1}{4}\right)$
 $t-1 > \log(4)$

$(t-1) \log\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \sim -\frac{(t-1)}{2n-1}$
 $t > 2(n-1) \log 4 + 1$

$t_{\text{mix}}(\epsilon) \leq \lceil 2(n-1) \log\left(\frac{4}{\epsilon}\right) + 1 \rceil$

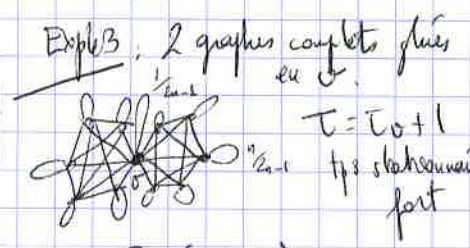
top-to-random : $\tau = n \log n + O(n)$
 $t_{\text{mix}}(\epsilon) \leq n \log n + n \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$

Rapels (X_t) chaîne de Markov ds filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
 τ (\mathcal{F}_t) -tps d'arrêt est tps stationnaire fort ssi

$$\mathbb{P}_x(\tau=t, X_\tau=y) = \mathbb{P}_x(\tau=t) \pi(y)$$

Exple 1 marche hypercube

Exple 2 top to random $\tau_{\text{top}} = \inf \{t \geq 0 : \delta_t(u) = 1\}$
 w.l.o.g. $X_0 = \text{id}$
 $\tau_{\text{top}} + 1$ tps stationnaire fort.



Prop 6.2 τ tps stationnaire fort Alors $d(t) \leq \max_{x \in \Omega} \mathbb{P}_x(\tau > t)$

Idee de Preuve : $\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{y \in \Omega} \pi(y) \left| 1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} \right|$ ($= \frac{1}{2} \|1 - \frac{P^t(x, \cdot)}{\pi(\cdot)}\|_{\ell^1(\pi)}$)

Lemme : $\| \cdot \|_{\ell^1(\pi)}$ croît avec p (en particulier il est évident que)
 (exo II.13)
 $\|1 - \frac{P^t(x, \cdot)}{\pi(\cdot)}\|_{\ell^1(\pi)} \leq \max_{y \in \Omega} \left| 1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} \right|$

Preuve de 6.2 : De manière similaire

$$\sum_{y \in \Omega : \pi(y) \geq P^t(x,y)} \pi(y) \left(1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} \right) \leq \max_{y \in \Omega} \left(1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} \right)$$

$$\text{Or } 1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} = 1 - \frac{\mathbb{P}_x(X_t=y)}{\pi(y)} = 1 - \mathbb{P}_x(\tau \leq t) - \mathbb{P}_x(\tau > t, X_t=y)$$

$$\leq \mathbb{P}_x(\tau > t) \quad \square$$

Exple 3 : $\mathbb{P}(\tau_0 > t) = \left(\frac{2n-2}{2n-1} \right)^t$; $\mathbb{P}(\tau > t) = \left(1 - \frac{1}{2n-1} \right)^{t-1}$
 $\hookrightarrow t_{\text{mix}}(\epsilon) \leq \lceil (2n-1) \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1 \rceil$

Exple 2 : $t_{\text{mix}}(\epsilon) \leq \lceil n \log n + n \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1 \rceil$. cf exo I.4.

VII Bornes inf sur $t_{\text{mix}}(\epsilon)$

1) Bornes ad hoc.

Prop 7.1 : Si on peut trouver $x \in \Omega, T \geq 0, A \subset \Omega$ t.q $|P^T(x, A) - \pi(A)| > \epsilon$
 alors $t_{\text{mix}}(\epsilon) > T$.

Exple 1 : top-to-random.

$$B = \left\{ \sigma : \sigma(n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\} \quad \pi(B) \geq \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^t(\text{id}, B) &\geq \mathbb{P}(\text{carte } n \text{ n'est pas encore remontée} \\ &\quad \text{de } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \text{ vers au tps } t) \\ &= \mathbb{P}(T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} > t) \end{aligned}$$

$$\text{Or } T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} = G_1 + \dots + G_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \quad \text{ou } G_i \sim \text{geom}\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\mathbb{E}[T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}] \approx n \log n + (\gamma - \log(2))n + o(n)$$

$$\text{Var}[T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}] \sim n^2 \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Si } t_n = n \log n - A n.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{t_n}(\text{id}, B) &\geq 1 - \mathbb{P}\left(\left|T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} - \mathbb{E}[T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}]\right| \geq \frac{A}{2} \sqrt{\text{Var}(T_n)}\right) \\ &\geq 1 - \frac{4}{A^2} \end{aligned}$$

(Chebyshev / Markov)

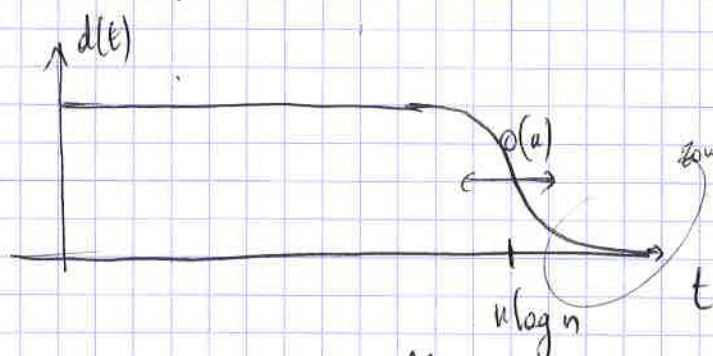
$$\text{d'où } d(t_n) \geq \frac{1}{2} - \frac{4}{A^2}$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}) \quad t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq n \log n - A_\varepsilon n$$

Pour/exo : quitte à choisir $B(\varepsilon)$ on peut trouver une borne similaire pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$

• quitte à utiliser Chebyshev exp, $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq n \log n - C \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) n - c n.$

Finalement :



zone où on retrouve la décroissance exponentielle issue de l'analyse spectrale de P .

On a un phénomène de cut-off pour le mélange top-to-random.

$$S_E = \sum_{t=1}^d X_t^i$$

μ_t loi de S_t ($\text{foP}^t(o, \cdot)$)
 \rightarrow loi Bin($n, 1/2$) ($\text{fo}\pi$)

$$\|P^t(o, \cdot) - \pi\|_{TV} \geq \|\mu_t - \nu\|_{TV}$$

pourvu que A soit assez grand pour que $P(\text{Bin}(n, 1/2) \leq \frac{n}{2} - A\sqrt{n}) \leq \frac{\epsilon}{2}$,
 alors si t est t.g. $P(S_t \leq \frac{n}{2} - A\sqrt{n}) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$
 ou a $t \leq t_{\text{mix}}(1 - \epsilon)$.. Fixons A t.g. $P(\text{Bin}(n, 1/2) \leq \frac{n}{2} - A\sqrt{n}) \leq \frac{\epsilon}{2}$

$$\text{Or } P(S_t \leq \frac{n}{2} - A\sqrt{n}) \geq P(\text{plus de } n - n^{1/2} \text{ coupons/coord ont été collectés au tps } t) \\
 = P(\text{Bin}(n - n^{1/2}G, \frac{1}{2}) \leq \frac{n}{2} - A\sqrt{n})$$

$$\text{Or } E[\text{tps de collection des } n - n^{1/2}G \text{ premiers coupons}] \xrightarrow{G \rightarrow \infty} = n \left[1 + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n^{1/2}G} \right] \\
 \approx \frac{1}{2} n \log n + o(n)$$

$\text{Var}[\dots] \ll E[\dots]^2$ (d'ordre n^2)

Cel : $t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq \frac{1}{2} n \log n - C_\epsilon n$

2) Bonnes diamètre / comptage

(a) chaîne $X \rightarrow$ diagramme $\mathcal{G} = (V, E)$ $E = \{(x, y) : P(x, y) > 0 \text{ or } P(y, x) > 0\}$
 $L = \text{diam}(\mathcal{G})$

Prop 7.3 : $\forall \epsilon < 1/2$ $t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq \lceil \frac{L}{2} - 1 \rceil$

Preuve: x_1, x_2 à distance L .

$$\underbrace{\{y : P^{\lfloor L/2 \rfloor}(x_1, y) > 0\}}_{\Delta_{x_1}} \cap \underbrace{\{y : P^{\lfloor L/2 \rfloor}(x_2, y) > 0\}}_{\Delta_{x_2}} = \emptyset$$

et forcément $\max(\frac{1}{|\Delta_{x_1}|}, \frac{1}{|\Delta_{x_2}|}) \geq \frac{1}{2}$

(b) $d_{\text{out}}(x) = \{y : P(x, y) > 0\}$, $\Delta = \max_{x \in \mathcal{X}} d_{\text{out}}(x)$, $\pi_{\text{max}} = \max_{x \in \mathcal{X}} \pi(x)$

Prop 7.3 : $t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq \frac{\log(\frac{1-\epsilon}{\pi_{\text{max}}})}{\log(\Delta)}$

$$\Omega_t^a = \{y : P^t(x, y) > 0\}$$

$$|\Omega_t^a| \leq \Delta^t$$

$$\pi(\Omega_t^a) \leq \pi_{\max} \Delta^t$$

$$d(t) \geq P^t(x, \Omega_t^a) - \pi(\Omega_t^a) \geq 1 - \Delta^t \pi_{\max}$$

Exple marche aléatoire sur graphe d-régulier à n sommets
 $t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq \frac{\log(n(1-\epsilon))}{\log(d)}$

Lubitzky-Sly '10 $t_{\text{mix}}(\epsilon) \sim \frac{\log(n)}{\log(d-1)} \frac{d}{(d-2)}$ $\forall \epsilon \in (0, 1)$

3) Constante de Cheeger

Def 14: $Q(A, B) = \sum_{x \in A, y \in B} \pi(x) P(x, y)$

(idée à Markovante, same
 + temp. de A à B
 asolo! $Q(S, S^c) = Q(S^c, S)$)

$$\phi(S) = \frac{Q(S, S^c)}{\pi(S)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{prop. de la masse de } S \\ \text{qui s'échappe} \end{array} \right)$$

$$\phi^* := \min_{S \subset V, \pi(S) \leq \frac{1}{2}} \phi(S)$$

Exple marche simple sur $G = (V, E)$

$$d_y = \sum_{e \in E} d_{y,e}$$

$$Q(x, y) = \pi(x) P(x, y) = \begin{cases} 1/d_y & \text{si } (x, y) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi(S) = \frac{|\partial S|}{\sum_{x \in S} d_x}$$

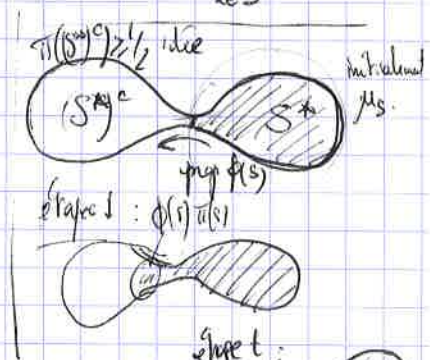
ou $|\partial S| = \# \text{ arêtes reliant } S \text{ à } S^c$
 si marche par sause $\phi(S) = \frac{|\partial S|}{2 \sum_{x \in S} d_x}$

Thm 7.5 $t_{\text{mix}} \geq \frac{1}{4\phi^*}$

Preuve: Soit $\pi_S = \pi|_S$ (de masse totale $\pi(S) < 1$)

$$\mu_S = \frac{\pi_S}{\pi(S)}$$

Lemme: $\phi(S) = \|\mu_S P - \mu_S\|_{TV}$



Preuve du lemme: $\pi(S) \|\mu_S P - \mu_S\|_{TV} = \sum_y \mu_S P(y) \geq \mu_S(y) \cdot |\pi_S P(y) - \pi_S(y)|$
 $\pi_S P(y) \leq \pi P(y) = \pi(y)$ donc $\{y : \mu_S P(y) \geq \mu_S(y)\} \Leftrightarrow y \in S^c$
 tout que $t \phi(S) \leq \frac{1}{2}$ ou n'a pas mélange

Finalemnt $\pi(S) \|\mu_S P - \mu_S\|_{TV} = \sum_{y \in S^c} \pi_S P(y) = Q(S, S^c) \quad \square$

Ou en déduit $\|\mu_S P^{t_H} - \mu_S P^t\|_{TV} \leq \|\mu_S P - \mu_S\|_{TV} = \phi(S)$
(exo 12, remarque de d(t)S)

$$\|\mu_S P^t - \mu_S\|_{TV} \leq t \phi(S)$$

et $\|\mu_S P^t - \pi\|_{TV} \geq \|\mu_S - \pi\|_{TV} - \|\mu_S P^t - \mu_S\|_{TV} \geq \frac{1}{2} - t \phi(S)$

$= \pi(S^c) \geq \frac{1}{2}$
si $\pi(S) \leq \frac{1}{2}$
 donc $t_{mix} \phi(S) \geq \frac{1}{4} \quad \forall S,$
 $t_{mix} \geq \frac{1}{4\phi^*} \quad \square$

Exemples d'application :

Exple 1: graphes complets glus en v (exo 13)

$S = \{y_i - \{v\}\} \quad \pi(S^c) = \frac{n-1}{2n-1} \geq \frac{1}{2}$

$Q(S, S^c) = \sum_{x \in S, y \in S^c} \pi(x) P(x, y) = \frac{1}{(2n-1)^2} \times (n-1) = \frac{n-1}{(2n-1)^2}$

$\phi^* = \phi(S) = \frac{2n-1}{n-1} \times \frac{n-1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2n-1}$

$t_{mix} \geq \frac{2n-1}{4} \geq \frac{n-1}{2}$

et on conclut $t_{mix} = \Theta(n)$

Exple 2 (exo 15) : $S = 1^a$ ss-arbre $\pi(S) = \frac{1}{2} (1 - \pi(\emptyset)) = \frac{n-2}{2n-2}$

$Q(S, S^c) = \pi(1) \times P(1, \emptyset) = \frac{3}{2n-2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4n-4}$

$\phi^* = \phi(S) = \frac{1}{2(n-2)}, \quad t_{mix} \geq \frac{(n-2)}{2}$

et on conclut que $t_{mix} = \Theta(n)$



Exple 3 exo 12

Cherger $\Rightarrow t_{\max} \geq \frac{n}{4}$
 en fait avec $A = \left\{ \binom{[n/4], \dots, [n/4]}{16} \right\}$ $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$,

$P^t(o, A) \geq \frac{3}{4}$ paron que $t \geq \frac{n^2}{2}$
 car $P^t(o, A) \geq 1 - P(\tau \leq t) \geq 1 - \frac{E_o(\tau)}{t} = 1 - \frac{n^2}{8t}$

avec exo II.17 on obtient

$$t_{\min} = \Theta(n^2)$$

Autres exples de graphes glies en 1 sommet : voir exo 6, 14,

2) Retour sur l'idée de la borne inf "ad hoc" pour marche sur \mathbb{Z}_2^d .

On s'est servi des faits suivants

Lemme 1 : si $f: \Omega \rightarrow \Lambda$.

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} \geq \|P^t(x, \cdot) \circ f - \pi \circ f\|_{TV}$$

Preuve : $\forall B \subset \Lambda$ $P^t(x, \cdot) \circ f(B) - \pi \circ f(B) = P^t(x, \cdot)(f^{-1}(B)) - \pi(f^{-1}(B))$
 $\leq \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV}$.

Lemme 2 : $\Lambda \subset \mathbb{R}$, T t.g.

$$\sigma^2 = \max(\text{Var}_\pi(f(X)), \text{Var}_x(f(X_T)))$$

$$|\mathbb{E}_x(f(X_T)) - \mathbb{E}_\pi(f(X))| = r\sigma$$

Alors $\|P^T(x, \cdot) \circ f - \pi \circ f\|_{TV} \geq 1 - \frac{8}{r^2}$.

Preuve : Par exple $\mathbb{E}_x(f(X_T)) < \mathbb{E}_\pi(f(X))$

$$B = (-\infty, \mathbb{E}_x(f(X_T)) + \frac{r\sigma}{2}]$$

Chebyshev : $P^T(x, \cdot) \circ f(B) \geq 1 - \frac{4}{r^2}$

$$\pi \circ f(B) \leq \frac{4}{r^2}$$

Rqne / Prop 7.8 du livre $\sigma'^2 = (\text{Var}_\pi(f(X)) + \text{Var}_x(f(X_T))) / 2$

$$|\mathbb{E}_\pi(f(X)) - \mathbb{E}_x(f(X_T))| = r\sigma'$$

en écrivant les espérances comme $\sum x \binom{\alpha}{x} \binom{\beta}{n-x} \eta(x)$ et en utilisant Cauchy-Schwarz, on obtient une borne légèrement meilleure :

$$\|P^T(x, \cdot) \circ f - \pi \circ f\|_{TV} \geq 1 - \frac{4}{4+r^2}$$

On déduit Prop 7.2 : $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, T , σ^2 , r comme dans le Lemme 2

Alors $t_{\text{mix}} \left(1 - \frac{4}{4+r^2} \right) \geq T$.

3) Borne diamètre: $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ graphe déduit du diagramme de X

$$\mathcal{E} = \{ \{x, y\} : P(x, y) + P(y, x) > 0 \}$$

$$L = \text{diam}(\mathcal{G})$$

Prop 7.3 $\forall \varepsilon < 1/2 \quad t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq L/2$

Preuve: $\Omega_t^x = \{y : P^t(x, y) > 0\}$

x, y t.q $d(x, y) = L$ $\Omega_{\lfloor L/2 \rfloor}^x \cap \Omega_{\lfloor L/2 \rfloor}^y = \emptyset$

et $\max \left(\frac{|\Omega_{\lfloor L/2 \rfloor}^x|}{|\mathcal{V}|}, \frac{|\Omega_{\lfloor L/2 \rfloor}^y|}{|\mathcal{V}|} \right) \geq 1/2$

Exple : marche sur graphe d -régulier à n sommets \sim , $\text{diam}(\mathcal{G}) \sim \log n$.
 et donc $\forall \varepsilon < 1/2, t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq C \log(n)$

4) Borne comptage: $d_{\text{out}}(x) = \{y : P(x, y) > 0\}$ (degré sortant)

$$\Delta = \max_{x \in \Omega} d_{\text{out}}(x) \quad \pi_{\text{max}} = \max_{x \in \Omega} \pi(x)$$

Prop 7.4 $\forall \varepsilon \in (0, 1), t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq \frac{\log \frac{1-\varepsilon}{\pi_{\text{max}}}}{\log(\Delta)}$

Preuve: $|\Omega_t^x| \leq \Delta^t, \quad \pi(\Omega_t^x) \leq \pi_{\text{max}} \Delta^t$

$$d(t) \geq P^t(x, \Omega_t^x) - \pi(\Omega_t^x) \geq 1 - \pi_{\text{max}} \Delta^t$$

Exple : $t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq \frac{\log(n(1-\varepsilon))}{\log(d)}$

Rq : Lubetzky - Sly '10 $\forall \varepsilon \in (0, 1), t_{\text{mix}}(\varepsilon) \sim \log(n) \frac{d}{(d-2) \log(d-1)}$

5) Constante de Cheeger

Déf 7.5 $Q(A, B) = \sum_{x \in A, y \in B} \pi(x) P(x, y)$ [à stationn. quantité de masse transp. de A vers B.]

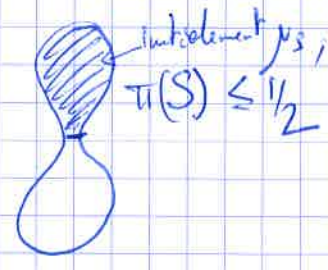
$$\Phi(S) = \frac{Q(S, S^c)}{\pi(S)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{prop. de la masse de } S \\ \text{qui s'échappe} \end{array} \right. \quad \Phi^* = \min_{S: \pi(S) \leq 1/2} \Phi(S)$$

Exple marche simple sur $G=(V,E)$ $d_g = \sum_{v \in V} d_v$
 $Q(x,y) = \pi(x)P(x,y) = \begin{cases} d_g^{-1} & \text{si } (x,y) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\phi(S) = \frac{|\partial S|}{\sum_{v \in S} d_v}$ où $|\partial S| = \# \text{ arêtes reliant } S \text{ à } S^c$.
 marche pousseuse $\phi(S) = \frac{|\partial S|}{2 \sum_{v \in S} d_v}$

Thm 7.6 $t_{mix} \geq \frac{1}{4\phi^*}$

Preuve: $\pi_S = \pi|_S$ (norme totale < 1) $\mu_S = \frac{\pi_S}{\pi(S)}$ proba



Lemme: $\phi(S) = \|\mu_S P - \mu_S\|_{TV}$

Preuve de lemme: $\pi(S) \|\mu_S P - \mu_S\|_{TV}$

$= \sum_{y: \mu_S P(y) \geq \mu_S(y)} \pi_S P(y) - \pi_S(y) = \sum_{y \in S^c} \pi_S P(y) \stackrel{\text{prob } \phi(S)}{=} \pi(S^c)$



Car $\pi_S P(y) \leq \pi P(y) = \pi(y)$ donc
 $\{y: \mu_S P(y) \geq \mu_S(y)\} = S^c$



On déduit $\|\mu_S P^{t+1} - \mu_S P^t\|_{TV} \leq \|\mu_S P - \mu_S\|_{TV} = \phi(S)$
 $\|\mu_S P^t - \mu_S\|_{TV} \leq t \phi(S)$

$\|\mu_S P^t - \pi\|_{TV} \geq \|\mu_S - \pi\|_{TV} - \|\mu_S P^t - \mu_S\|_{TV}$
 $\geq \frac{1}{2} - t \phi(S)$

$t_{mix} \phi(S) \geq \frac{1}{4} \quad \forall S$ et on conclut $t_{mix} \geq \frac{1}{4\phi^*}$

Exple 2: graphes complets glues en v (exo 13)

$S = \{y_1, \dots, y_j\}$ $\pi(S^c) = \frac{n}{2n-1} \geq \frac{1}{2}$
 $Q(S, S^c) = \sum_{x \in S, y \in S^c} \pi(x) P(x,y) = \sum_{x \in \{y_1, \dots, y_j\}} \pi(x) P(x,v) = \frac{j-1}{(2n-1)^2}$

$\phi(S) = \frac{1}{2n-1}$ $t_{mix} \geq \frac{2n-1}{4} \geq \frac{n-1/2}{2}$

$t_{mix} = \Theta(n)$

Exple 2 (exo 15) ϕ racine
 S 1^{er} sr-arbre

$$\pi(S) = \frac{1}{2} (1 - \pi(\phi)) = \frac{n-2}{2n-2}$$

$$Q(S, S^c) = \pi(1) P(1, \phi) = \frac{3}{2n-2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4n-4}$$

$$\phi(S) = \frac{1}{2(n-2)} \quad t_{\text{mix}} \geq \frac{n-2}{2}, \quad t_{\text{mix}} = \Theta(n)$$

! Exple 3 (exo 12) marche sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
 simple sym, pausseuse

$$S = \left\{ \left[\frac{n}{2} \right], \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \right\}$$

$$\pi(S) = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$$

$$Q(S, S^c) = \pi(1) P(1, 0) + \pi\left(\left[\frac{n}{2} \right]\right) P\left(\left[\frac{n}{2} \right], \left[\frac{n}{2} \right] + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2n}, \quad \phi(S) = \frac{1}{2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Cheeger $\Rightarrow t_{\text{mix}} \geq \frac{n}{8}$ e.g.

Cependant en prenant $A = \left\{ \left[\frac{n}{4} \right], \dots, \left[\frac{n}{4} \right] \right\}$ $\pi(A) \leq 1/2$

$$P^t(0, A) \geq \frac{3}{4} \text{ pour } t = \frac{n^2}{2}$$

~~$$P^t(0, A) \geq \frac{3}{4} \text{ pour } t = \frac{n^2}{2}$$~~

~~$$P^t(0, A) \geq \frac{3}{4} \text{ pour } t = \frac{n^2}{2}$$~~

pourvu que

~~$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$~~

$$\text{or } P^{cn^2}(0, A) \rightarrow \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{c}}\right)$$

$$\frac{\sin^2}{n\sqrt{c}} \downarrow \text{ (loi) } \mathcal{N}(0,1)$$

donc $P^{cn^2}(0, A) \geq \frac{3}{4}$ pourvu que n suff grand

et c.t.q $\mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{c}}\right) = \frac{7}{8}$ e.g

Si lps : p.21? donc $t_{\text{mix}} \geq cn^2$ et $t_{\text{mix}} = \Theta(n^2)$

• random transp exo III-2 borne sup. opt.
• riffle shuffle + hard?

Modèle de conductances (chaînes réversibles) et analogie avec circuits électriques

1) Preamble + gal (théorie du potentiel discrète)
exos 4-5 feuille IV.

$D \subset \Omega$
 $T = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D^c\}$
 $= \tau_{D^c}$

Soient $c : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ fct de coût
 $\varphi : D^c \rightarrow \mathbb{R}_+$ condition au bord.

Thm 9.1. Soit $u(x) = E_x \left[\sum_{t=0}^{T-1} c(X_t) + \varphi(X_T) \mathbb{1}_{\{T < \infty\}} \right]$.

- (i) $\mu(x) = P\mu(x) + c(x) \quad x \in D$
- (*) $\mu(x) = \varphi(x) \quad x \in D^c$

(ii) Si $T < \infty \quad \forall x$ il existe au plus une solution bornée de (*)

(iii) u est la solution ≥ 0 minimale de (*)

Preuve: cf corrigé des exos

Csq: Si $c \equiv 0$, quitte à écrire $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, on déduit que $h(x) = E_x \left[\varphi(X_T) \mathbb{1}_{\{T < \infty\}} \right]$ est l'unique fct harmonique sur D qui coïncide avec φ sur D^c .

Note: les seules fcts P-harmoniques sur Ω cuber sont les constantes.

2) Notion de réversibilité, rappels (*) $\hat{P}(y,x) = \frac{\pi(x)P(x,y)}{\pi(y)}$

X réversible (pour π) $\iff P = \hat{P}$

Req: $\frac{\mu P}{\pi} = \hat{P} \left(\frac{\mu}{\pi} \right)$ g harmonique pour $\hat{P} \iff \mu(x) = g(x)\pi(x), x \in \Omega$
inv pour P

(b) Si X réversible
on peut trouver $g = (0) \in \mathbb{E}$
et $K > 0$ t.q. $c(x,y) = K \pi(x) P(x,y) = c(y,x)$.

de sorte que $X \stackrel{(loc)}{=} \text{modèle de conductances } (y, c)$.

$$P(x, y) = \frac{c(x, y)}{c(x)}, x, y \in \Omega, \quad \Pi(x) = \frac{c(x)}{c_g}, x \in \Omega$$

3] Analogie avec circuits électriques

(a) Def 9.2 : Etant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > \beta$,
 $a \in \Omega \quad Z \subset \Omega \quad a \notin Z$.

on appelle potentiel fixé à α en a et à β sur Z

$$\text{l'unique } V_{\alpha, \beta} \text{ t.g. } \left\{ \begin{array}{l} V_{\alpha, \beta}(a) = \alpha, \quad V_{\alpha, \beta}(z) = \beta \quad \forall z \in Z \\ V_{\alpha, \beta} \text{ harmonique sur } D = \Omega \setminus (a \cup Z) \end{array} \right.$$

Prop 9.3 | $V_{\alpha, \beta} = \beta + (\alpha - \beta) V_{1,0}$ Preuve: Thm 9.1
 $V_{1,0} = P_x(\tau_a < \tau_Z)$

(b) Def 9.4 A un potentiel $V = V_{\alpha, \beta}$ on associe $I = I_{\alpha, \beta} : \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$
 un courant de a à Z

$$I(x, y) = -I(y, x) = (V(x) - V(y)) c(x, y)$$

Prop 9.5 Le courant I de a à Z vérifie

(i) loi d'Ohm $\pi(x, y) I(x, y) = V(x) - V(y)$

(ii) loi des nœuds de Kirchhoff : $\text{div}_x(I) = \sum_{y: (x,y) \in \vec{E}} I(x, y)$
 $\text{div}_x(I) = 0 \quad \forall x \in D$.

(iii) loi des cycles de Kirchhoff si $e_1, \dots, e_n \in \vec{E}$ forment un cycle
 alors $\sum_{k=1}^n \pi(e_k) I(\vec{e}_k) = 0$.

(iv) $\|I\| := \text{div}_a(I) \geq 0$

(def. courant unité de a à Z : t.g. $\|I\| = 1$)

Preuve : (i) def $\pi(x, y) = \frac{1}{c(x, y)}$

(ii) $\sum_{y: (x,y) \in \vec{E}} I(x, y) = \sum_{y: (x,y) \in \vec{E}} \underbrace{c(x, y)}_{=c(x)P(x,y)} (V(x) - V(y)) = c(x) V(x) - c(x) P V(x)$
 & V harmonique sur D

$$(iii) \sum_{k=1}^n \pi(e_k) I(e_k) = \sum_{k=1}^n V(e_k^-) - V(e_k^+) = V(e_n^-) - V(e_1^+) = 0$$

car $e_1^+ = e_n^-$

IX-2

(iv) principe du max des fcts harmoniques ou th simplement Prop 9.3, V est max en a , et $\text{div}_a(I) = \sum_{y: (a,y) \in \vec{E}} c(a,y) (V(a) - V(y)) \geq 0$

ⓐ Interprétation proba du courant unité de a à Z

Prop 9.6 : $I(x,y) = \mathbb{E}_a \left[\sum_{k=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_k=x, X_{k+1}=y\}} - \mathbb{1}_{\{X_k=y, X_{k+1}=x\}} \right]$

Preuve : Markov en k : $I(x,y) = \mathbb{E}_a \left[\sum_{k=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \right] P(x,y) - \mathbb{E}_a \left[\sum_{k=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}} \right] P(y,x)$

$$= c(x,y) \left[\frac{G(a,x)}{c(x)} - \frac{G(a,y)}{c(y)} \right]$$

Or si on pose $V(x) = \frac{G(a,x)}{c(x)}$, on a pour $x \in \Omega - \{a\} \cup Z$:

$$\begin{aligned} PV(x) &= \sum_{y \sim x} P(x,y) V(y) = \sum_{y \sim x} P(x,y) \frac{G(a,y)}{c(y)} \\ &= \frac{1}{c(x)} \sum_{y \sim x} \frac{c(x,y)}{c(y)} G(a,y) \\ &= \frac{1}{c(x)} \mathbb{E}_a \left[\sum_y \sum_{k=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_k=y, X_{k+1}=x\}} \right] \\ &= \frac{G(a,x)}{c(x)} = V(x) \end{aligned}$$

donc I est bien un courant et $\text{div}_a(I) = 1$ est facile par def de I .

Corollaire 9.7 : (i) Soit $Z \subset \Omega$, $a \notin Z$, $G(a,x) := \mathbb{E}_a \left[\sum_{k=0}^{\tau_Z-1} \mathbb{1}_{\{X_k=x\}} \right]$

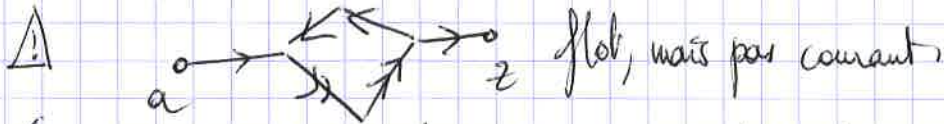
Alors $V(x) = \frac{G(a,x)}{c(x)}$, $x \in \Omega$

(ii) $\sum_{x \in \Omega} G(a,x) = \mathbb{E}_a[\tau_Z]$ ne dépend pas de a, β, K . $V(x)$ définit un potentiel, max en a , nul sur Z .

$\mathbb{E}_a[\tau_Z] = \sum_{x \in \Omega} c(x) V(x)$ (utile pour calculer prob d'atteinte) harmonique sur $D = \Omega - \{a\} \cup Z$

(d) Def 9.8 : $\theta: \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ flot de $a \bar{a} z$ ssi

- (i) θ antisym
- (ii) $\text{div}_a(\theta) \geq 0$, et $\forall x, y \in Z \text{ (x,y) } \in \vec{E} \theta(x,y) = 0$.
- (iii) $\text{div}_x(\theta) = 0 \forall x \in D$.



Prop 9.9 (D fini) Si θ vérifie la loi des cycles, alors θ est un courant de $a \bar{a} z$.

Preuve $I = I_{a,p}$ t.q. $\|I\| = \|\theta\|$.

$\theta - I$ satisfait loi des nœuds sur Ω t'enher

si $\exists e_1 \in \vec{E}$ t.q. $(\theta - I)(e_1) > 0$ $x_0 = e_1^-, x_1 = e_1^+$

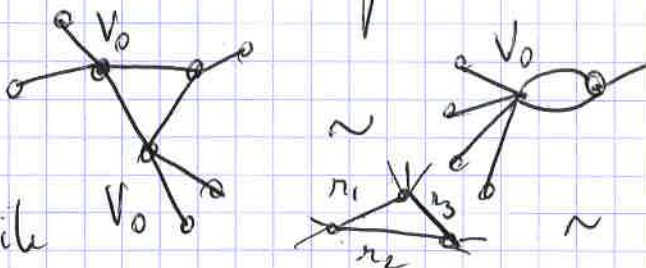
nœuds en $x_1 \rightarrow \exists e_2, e_2^- = x_1, e_2^+ = x_2 : (\theta - I)(e_2) > 0$

(on ne peut avoir $x_{i-1}, x_i \in Z$) ... on finit par trouver un cycle car D fini. et contredire la loi des cycles donc $\theta \equiv I$.

(e) Prop 9.10 : On peut faire les opérations habituelles sur les circuits électriques sans changer le potentiel en les nœuds conservés, le courant le lg des arêtes conservées.



(iii) identifi des nœuds de même potentiel



(iv) triangle étoile

Preuve: exo

vérifier Ohm + Kirchhoff nœuds avec $\tilde{I}(e') = I(e') \forall e' \in E$
 $\tilde{I}(e) = I(e) + \tilde{I}(e_1)$