Modèles de diffusion pour produits dérivés

Rémi Tachet des Combes

Sous la direction de Fréderic Abergel

1 Introduction

Les mathématiques financières sont une branche des mathématiques appliquées ayant pour but la compréhension et la quantification des phénomènes régissant les marchés financiers. Historiquement, le développement de ce domaine a été initié par les travaux de Louis Bachelier en 1900 et sa thèse intitulée "théorie de la spéculation". Il a néanmoins pris une dimension nouvelle en 1973 avec l'étude de Black, Scholes et Merton de l'évaluation et de la couverture des options. Depuis, tandis que se développaient les marchés des produits dérivés grâce notamment à l'essor de l'informatique, leurs méthodes ont été perfectionnées tant au niveau de la généralité que de la rigueur matématique et font maintenant appel à des outils issus de la théorie des probabilités, du calcul stochastique, des statistiques et du calcul différentiel. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à la modélisation en finance, c'est-à-dire à l'écriture de modèles rendant compte le plus fidèlement possibles des caractéristiques techniques observables sur les cours des actifs financiers.
Dans un premier temps, il s'agira de définir les différents objets étudiés : sous-jacents, option vanille, notion d'opportunité d'arbitrage...
Ensuite, nous donnerons un aperçu de la théorie de Black-Scholes qui permet de calculer le prix et le portefeuille de couverture d'une option vanille.
Enfin, nous concluerons par des travaux plus récents (Schweizer, Schonbucher) concernant des modèles de diffusion couplés sous-jacent/produit dérivé ouvrant de nouvelles perspectives de recherches qui formeront la base de ma thèse.

2 Options et opportunités d'arbitrage

2.1 Le problème des options

Cet exposé débute par la présentation du problème des options vanilles, qui a été le moteur de la théorie des mathématiques financières. Une option vanille représente le produit dérivé par excellence, utilisé quotidiennement par l'ensemble des institutions financières. Il s'agit d'un titre donnant à son détenteur le droit, et non l'oligation, d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente) une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé à l'avance. La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :

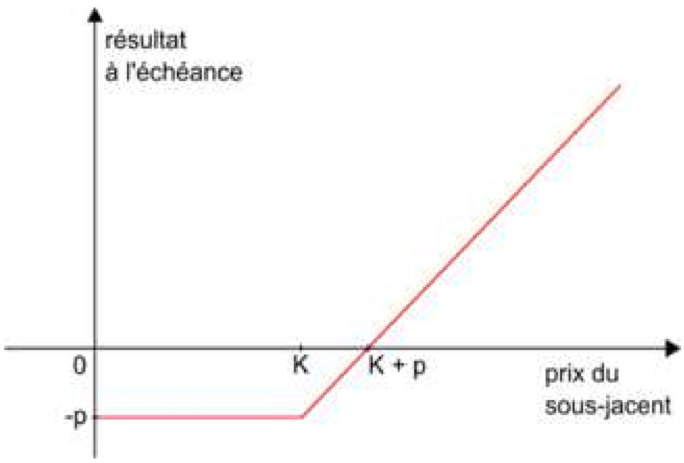
- la nature de l'option : on parle, suivant la terminologie anglo-saxonne, de call pour une option d'achat et de put pour une option de vente.
- l'actif sous-jacent, sur lequel porte l'option : dans la pratique, il peut s'agir d'une action, d'une obligation, d'une devise...

– le montant, c'est-à-dire la quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre.
– l'échéance ou date d'expiration, qui limite la durée de vie de l'option ; si l'option peut être exercée à n'importe quel instant précédant l'échéance, on parle d'option américaine, si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle d'option européenne.
– le prix d'exercice ou strike, qui est le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

L'option, elle-même, a un prix p, appelé la prime . Lorsque l'option est côtée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché. En l'absence de cotation, le problème du calcul de la prime se pose. Et, même pour une option côtée, il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles anomalies de marché (les agents de marché recherchant ce genre d'anomalies sont appelés les arbitrageurs). Examinons, pour fixer les idées, le cas d'un call européen, d'échéance T, sur une action, dont le cours à la date t est donné par S_t. Soit K le prix d'exercice. Il est clair que si, à l'échéance T, le prix K est supérieur au cours S_T, le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer. Par contre, si $S_T > K$, l'exercice de l'option permet à son détenteur de réaliser un profit égal à $S_T - K$, en achetant l'action au prix K et en la revendant sur le marché au cours S_T. On voit qu'à l'échéance, modulo la prime p, la valeur du call est donnée par la quantité :

$$(S_T - K)_+ = max(S_T - K, 0). \tag{1}$$

Ce qui donne graphiquement :



Considérons maintenant un agent qui vend une option d'achat, c'est-à-dire un produit d'assurance contre la hausse, et même plus généralement qui accepte de garantir un flux $h(S_T)$ à une échéance T (dans le cas d'un call de strike K, $h(x) = (x - K)_+$) et qui en contrepartie reçoit une prime -le prix de l'option en quelque sorte. Il n'a pas la possibilité de répartir le risque sur un grand nombre de clients comme le font les assureurs. Par contre, il peut investir la prime dans un portefeuille.
S'il est très passif, il place la prime à la banque. A l'échéance de l'option, le résultat du placement ne dépend que de l'intérêt versé, et de la prime initiale, et non de la valeur du titre risqué à l'échéance. Ce n'est pas une stratégie ajustée au produit vendu.
Il peut aussi acheter un certain nombre d'actions, de manière à avoir dans le portefeuille des actifs

dont le mouvement des prix va dans le même sens que les flux qu'il risque de payer.
La gestion d'un produit dérivé de payoff (ou flux terminal) h apparaît donc comme la conjonction de plusieurs opérations :

- suivre régulièrement le prix C_t dans le marché
- gérer un portefeuille autofinancant, de valeur V_t au temps t dont la valeur initiale est la prime $V_0 = x$ (autofinancant signifie qu'il n'y a pas à réinjecter d'argent après la mise de fond initiale)
- surveiller le $P\&L$ (profit and loss) final, c'est à dire la différence entre la valeur du portefeuille et le montant du flux à payer autrement dit : $V_T - h(S_T)$

L'objectif du gestionnaire n'est pas de maximiser le $P\&L$ final mais au contraire de le réduire du mieux possible afin d'avoir la variance la plus faible possible. Le meilleur "portefeuille" (qui suppose entre autre qu'on choisit la prime p optimalement) est appelé le portefeuille de couverture.
En résumé, pour le vendeur de l'option il faut résoudre les deux problèmes qui suivent :

- Combien faut-il faire payer à l'acheteur de l'option, autrement dit comment évaluer à l'instant $t = 0$ une richesse $(S_T - K)_+$ disponible à la date T ? C'est le problème du pricing.
- Comment le vendeur, qui touche la prime à l'instant 0, parviendra-t-il à produire la richesse $(S_T - K)_+$ à la date T ? C'est le problème de la couverture.

2.2 La notion d'arbitrage

La réponse aux deux questions qui précèdent ne peut se faire qu'à partir d'un minimum d'hypothèses de modélisation. L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est que,dans un marché suffisamment fluide, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de réaliser de profits sans prendre de risques. A partir de cette simple hypothèse, il est possible d'établir des relations entre les prix d'un call et d'un put européen de même échéance T et de même prix d'exercice K, sur une action de cours S_t à l'instant t. Nous supposerons qu'il est possible d'emprunter ou de placer de l'argent à un taux constant r.
Désignons par C_t et P_t les prix respectifs du call et du put à l'instant t. En l'absence d'opportunité d'arbitrage (qu'on notera (a-o-a) dans la suite), nous avons la relation suivante, valable à tout instant $t < T$ et appelée "relation de parité call-put" :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} \tag{2}$$

Pour faire comprendre la notion d'arbitrage, montrons comment nous pourrions réaliser un profit sans risque si nous avions, par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

A l'instant t, achetons une action et un put et vendons un call. Cette opération dégage, à l'instant t, un profit net égal à

$$C_t - P_t - S_t$$

Si cette somme est positive, plaçons-la au taux r jusqu'à la date T, sinon, empruntons-la au même taux. A la date T, deux cas peuvent se présenter :

- $S_T > K$: alors, le call est exercée, on livre l'action, on encaisse la somme K et on solde l'emprunt ou le prêt, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à : $K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$.

- $S_T \leq K$: alors, on exerce son put en vendant notre action, on encaisse la somme K et comme précédemment, on se retrouve avec une richesse : $K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$.

Dans les deux cas, on a réalisé un profit positif sans mise de fond initiale : c'est un exemple d'arbitrage. Il est possible d'écrire de nombreuses autres relations grâce à cette hypothèse (a-o-a). En particulier, cette règle conduit à l'unicité des prix des produits dérivés au sens où :

Deux stratégies qui donnent le même flux à l'horizon de gestion dans tous les états du monde ont la même valeur à toute date intermédiaire.

En effet, soient S_t^1 et S_t^2 la valeur de deux stratégies à l'instant t. Supposons qu'à l'instant t', on ait : $S_{t'}^1 < S_{t'}^2$ et qu'à l'hozizon de la stratégie T, on ait : $S_T^1 = S_T^2$. Il est alors possible de réaliser un profit de manière certaine en réalisant à partir de t' la stratégie 1 et l'opposé de la stratégie 2 (par opposé, nous entendons vendre au lieu d'acheter, acheter au lieu de vendre, emprunter au lieu de placer et placer au lieu d'emprunter). En effet, à l'instant t', un profit net est réalisé : $S_{t'}^2 - S_{t'}^1$. Au débouclage des positions, les deux stratégies ayant la même valeur, les deux flux se compensent, nous avons bien réalisé un bénéfice sans prendre le moindre risque ce qui est contraire à (a-o-a). Nous avons donc bien $S_t^1 = S_t^2$ pour tout t

Remarque : en elle-même, cette règle n'est pas réellement contraignante. En effet, il y a sur le marché des intervenants qui recherchent en permance les opportunités d'arbitrage (les arbitrageurs, on a vu ce nom précédemment) et qui en profitent dès qu'ils en détectent une. Or, la réalisation de l'arbitrage implique sa disparition ce qui -en supposant que les arbitrageurs sont suffisamment efficace- rend tout à fait plausible l'hypothèse (a-o-a). Pourquoi l'opportunité disparaît-elle lorsque quelqu'un en profite ? Considérons la situation suivante : une action donnée est côtée 100 euros à la bourse de Paris et 110 euros à la bourse de Francfort. Il est donc possible pour un arbitrageur d'acheter de nombreuses actions à Paris puis de les revendre à Francfort et donc d'encaisser à chaque transaction l'écart qu'il peut y avoir entre le cours des deux actions. Toutefois, en agissant ainsi, il va faire monter le cours de l'action à Paris (loi de l'offre et de la demande) et baisser ce même cours à Francfort. Tant qu'il y aura un écart entre les deux cours, l'agent agira ainsi, au final son action conduit à la disparition de l'opportunité et donc à la vérification de l'hypothèse (a-o-a).

3 Le modèle de Black-Scholes

Si les raisonnements par arbitrage fournissent de nombreuses relations intéressantes, ils ne sont pas suffisants pour obtenir des formules de prix. Pour cela, on a besoin de modéliser de façon plus précise l'évolution des cours. Black et Scholes ont été les premiers à proposer un modèle conduisant à une formule explicite pour le prix d'un call européen sur une action ne donnant pas de dividendes et à une stratégie de gestion qui, dans le cadre du modèle, permet au vendeur de l'option de se couvrir parfaitement, c'est-à-dire d'éliminer totalement le risque. Le prix du call est, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, la somme d'argent dont on doit disposer initialement pour pouvoir suivre la stratégie de couverture et produire ainsi exactement la richesse $(S_T - K)_+$ à l'échéance. De plus, la formule obtenue ne dépend que d'un paramètre non directement observable sur le marché et appelé "volatilité" par les praticiens.

3.1 Description du modèle

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (par exemple une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque

S_t^0 vérifiant l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \tag{3}$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux sur une période des modèles discrets). On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$, pour $t \geq 0$.
La modélisation du cours de l'action est plus complexe. L'incertain qui le caractérise (il est impossible de prédire l'évolution future d'une action) est modélisé à travers les trajectoires futures du titre risqué, vues comme des scenarii possibles d'évolution. Afin de prendre en compte le caractère très erratique des cours des actifs financiers, Black et Scholes ont repris l'idée de Louis Bachelier d'utiliser un mouvement brownien. De plus, pour éviter d'obtenir des prix négatifs, ce sont les rendements du prix qui suivent une loi normale avec tendance. On suppose ainsi que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t\,(\mu dt + \sigma dB_t) \tag{4}$$

où μ et σ sont deux constantes et (B_t) un mouvement brownien standard. On se place sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ dont la filtration est la filtration naturelle du brownien $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$.
Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier. L'équation du cours de l'action se résout explicitement :

$$S_t = S_0\ exp\,(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t), \tag{5}$$

où S_0 est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle, la loi de (S_t) suit une loi log-normale (c'est-à-dire que son logarithme suit une loi normale). Plusieurs propriétés sur le cours de l'action dans ce modèle en découlent :
- continuité des trajectoires
- indépendance des acroissements relatifs : si $u \leq t$, $(S_t - S_u)/S_u$ est indépendant de la tribu $\sigma(S_v, v \leq u)$
- stationnarité des acroissements relatifs : si $u \leq t$, la loi de $(S_t - S_u)/S_u$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$.

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

3.2 Evaluation et couverture des options dans le modèle de Black et Scholes

3.2.1 Mesure martingale pour le prix actualisé

Commençons par définir la notion de prix actualisé :

Définition. *Considérons une somme A à l'instant t, on appelle prix actualisé, et on notera $\tilde{A}$, la quantité : $\tilde{A} = e^{-rt}A$ qui correspond à la somme dont on doit disposer aujourd'hui (ie à l'instant 0) pour obtenir A à l'instant t, en la plaçant au taux d'intérêt r. Cette manipulation permet de comparer des quantités d'argent vues à divers instants.*

Nous aurons également besoin du théorème de Girsanov (voir par exemple [Lam]) :

Théorème 1. *Soit $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ p.s. et tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :*

$$L_t = exp\ (-\int_0^t \theta_s dBs - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)$$

soit une martingale. Alors, sous la probabilité $P^{(L)}$ de densité L_T par rapport à P, le processus $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par $W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$, est un mouvement brownien standard.

Etudions maintenant $\tilde{\mathrm{S}}_t$:

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathrm{S}}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{\mathrm{S}}_t\ ((\mu - r)\ dt + \sigma dB_t) \end{aligned}$$

et, en posant $W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$,

$$d\tilde{\mathrm{S}}_t = \tilde{\mathrm{S}}_t \sigma dW_t \tag{6}$$

D'après le théorème de Girsanov, appliqué en prenant $\theta_t = \frac{\mu-r}{\sigma}$ (il est connu que $exp\ (-xB_t - \frac{x^2}{2}t)$ est une martingale), il existe une probabilité P* équivalente à P sous laquelle $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ est un mouvement brownien standard. Sous la probabilité P*, on déduit de (6) que $(\tilde{\mathrm{S}}_t)$ est une martingale.

3.2.2 Pricing d'une option

On va chercher maintenant à calculer le prix d'une option. Pour cela, nous avons besoin de quelques définitions :

Définition. *Une stratégie est un couple de processus $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ représentant la quantité d'actif non risqué et d'actif risqué dans le portefeuille. La valeur du portefeuille $V_t(\phi)$ à l'instant t est donc : $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$. Une stratégie est dite admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée du portefeuille est positive pour tout t.*

On rappelle qu'une stratégie est dite autofinançante s'il n'y a pas besoin de réinjecter d'argent après la mise de fond initiale. Mathématiquement, cela se traduit en temps discret par l'égalité suivante :

$$H_n^0 S_n^0 + H_n S_n = H_{n+1}^0 S_n^0 + H_{n+1} S_n$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= H_{n+1}^0 S_{n+1}^0 + H_{n+1}S_{n+1} - H_n^0 S_n^0 + H_n S_n \\ &= H_{n+1}^0 (S_{n+1}^0 - S_n^0) + H_{n+1}(S_{n+1} - S_n) \end{aligned}$$

La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme suivante :

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t \tag{7}$$

On dira qu'une option est simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible. Il est maintenant possible d'écrire le prix d'une option grâce au :

Théorème 2. *Dans le modèle de Black-Scholes, toute option définie par une fonction h continue de $\Re$ dans $\Re_+$ est simulable et la valeur à l'instant t de tout portefeuille simulant est donnée par :*

$$\begin{aligned} V_t &= E^*(e^{-r(T-t)}h(S_T)|F_t) \\ &= F(t, S_t) \end{aligned} \tag{8}$$

pour une certaine fonction F qu'on explicitera plus tard.

Démonstration : Supposons tout d'abord qu'il existe une stratégie admissible (H^0, H), simulant l'option. La valeur à l'instant t du portefeuille (H_0^t, H^t) est donnée par :

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

et l'on a, par hypothèse, $V_T = h(S_T)$. Soit $\tilde{\mathrm{V}}_t = H_t^0 + H_t \tilde{\mathrm{S}}_t$ la valeur actualisée du portefeuille. Puisque la stratégie est autofinancée, nous avons :

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathrm{V}}_t &= d(e^{-rt}V_t) \\ &= -r\tilde{\mathrm{V}}_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi) \\ &= -re^{-rt}\ (H_t^0 e^{rt} + H_t S_t)\ dt + e^{-rt}H_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt}H_t dS_t \\ &= H_t\ (-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\ &= H_t d\tilde{\mathrm{S}}_t \\ &= H_t \sigma \tilde{\mathrm{S}}_t dW_t \end{aligned}$$

Il en résulte que, sous P*, $(\tilde{\mathrm{V}}_t)$ est une martingale. D'où :

$$\tilde{\mathrm{V}}_t = E^*(\tilde{\mathrm{V}}_T|F_t)$$

et par conséquent :

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)}h(S_T)|F_t)$$

qui est bien la formule recherchée.
Nous avons ainsi montré que si le portefeuille (H^0, H) simule l'option définie par h, sa valeur est donnée par (8). Pour achever la démonstration du théorème, il reste à démontrer que l'option est bien simulable, c'est-à-dire à trouver des processus (H_t^0) et (H_t) définissant une stratégie admissible et tels que :

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = E^*(e^{-r(T-t)}h(S_T)|F_t)$$

Or, sous la probabilité P*, le processus défini par $M_t = E^*(e^{-rT}h(S_T)|F_t)$ est une martingale de carré intégrable. La filtration (F_t), filtration naturelle de (B_t), est aussi la filtration naturelle de (W_t) et, d'après le théorème de représentation des martingales browniennes, il existe un processus adapté $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ tel que :

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \quad p.s$$

La stratégie $\phi = (H^0, H)$, avec $H_t = K_t/(\sigma\tilde{S}_t)$ et $h_t^0 = M_t - H_t\tilde{S}_t$, est alors une stratégie autofinancée, dont la valeur à l'instant t est donnée par :

$$V_t(\phi) = e^{rt}M_t = E^*(e^{-r(T-t)}h(S_T)|F_t)$$

et il est clair sur cette expression que $V_t(\phi)$ est une variable aléatoire positive et que $V_T(\phi) = h(S_T)$. On a donc bien une stratégie admissible simulant h.
Développons maintenant S_T dans l'expression de V_t :

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)}h(S_t e^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\sigma^2/2)(T-t)}|F_t)$$

La variable aléatoire S_t est F_t-mesurable et, sous P*, $W_T - W_t$ est indépendant de F_t. On a donc $V_t = F(t, S_t)$ avec :

$$F(t,x) = E^*[e^{-r(T-t)}h(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\sigma^2/2)(T-t)})] \tag{9}$$

□

Dans le cas d'un call, c'est-à-dire avec $h(x) = (x-K)_+$, il est possible de calculer explicitement la fonction $F(t,x)$ ce qui nous donne le prix du call :

$$C(t, S_t; T, K, \sigma) = S_t\ N(\frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) - Ke^{-r(T-t)}\ N(\frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

avec N la fonction de répartition de la distribution gaussienne.

3.2.3 Couverture d'une option

Nous venons de voir que la valeur d'un portefeuille simulant est, à chaque instant t, égale à :

$$\tilde{V}_t = e^{-rt}F(t, S_t),$$

où F est la fonction définie par (9). Sous des hypothèses très larges sur h, la fonction F est de classe C^∞ sur $[0,T[\ \times\Re$. Posons :

$$\tilde{F}(t,x) = e^{-rt}F(t, xe^{rt}).$$

D'où : $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ et, pour $t < T$, d'après la formule d'Ito :

$$d\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \frac{\partial\tilde{F}}{\partial x}(t,\tilde{S}_t)d\tilde{S}_t + \frac{\partial\tilde{F}}{\partial t}(t,\tilde{S}_t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x^2}(t,\tilde{S}_t)d < \tilde{S},\tilde{S} >_t$$

De l'égalité $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\sigma dW_t$, on déduit :

$$d < \tilde{S},\tilde{S} >_t = \sigma^2\tilde{S}_t^2 dt,$$

ce qui fait apparaître $\tilde{F}(t,\tilde{S}_t)$ sous la forme suivante :

$$d\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \sigma\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x}(t,\tilde{S}_t)\tilde{S}_t dW_t + K_t dt.$$

Vu que $\tilde{\mathrm{F}}(t, \tilde{\mathrm{S}}_t)$ est une martingale sous P*, le processus K_t est nécessairement nul. D'où :

$$d\tilde{\mathrm{F}}(t, \tilde{\mathrm{S}}_t) = \frac{\partial \tilde{\mathrm{F}}}{\partial x}(t, \tilde{\mathrm{S}}_t) d\tilde{\mathrm{S}}_t$$

Le candidat naturel pour le processus de couverture H_t est alors :

$$H_t = \frac{\partial \tilde{\mathrm{F}}}{\partial x}(t, \tilde{\mathrm{S}}_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) \tag{10}$$

En posant $H_t^0 = \tilde{\mathrm{F}}(t, \tilde{\mathrm{S}}_t) - H_t \tilde{\mathrm{S}}_t$, le portefeuille (H_t^0, H_t) est autofinancé et sa valeur actualisée est bien $\tilde{\mathrm{V}}_t = \tilde{\mathrm{F}}(t, \tilde{\mathrm{S}}_t)$.
Remarque : la quantité H_t définie dans (10) est appelée le delta de l'option.

3.3 La notion de volatilité implicite

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix d'une option est fonction du niveau -supposé constant- de la volatilité du sous-jacent. Cette hypothèse ne résiste cependant pas à l'examen des prix de vanilles du marché : le calcul de la volatilité implicite, c'està-dire de la valeur de la volatilité qui, injectée dans la formule de Black-Scholes permet de retrouver un prix donné, montre une double dépendance de cette grandeur en la maturité de l'option d'une part et en son strike d'autre part. Si l'on note $C_t^m(T, K)$ le prix, observé sur le marché à l'instant t, d'une option de strike K et de maturité T. La volatilité implicite $\Sigma_t(T, K)$ vérifie alors :

$$C_t^m(T, K) = C(t, S_t; T, K, \Sigma_t(T, K)) \tag{11}$$

Cette notion s'étend, grâce à des arguments d'a-o-a, à des options de payoff h convexe. Des résultats intéressants sur la volatilité implicite peuvent être trouvés dans l'article de Berestycki [Ber]

4 Modèles de marché pour volatilité implicite

4.1 Les vanilles comme actifs de marché

Nous avons vu dans la section précédente que Black et Scholes modélisent l'incertain sur le cours d'un actif de marché par un mouvement brownien standard unidimensionnel. Dans un tel modèle, l'utilisation de deux actifs -le cash et l'action- permet de se couvrir parfaitement contre le bruit du marché ainsi simulé. Toutefois, le modèle de Black-Scholes (notamment vis-à-vis de la surface de volatilité implicite qui n'est jamais un plan d'altitude constante) étant limité, les chercheurs ont introduit un plus grand nombre de bruits dans la modélisation des cours des sous-jacents. Il est donc devenu nécéssaire d'utiliser un plus grand nombre d'actifs de marché lors de la réalisation de la couverture. Les options vanilles européennes étant côtées sur le marché avec une liquidité importante pour les strikes et les maturités pertinentes, elles sont ainsi devenues des outils pour hedger des produits exotiques, et donc des actifs à part entière, "presque" dissociés du sous-jacent. L'idée de définir des modèles de diffusion pour vanilles s'est donc présentée naturellement, c'est cette question que nous allons traiter maintenant.

4.2 Un modèle de diffusion sous-jacent/option

Commençons par étudier les travaux de Schonbucher, de Schweitzer et de Wissel [Sch]. Dans la suite, on considère une option de payoff h convexe et de maturité T donnés et on note C_t^T son prix à l'instant t. Pour simplifier les notations, considérons que le taux d'intérêt r est nul (les prix ci-dessous sont donc déjà actualisés). La valeur d'une option décrite par (9) dans le modèle Black-Scholes de base devient alors :

$$F(t,x) = E^*[h(xe^{\sqrt{\gamma_t}\mathcal{N}-\gamma_t/2})] = c(x,\gamma_t)$$

où $\mathcal{N}$ est une gaussienne centrée de variance 1 et $\gamma_t = (T-t)\sigma^2$. Ces constatations motivent la définition suivante de la variance implicite Γ_t^T :

$$c(S_t, \Gamma_t^T) = C_t^T$$

L'existence de Γ_t^T est obtenue grâce à des raisonnements de non-arbitrage que nous n'exposerons pas ici, ce sont ces mêmes raisonnements qui imposent la positivité de Γ_t^T et de $X(t,T)$ défini ci-après. En supposant que C_t^T soit différentiable en T, nous sommes maintenant en mesure de définir la variance implicite forward, de maturité T, comme étant :

$$X(t,T) := \frac{\partial}{\partial T}(\Gamma_t^T)$$

Le cadre de la modélisation peut désormais être posé (en réalité, il s'agit de la transposition des travaux de Heath, Jarrow et Merton sur un modèle de taux court [Hea]). On modélise ainsi un processus pour le prix du sous-jacent $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ et une famille de processus de prix $(C_t^T)_{0\leq t\leq T}$ (T>0) pour des contrats payant $h(S_T)$ au temps T par :

$$C_t^T = c(S_t, \int_t^T X(t,s)ds) \tag{12}$$

avec les dynamiques suivantes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \qquad (0 \leq t), \qquad S_0 = s_0 \tag{13}$$

$$dX(t,T) = \alpha(t,T)dt + v(t,T)dW_t, \qquad (0 \leq t \leq T), \qquad X(0,T) = X_0(T) \tag{14}$$

où W_t est un mouvement brownien m-dimensionnel. On définit :

$$\Gamma_t^T := \int_t^T X(t,s)ds \tag{15}$$

Chaque $X(.,T)$ est un processus positif modélisant la variance implicite forward de maturité T. Bien évidemment, un tel modèle suppose d'importantes contraintes sur les déviations et les volatilités pour qu'il soit utilisable d'un point de vue financier. Ce sont ces contraintes qui nous intéressent ici.

4.3 Relations sur les coefficients des diffusions

Commençons par la proposition suivante :

Proposition 1. *Sous la probabilité P, la dynamique de C_t^T pour T fixé s'écrit comme suit (les indices désignant les dérivées partielles) :*

$$dC_t^T = (c_S\mu_t S_t + c_\gamma[\sigma_t^2 - X(t,t) + \int_t^T \alpha(t,s)ds] + \frac{1}{2}c_{\gamma\gamma}|\int_t^T v(t,s)ds|^2 + c_{S\gamma}S_t\sigma_t \int_t^T v^1(t,s)ds)dt \quad (16)$$
$$+c_S\sigma_t S_t dW_t^1 + c_\gamma[\int_t^T v(t,s)ds]dW_t.$$

Démonstration : grâce à (14) et (15), et au théorème de Fubini, on trouve :

$$d\Gamma_t^T = [\int_t^T \alpha(t,s)ds]dt + [\int_t^T v(t,s)ds]dW_t - X(t,t)dt \quad (17)$$

L'application du lemme d'Ito permet alors de conclure la preuve. □
Il reste maintenant à trouver les conditions sur les diffusions permettant de garantir l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Un résultat fondamental en finance qu'on peut trouver dans un article de Schachermayer [Del] intitulé : "A general version of the fundamental theorem of asset pricing" est l'équivalence entre absence d'opportunité d'arbitrage et existence d'une mesure équivalente à la probabilité historique sous laquelle les prix sont des martingales. En utilisant ce théorème, il est possible de trouver les conditions de non-arbitrage suivantes :

$$\sigma_t^2 + \sigma_t \lim_{T\searrow t}(\frac{S_t c_{S\gamma}}{c_\gamma}\int_t^T v^1(t,s)ds) + \frac{1}{2}\lim_{T\searrow t}(\frac{c_{\gamma\gamma}}{c_\gamma}|\int_t^T v(t,s)ds|^2) - X(t,t) = 0, \quad (18)$$

$$\mu_t = -\sigma_t b_t^1, \quad (19)$$

$$\alpha(t,T) = -b_t v(t,T) - \frac{c_{\gamma\gamma}}{c_\gamma}v(t,T)\int_t^T v(t,s)ds - \frac{1}{2}\partial_\gamma(\frac{c_{\gamma\gamma}}{c_\gamma})X(t,T)|\int_t^T v(t,s)ds|^2 \quad (20)$$
$$-S_t\frac{c_{S\gamma}}{c_\gamma}\sigma_t v^1(t,T) - S_t\partial_\gamma(\frac{c_{S\gamma}}{c_\gamma})X(t,T)\sigma_t\int_t^T v^1(t,s)ds$$

pour un processus (b_t) représentant la prime de risque du marché. Plus précisément, il est possible d'écrire le théorème :

Théorème 3. *S'il existe une mesure Q équivalente à P et sous laquelle S et C^T sont des martingales pour presque tout $T > 0$ alors σ_t est solution de (18) et il existe une prime de risque b satisfaisant (19) et (20) pour presque tout t, P presque-sûrement.*
Réciproquement, si μ, α, v et σ vérifient (18), (19) et (20) pour un certain processus b. Alors pour tout T, il existe une mesure Q^{T^*} équivalente à P et telle que S et C^T sont des martingales sous Q^{T^*}.*

La démonstration de ce théorème est fondée sur le théorème de Girsanov et sur le lemme d'Ito. Nous ne la présenterons pas ici. Schweitzer parvient de plus à démontrer des résultats d'existence de solutions aux systèmes d'eds qui découlent de ces conditions sur les coefficients. Toutefois, un approfondissement des résultats de Schweitzer semble nécessaire. En effet, les conditions précédentes sont valables pour une fonction h donnée. Dans le cas des options vanilles, cela revient à fixer le strike K. Il serait intéressant de parvenir à une diffusion de l'ensemble de la surface des vanilles.

5 Conclusion

Nous avons abordé dans ce papier le problème des options et de leur couverture. Ces problèmes admettent des solutions connues dans le cadre du modèle de Black-Scholes, solutions qui ont valu à leurs auteurs le prix nobel d'économie il y a quelques années. Néanmoins, avec l'apparition de produits dérivés chaque jour plus complexes, ce formalisme ne suffit plus. Il devient nécéssaire de développer des modèles de diffusion non plus seulement pour le sous-jacent mais également pour les options vanilles. Ce sont ce genre de modèles que Schonbucher, Schweitzer... ont commencé à créer et sur lesquels porteront mes recherches futures.

Références

[Ber] H. Berestycki, J. Busca, and I. Florent. Computing the implied volatility in stochastic volatility models. Comm. Pure Appl. Math., 57(10) :1352-1373, 2004

[Sch] M. Schweizer, J. Wissel. Term structures of implied volatilities : Absence of arbitrage and existence results. Mathematical Finance 18, 77-114, 2008

[Lam] D. Lamberton, B. Lapeyre. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Ellipses, 1997

[Hea] D. Heath, R. Jarrow, A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation, Econometrica, 60 :77-105, 1992

[Del] F. Delbaen, W. Schachermayer. A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. Math. Annalen 300, 1994