

Modèles de dimères et champ libre gaussien

Jonathan Desponds et Pierre Tarrago
Sous la direction de Wendelin Werner et Jesper Jacobsen

10 décembre 2009

Table des matières

1	Introduction	2
2	Fonction de partition pour le modèle de dimères sur le réseau hexagonal	2
2.1	Équivalence entre différents modèles	2
2.2	Cas du tore : calcul de la fonction de partition	3
2.3	Limite de la fonction de partition	9
3	Définitions et premières propriétés	11
3.1	La fonction de hauteur	11
3.2	Constructions du champ libre gaussien	12
3.2.1	Espaces abstraits de Wiener	13
3.2.2	Espaces de Hilbert gaussiens	15
3.3	Propriété de Markov du champ libre gaussien	16
4	Convergence de la fonction de hauteur	17
4.1	Matrice de Kasteleyn	17
4.2	Asymptote de la fonction de corrélation dans le cas borné	22
4.3	Convergence des moments et théorème de Prokhorov	27

1 Introduction

Dans cet exposé, nous nous intéressons aux limites de différents modèles mathématiques issus de la physique statistique. On étudie d'abord le recouvrement d'un réseau hexagonal par des dimères dont on cherche à évaluer la fonction de partition. Ce résultat est relié à de nombreuses applications dans le domaine de la physique statistique (notamment sur le modèle d'Ising) que nous ne chercherons pas à développer ici. Le modèle étudié peut aussi être interprété comme une fonction de hauteur aléatoire sur le graphe. Le comportement de ces distributions aléatoires lorsque le pas du graphe tend vers 0 est l'objet de la troisième partie. On démontre qu'elles convergent vers un analogue du mouvement Brownien en dimension supérieure appelé champ libre gaussien. Nous nous attachons particulièrement dans la deuxième partie de l'exposé à en présenter différentes approches pour permettre une compréhension plus intuitive de l'objet.

L'exposé permet en particulier de comprendre les différences entre les méthodes employées en mathématiques et en physique sur un problème qui s'interprète dans les deux domaines.

2 Fonction de partition pour le modèle de dimères sur le réseau hexagonal

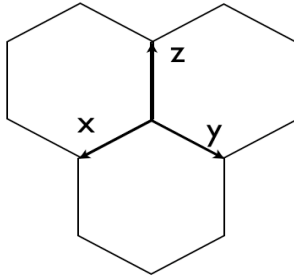


FIGURE 1 – orientation des axes

Le réseau présente trois type d'arêtes (cf figure 1), nommées \hat{x} , \hat{y} et \hat{z} suivant leur orientation et auxquelles sont respectivement attribués les poids a , b et c . La contribution d'une configuration à la fonction de partition du système sera donc $a^{N_{\hat{x}}} b^{N_{\hat{y}}} c^{N_{\hat{z}}}$, où $N_{\hat{e}}$ représente le nombre d'arêtes d'orientation \hat{e} recouvertes

par un dimère.

2.1 Équivalence entre différents modèles

Le modèle de dimères peut-être représenté par plusieurs modèles différents qui s'avèrent plus ou moins utiles suivant les situations. Le premier, nommé le modèle de boucles, s'intéresse aux arêtes du réseau non recouvertes par les dimères. Il apparaît alors un ensemble de boucles recouvrant le réseau (voir figure 2). Comme il n'existe pour chaque sommet qu'une unique arête adjacente

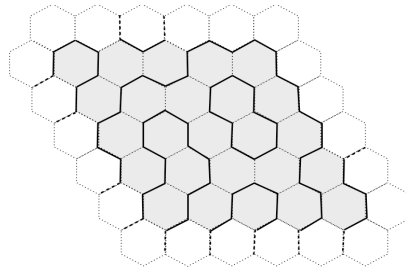


FIGURE 2 – modèle de boucles

recouverte par un dimère, ces boucles ne s'intersectent jamais et passent par chacun des sommets du graphe. On peut également traduire le poids d'une configuration dans la fonction de partition à partir de ce modèle de boucle. Remplaçons le poids $w(\hat{e})$ d'une arête par le poids modifié :

$$\tilde{w}(\hat{e}) = \frac{(\prod_{\hat{e} \in G} w(\hat{e}))^{1/|G|}}{w(\hat{e})}$$

Le poids \mathcal{N} d'une boucle \mathcal{B} est donc

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \prod_{\hat{e} \in \mathcal{B}} \tilde{w}(\hat{e})$$

On retrouve bien le poids obtenu dans la représentation de base en multipliant le poids de toutes les boucles. La fonction de partition est alors dans cette représentation :

$$\sum_{\text{configurations de boucle}} \prod \mathcal{N}(\mathcal{B})$$

Un autre modèle qui sert peu mais qui a une interprétation plus claire dans

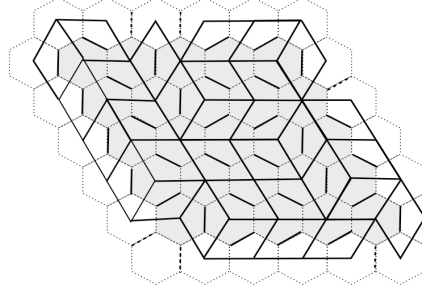


FIGURE 3 – empilement dans le modèle de rhombus

la deuxième partie est le suivant : on recouvre chaque arête avec dimère par un losange (voir figure 3). Cette représentation fait apparaître visuellement un empilement de cube en trois dimensions, ce qui fait penser que l'on peut faire correspondre à chaque configuration une fonction du réseau (que l'on nommera fonction de hauteur).

Enfin une dernière représentation qui servira dans le prochain paragraphe fait le lien entre le modèle de dimère et le diagramme espace-temps de la trajectoire de particule. Partons du modèle de losange précédent. Un losange est dit de type \hat{e} si le dimère qui le supporte est de type \hat{e} . Un losange de type \hat{z} est considéré comme du vide, un losange de type \hat{y} comme une particule se dirigeant vers la droite et un losange de type \hat{x} comme une particule se dirigeant vers la gauche. Une image de cette représentation dans le cas qui nous intéressera directement (celui du tore) est présentée dans la figure suivante. En ordonnée est représenté le temps, en abscisse est représentée l'abscisse de la particule. Notons en particulier que deux trajectoires ne se croisent jamais. C'est cette représentation qui sert d'appui pour trouver la fonction de partition du modèle de dimère sur le tore, c'est pourquoi nous allons préciser les notations pour cette représentation pour le tore. Le tore $H_{m,n}$ correspond au réseau périodique composé de n rangées contenant chacune m hexagones alignés horizontalement. Nécessairement n doit être pair pour qu'un tel tore existe. Le temps $t=0$ correspond au milieu d'une rangée choisie arbitrairement (ce qui importe peu en raison de la symétrie du tore). Le temps augmente de 1 à chaque milieu de rangée supérieure. L'abscisse 0 est fixée au milieu d'un segment vertical d'un hexagone arbitraire de la rangée de référence pour le temps (voir un exemple sur la figure 4). L'abscisse augmente de 1 à chaque demi-hexagone. Les raisons de ce choix d'axe est que, avec ce paramétrage, toutes les particules ont une abscisse paire si t est pair, et une abscisse impaire si t est impair.

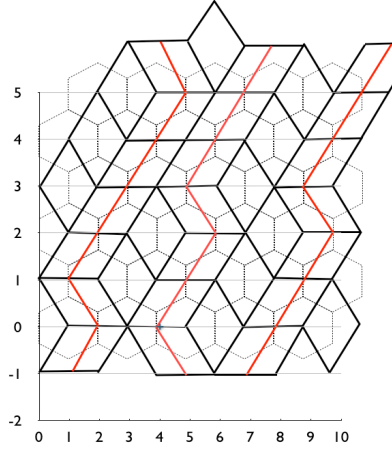


FIGURE 4 – image de la trajectoire d’une particule

2.2 Cas du tore : calcul de la fonction de partition

Soit $H_{m,n}$ le tore de longueur m et de hauteur n comme défini précédemment. Dans toute la suite de l'article $Z_{m,n}$ désignera la fonction de partition du modèle. Le calcul de la fonction de partition du modèle de dimère sur un réseau hexagonal a été effectué par la méthode dite des matrices de Kasteleyn en 1961 par Kasteleyn. Nous abordons une méthode un peu différente par l'utilisation de matrices de transfert. Par simplicité le poids de \hat{z} est considéré comme valant 1 (cela n'entraîne aucune perte de généralité puisque seul le rapport entre les poids rentre en compte dans l'étude du système). Utilisons la dernière représentation donnée du modèle de dimère. Nous pouvons établir une partition des configurations possibles en fonction du nombre de particules contenues dans une de ces configurations. Soit $Z_{m,n}(p)$ la fonction de partition partielle correspondant aux configurations ayant p particules. Le calcul de $Z_{m,n}(p)$ se fait en utilisant la matrice de transfert du système. Notons que l'on se place dans un système de particules indiscernables, ce qui permet de prendre en compte les cas où une particule ne se retrouve pas à sa position initiale au bout de n sauts mais à la position d'une autre particule (comme sur la figure). Le système de particules situées au temps t en position $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ (à une permutation près d'après la remarque précédente) peut se retrouver au temps $t+1$ en position $\{X_1 + \varepsilon(1), X_2 + \varepsilon(2), \dots, X_p + \varepsilon(p)\}$ (où $\varepsilon(i) \in \{-1; 1\}$) avec un poids de $a^{|\{i, \varepsilon(i)=1\}|} b^{|\{i, \varepsilon(i)=-1\}|}$, et ce à condition que les $X_i + \varepsilon(i)$ soient tous distincts (on a vu que deux particules ne pouvaient pas se croiser). On construit donc une matrice Γ telle que :

$$\Gamma(\{X_1, X_2, \dots, X_p\}, \{X_1 + \varepsilon(1), X_2 + \varepsilon(2), \dots, X_p + \varepsilon(p)\}) =$$

$$- 0 \text{ si } \exists(i, j), X_i + \varepsilon(i) = X_j + \varepsilon(j)$$

- 0 si $\exists(i, j), X_i = X_j$
- 0 si $\exists(i, j), X_i$ et X_j sont de parités différentes
- $a^{|\{i, \varepsilon(i)=1\}|} b^{|\{i, \varepsilon(i)=-1\}|}$ sinon

Et ce afin de tenir compte de toutes les configurations impossibles (rencontre impossible entre particules, parité identique des abscisses des particules à chaque temps t). Dans tous les autres cas $\Gamma(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$. Il est aisé de vérifier (par récurrence par exemple) que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma^n(\{X_1, X_2, \dots, X_p\}, \{X'_1, X'_2, \dots, X'_p\}) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p} \prod_i p(\gamma_i)$$

où $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ est un ensemble de chemins disjoints partant chacun d'un X_i et arrivant en X_j au bout d'un temps n et p représente le poids d'une trajectoire (c'est à dire le produit des poids de chaque losange supportant un morceau de trajectoire). Puisque nous nous intéressons au tore, nous ne devons prendre en compte que les cas où $(X_1, X_2, \dots, X_p) = (X'_1, X'_2, \dots, X'_p)$. De plus toutes les particules ont une abscisse paire au temps $t = 0$. Finalement on trouve donc :

$$Z_{m,n}(p) = \sum_{(2X_1, 2X_2, \dots, 2X_p)} \Gamma^n((2X_1, 2X_2, \dots, 2X_p), (2X_1, 2X_2, \dots, 2X_p))$$

Par symétrie :

$$\begin{aligned} &= \Gamma^n(\{2X_1 + 1, 2X_2 + 1, \dots, 2X_p + 1\}, \{2X_1 + 1, 2X_2 + 1, \dots, 2X_p + 1\}) \\ &= \Gamma^n(\{2X_1, 2X_2, \dots, 2X_p\}, \{2X_1, 2X_2, \dots, 2X_p\}) \end{aligned} \quad (1)$$

et donc le résultat devient :

$$Z_{m,n}(p) = \frac{1}{2} Tr(\Gamma^n)$$

Resterait à calculer la trace de Γ^n . Pour ce faire nous pourrions utiliser la méthode dite de l'Ansatz de Bethe (qui sera détaillée si dessous). Cependant les contraintes sur la parité des coordonnées compliquent l'application de cette méthode, si bien que nous allons modifier la matrice sur laquelle nous allons appliquer l'Ansatz de Bethe. Si t est pair toutes les particules ont une abscisse paire, et si t est impair, toutes les particules sont d'abscisse impaire. Avec la donnée de t , la donnée de $\{\lfloor X_1/2 \rfloor, \lfloor X_2/2 \rfloor, \dots, \lfloor X_p/2 \rfloor\}$ permet sans ambiguïté de retrouver $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$. Dans ce sens, posons $\tilde{X}(i) = \lfloor X_i/2 \rfloor$. Deux cas de figure se présentent suivant que t est pair ou impair.

Si t est pair, l'abscisse X étant paire, une augmentation de 1 n'aura aucune incidence sur $\lfloor X/2 \rfloor$. En revanche une diminution de 1 baissera toujours $\lfloor X/2 \rfloor$ de 1. Donc lorsque t est pair, \tilde{X} reste constant entre t et $t + 1$ avec un poids a et diminue de 1 avec un poids b . La nouvelle matrice de transfert T lorsque t est pair est alors :

$$T(\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_p\}, \{\tilde{X}_1 + \varepsilon(1), \tilde{X}_2 + \varepsilon(2), \dots, \tilde{X}_p + \varepsilon(p)\}) =$$

- 0 si $\exists(i, j, \tilde{X}_i + \varepsilon(i) = \tilde{X}_j + \varepsilon(j)$ ou $\tilde{X}_i = \tilde{X}_j$
- $a^{|\{i, \varepsilon(i)=0\}|} b^{|\{i, \varepsilon(i)=-1\}|}$ sinon

Et $T(\vec{X}, \vec{Y}) = 0$ dans tous les autres cas.

Inversement si t est impair, \tilde{X} reste constant entre t et $t + 1$ avec un poids b et augmente de 1 avec un poids a . Cela donne donc une matrice \tilde{T} :

- $$\tilde{T}(\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_p\}, \{\tilde{X}_1 + \varepsilon(1), \tilde{X}_2 + \varepsilon(2), \dots, \tilde{X}_p + \varepsilon(p)\}) =$$
- 0 si $\exists(i, j), \tilde{X}_i + \varepsilon(i) = \tilde{X}_j + \varepsilon(j)$ ou $\tilde{X}_i = \tilde{X}_j$
 - $a^{|\{i, \varepsilon(i)=1\}|} b^{|\{i, \varepsilon(i)=0\}|}$ sinon

Comme on a vu que n est nécessairement pair, en écrivant $n = 2k$, on vérifie le résultat suivant :

$$Z_{m,n}(p) = Tr((\tilde{T}T)^k) \quad (2)$$

Il faut donc diagonaliser $\tilde{T}T$. Il se trouve que T et \tilde{T} sont codiagonalisables, propriété que nous allons prouver avec l'ansatz de Bethe. Il faut distinguer les cas p pair et p impair. Commençons par ce dernier. On note z_1, z_2, \dots, z_m les racines m -ièmes de l'unité. Montrons que pour $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ distincts, le vecteur $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ défini par :

$$\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}(\{X_1, X_2, \dots, X_p\}) = \begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_1} & \dots & z_{i_p}^{X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_p} & \dots & z_{i_p}^{X_p} \end{vmatrix}$$

(où les X_i sont rangés dans l'ordre croissant) est un vecteur propre commun à T et \tilde{T} . Calculons-en les valeurs propres respectives. p est ici impair donc :

$$\begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_1} & \dots & z_{i_p}^{X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_p} & \dots & z_{i_p}^{X_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_p} & \dots & z_{i_p}^{X_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_{p-1}} & \dots & z_{i_p}^{X_{p-1}} \end{vmatrix}$$

et on n'a pas à se soucier du passage de la n -ième particule d'une abscisse $p - 1$ à l'abscisse 0, ni de celui de la première particule d'une abscisse 0 à une abscisse $p - 1$ (cf. le cas pair pour une précision sur les problèmes rencontrés à ce niveau). Par exemple pour T :

$$\begin{aligned}
& (T(\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}) | \{X_1, X_2, \dots, X_p\}) \\
&= \sum_{f: I \rightarrow \{-1, 0\}} b^{|f^{-1}(\{-1\})|} a^{|f^{-1}(\{0\})|} \psi_{i_1, i_2, \dots, i_p} \{X_1 - p(1), X_2 - p(2), \dots, X_p - f(p)\} \\
&= \sum_{f: I \rightarrow \{-1, 0\}} b^{|f^{-1}(\{-1\})|} f^{|p^{-1}(\{0\})|} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod z_{i_j}^{X_{\sigma(j)} - f(\sigma(j))} \\
&= \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{f: I \rightarrow \{-1, 0\} | f^{-1}(\{0\})|=k} a^k b^{p-k} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod z_{i_j}^{X_{\sigma(j)}} \prod z_{i_j}^{-f(\sigma(j))} \\
&= \sum_{k=0}^{k=p} a^k b^{p-k} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod z_{i_j}^{X_{\sigma(j)}} \sum_{f: I \rightarrow \{-1, 0\} | f^{-1}(\{0\})|=k} \prod z_{i_j}^{-f(\sigma(j))} \\
&= \sum_{k=0}^{k=p} a^k b^{p-k} \psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}(X_1, X_2, \dots, X_p) \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}, |I|=k} \prod_{j \in I^c} z_{i_j}
\end{aligned}$$

On a donc montré que, sous la condition que $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ ne soit pas le vecteur nul, il était vecteur propre de T avec la valeur propre :

$$\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_p} = \sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{n-k} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=k} \prod_{j \in I^c} z_{i_j}$$

Or comme les z_{i_j} sont tous distincts, $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}(0, 1, \dots, p-1)$ est un déterminant de Vandermonde non nul, ce qui conclut le problème. Nous avons ainsi trouvé C_m^p vecteurs propres. Or T est un endomorphisme non nul sur une espace de dimension C_m^p . Nous avons donc diagonalisé T. On démontre de même que le vecteur $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ est également vecteur propre de \tilde{T} avec la valeur propre :

$$\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_p} = \sum_{k=0}^{k=n} b^k a^{n-k} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=k} \prod_{j \in I^c} \tilde{z}_{i_j}$$

si bien que nous pouvons obtenir les valeurs propres avec leurs multiplicités de $(\tilde{T}T)^k$ dans le cas pair. Nous reviendrons au calcul détaillé de cette valeur après l'étude du cas pair.

La raison pour laquelle nous ne pouvons pas traiter le cas pair de la même manière est que :

$$\begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_1} & \dots & z_{i_p}^{X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_p} & \dots & z_{i_p}^{X_p} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_p} & \dots & z_{i_p}^{X_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_{p-1}} & \dots & z_{i_p}^{X_{p-1}} \end{vmatrix}$$

Pour cette raison, il apparaîtrait, à la deuxième ligne du calcul dans le cas impair, des signes – qui feraient échouer le raisonnement. Remplaçons chaque z_i i-ème racine m-ième de l'unité par \tilde{z}_i i-ème racine m-ième de -1. L'avantage est que $\tilde{z}_i^{m-1} \times \tilde{z}_i = -1$ et non 1, ce qui va compenser les signes – apparaissant lors des permutations de colonnes dans les déterminants. Notons

$$\mathcal{F} = \{f : I \rightarrow \{-1, 0\}, X_p - f(p) \neq 0 \pmod{m}\}$$

et

$$\mathcal{G} = \{f : I \rightarrow \{-1, 0\} | f^{-1}(\{0\})| = k, X_p - f(p) \neq 0 \pmod{m}\}$$

Le calcul devient donc pour T (on renote \tilde{z}_i z_i pour alléger les calculs) :

$$\begin{aligned}
& (T(\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}) | \{X_1, X_2, \dots, X_p\}) \\
&= \sum_{f: I \rightarrow \{-1, 0\}} b^{|f^{-1}(\{-1\})|} a^{|f^{-1}(\{0\})|} \psi_{i_1, i_2, \dots, i_p} \{X_1 - f(1), X_2 - f(2), \dots, X_n - f(n)\} \\
&= \sum_{\mathcal{F}} b^{|f^{-1}(\{-1\})|} a^{|f^{-1}(\{0\})|} \begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_1 - f(1)} & \dots & z_{i_p}^{X_1 - f(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_p - f(p)} & \dots & z_{i_p}^{X_p - f(p)} \end{vmatrix} \\
&+ \sum_{\mathcal{F}} b^{|f^{-1}(\{-1\})|} a^{|f^{-1}(\{0\})|} \begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_p - f(p)} & \dots & z_{i_p}^{X_p - f(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_{p-1} - f(p-1)} & \dots & z_{i_p}^{X_{p-1} - f(p-1)} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

(Il faut toujours que l'ordre des coordonnées soit croissant par définition des coordonnées de $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}$)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mathcal{F}} b^{|f^{-1}(\{-1\})|} a^{|f^{-1}(\{0\})|} \begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_1 - f(1)} & \dots & z_{i_p}^{X_1 - f(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_p - f(p)} & \dots & z_{i_p}^{X_p - f(p)} \end{vmatrix} \\
&- \sum_{\mathcal{F}} b^{|f^{-1}(\{-1\})|} a^{|f^{-1}(\{0\})|} \begin{vmatrix} z_{i_1}^{X_1 - f(1)} & \dots & z_{i_1}^{X_1 - f(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i_1}^{X_p - f(p)} & \dots & z_{i_p}^{X_p - f(p)} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{\mathcal{G}} a^k b^{p-k} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod z_{i_j}^{X_{\sigma(j)}} \prod z_{i_j}^{-p(\sigma(j))} \\
&- \sum_{k=0}^{k=p} \sum_{\mathcal{G}} a^k b^{n-k} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{\sigma(j) \neq p} z_{i_j}^{X_{\sigma(j)}} \prod_{\sigma(j) \neq p} z_{i_j}^{-p(\sigma(j))} \times z_{i_{\sigma^{-1}(p)}}^0
\end{aligned}$$

Comme les \tilde{z} sont racines m-ièmes de -1 ,

$$1 = z_{i_{\sigma^{-1}(p)}}^0 = -z_{i_{\sigma^{-1}(p)}}^{p-1} \times z_{i_{\sigma^{-1}(p)}}$$

le calcul s'éclaircit et :

$$\begin{aligned}
& (T(\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}) | \{X_1, X_2, \dots, X_p\}) \\
&= \sum_{k=0}^{k=p} a^k b^{p-k} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod z_{i_j}^{X_{\sigma(j)}} \sum_{\mathcal{G}} \prod z_{i_j}^{-p(\sigma(j))} - \sum_{\mathcal{G}} \prod z_{i_j}^{-p(\sigma(j))} \times (-1) \\
&= \sum_{k=0}^{k=p} a^k b^{p-k} \psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}(X_1, X_2, \dots, X_p) \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}, |I|=k} \prod_{j \in I^c} z_{i_j}
\end{aligned}$$

Pour \tilde{T} la méthode est similaire avec un problème quand X_1 vaut 0. L'important reste que \tilde{T} admette comme vecteurs propres les mêmes vecteurs $\psi_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ que T avec pour valeur propre :

$$\sum_{k=0}^{k=p} b^k a^{p-k} \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}, |I|=k} \prod_{j \in I^c} \tilde{z}_{i_j}.$$

Reste maintenant à simplifier les valeurs trouvées. On note que :

$$\sum_{k=0}^{k=n} a^k b^{n-k} \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, |I|=k} \prod_{j \in I^c} x_j = \prod_{j=1}^p (a + bx_j)$$

et finalement en rappelant que $n = 2k$, $Z_{m,n}(p)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} & - \sum_{z_1, \dots, z_p} p \text{ racines } m\text{-ièmes distinctes de } 1 \prod ((a + bz_i)(b + a\bar{z}_i))^k \text{ si } p \text{ impair} \\ & - \sum_{z_1, \dots, z_p} p \text{ racines } m\text{-ièmes distinctes de } -1 \prod ((a + bz_i)(b + a\bar{z}_i))^k \text{ si } p \text{ pair} \end{aligned}$$

Dans toute la suite nous supposons que $n = 2m$ et m est pair pour simplifier les signes. Le cas général est semblable. Cela nous permet d'écrire que :

$$((a + bz_i)(b + a\bar{z}_i))^m = (-1)^p ((a + bz_i)(b + a\bar{z}_i) \times z_i)^m = (-1)^p (a + bz_i)^{2m}$$

On reconnaît alors que $Z_{m,n}(2p)$ est l'expression symétrique de degré $2p$ des racines du polynôme $\prod (X + (a + bz_i)^{2m})$, si bien que :

$$\sum_p Z_{m,2m}(2p) = \frac{1}{2} (\prod (1 + (a + bz_i)^{2m}) + \prod (-1 + (a + bz_i)^{2m}))$$

De même, on a pour p impair :

$$\sum_p Z_{m,2m}(2p+1) = \frac{1}{2} (\prod (1 + (a + bz_i)^{2m}) - \prod (-1 + (a + bz_i)^{2m}))$$

En reconnaissant encore les polynômes $X^{2m} - 1$ et $X^{2m} + 1$, on a finalement l'expression finale :

Proposition 1. *Si $m = 2n$ et m est pair :*

$$\begin{aligned} Z_{m,2m} &= \frac{1}{2} (\prod_{z^m=1, w^{2m}=1} (a + bz + w) + \prod_{z^m=1, w^{2m}=-1} (a + bz + w)) \\ &+ \prod_{z^m=-1, w^{2m}=1} (a + bz + w) - \prod_{z^m=-1, w^{2m}=-1} (a + bz + w) \end{aligned}$$

Ce résultat est à rapprocher des résultats de Kenyon obtenus avec la méthode de Kasteleyn. Nous allons en étudier la limite dans un certain sens dans la prochaine section.

2.3 Limite de la fonction de partition

Cette section réadapte la même démonstration que [2]. Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *La suite $Z_{m,2m}^{1/4m^2}$ admet une limite Z en l'infini qui vérifie :*

$$\log Z = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{S^1} \int_{S^1} \log(a + bz + w) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}$$

Notons :

- $P_{00} = \frac{1}{2}(\prod_{z^m=1, w^{2m}=1}(a + bz + w))$,
- $P_{01} = \frac{1}{2}(\prod_{z^m=1, w^{2m}=-1}(a + bz + w))$,
- $P_{10} = \frac{1}{2}(\prod_{z^m=-1, w^{2m}=1}(a + bz + w))$
- et $P_{11} = \frac{1}{2}(\prod_{z^m=-1, w^{2m}=-1}(a + bz + w))$.

On a alors $Z_{m,2m} = \frac{1}{2}(P_{00} + P_{01} + P_{10} - P_{11})$.

De plus comme $P_{10} - P_{11}$ correspond à la contribution des configurations avec p particules (p impair), on a nécessairement $P_{10} - P_{11} \geq 0$ et donc

$$\frac{1}{2} \max(P_{00}, P_{01}) \leq Z_{m,2m} \leq \frac{3}{2} \max(P_{ij})$$

Compte tenu du fait que chaque P_{ij} est positif cela nous permet un encadrement de $Z_{m,2m}^{1/4m^2}$:

$$\left(\frac{1}{2} \max(P_{00}, P_{01})\right)^{1/4m^2} \leq Z_{m,2m}^{1/4m^2} \leq \left(\frac{3}{2} \max(P_{ij})\right)^{1/4m^2}$$

Montrons que $\left(\frac{1}{2} \max(P_{00}, P_{01})\right)^{1/4m^2}$ et $\left(\frac{3}{2} \max(P_{ij})\right)^{1/4m^2}$ convergent vers la même limite.

Après passage au logarithme apparaît dans chacun des termes une somme de Riemann approchant l'intégrale recherchée. Reste à montrer que ces somme de Riemann approchent bien l'expression :

$$\frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{S^1} \int_{S^1} \log(a + bz + w) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}.$$

Notons que par symétrie :

$$\int_{S^1} \int_{S^1} \log(a + bz + w) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w} = \int_{S^1} \int_{S^1} \log(|a + bz + w|) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}$$

Si le triplet $(1, a, b)$ ne satisfait pas l'inégalité triangulaire, $\log(|a + bz + w|)$ est continue sur $S^1 \times S^1$ et il y a donc convergence de l'ensemble des sommes de Riemann vers la quantité souhaitée, ce qui conclut le problème.

Si le triplet $(1, a, b)$ satisfait l'inégalité triangulaire, $\log(|a + bz + w|)$ peut admettre des singularité sur $S^1 \times S^1$ qui peuvent compromettre la convergence des intégrales de Riemann.

Un rapide calcul montre que cette fonction admet au plus deux singularité en (z_0, w_0) et en (\bar{z}_0, \bar{w}_0) . Il faut montrer qu'un seul des P_{ij} ne peut avoir un de ses termes qui tombe trop près des singularités.

Supposons dans un premier temps que $a + b \neq 1$ et posons :

- $f(x, y) = a + be^{ix} + e^{iy}$,
- $z_0 = e^{ix_0}$
- et $w_0 = e^{iy_0}$.

Dans les P_{ij} , les termes x et y sont en $k\pi/2m$ et chaque couple $(k\pi/2m, k'\pi/2m)$ n'appartient qu'à au plus un seul P_{ij} . Donc comme deux couples $(k\pi/2m, k'\pi/2m)$ sont au minimum distants de $\pi/2m$, un seul des P_{ij} au maximum a un terme dans une boule de rayon de $\pi/4m$ d'une singularité. Comme les P_{ij} sont stables par conjugaison ce même P_{ij} éventuel aura un terme dans une boule de rayon de $\pi/4m$ de l'autre singularité.

Dans un voisinage de x_0, y_0 , un développement limité donne :

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{y_0}(y - y_0) + o((x - x_0)^2, (y - y_0)^2)$$

Donc sur $B(r) = B((x_0, y_0), r)$ avec r petit, la somme de Riemann partielle pour P_{ij} donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4m^2} \sum_{(x,y) \in B(r)} \log(f(x, y)) &= \frac{1}{4m^2} \sum_{(x,y) \in B(r)} \log\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}(x - x_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial y}|_{y_0}(y - y_0) + o((x - x_0)^2, (y - y_0)^2)\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Comme pour x petit

$$\log(x + o(x^2)) = \log(x(1 + o(x))) = \log x + o(x)$$

et avec la présence de $1/4m^2$ cela donne :

$$\frac{1}{4m^2} \left[\sum_{(x,y) \in B(r)} \log \left| \frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{y_0}(y - y_0) \right] + o(r) \quad (4)$$

Comme $a + b \neq 1$, un calcul simple montre que :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0}}{\frac{\partial f}{\partial y}|_{y_0}} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Donc $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0}x + \frac{\partial f}{\partial y}|_{y_0}y$ est un homéomorphisme et par équivalence des normes en dimension finie, il existe C tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0}x + \frac{\partial f}{\partial y}|_{y_0}y \geq C |x + iy|.$$

Partitionnons l'ensemble des points (x, y) présents dans les sommes de Riemann P_{ij} suivant leur appartenance à l'anneau de rayon intérieur $k/4m$ et de rayon extérieur $k + 1/4m$, avec $k \geq 1$ (excepté l'unique cas problématique). Chacun de ces anneaux contient au maximum $C'k$ points de la somme de Riemann.

On obtient pour la somme

$$\frac{1}{4m^2} \left[\sum_{(x,y) \in B(r)} \log \left| \frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{y_0}(y - y_0) \right]$$

la borne inférieure :

$$\frac{1}{4m^2} \sum_{1 \leq k \leq r \times 4m} C'k \log\left(C \frac{k}{4m}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C' \int_0^r Cx \log(x) dx = o(r)$$

Et ce en particulier car $x \log(x)$ est continu en 0. Pour r assez petit un majorant simple pour la borne est 0 (commun à tous les P_{ij}).
Maintenant considérons $\epsilon > 0$ et r tels que :

$$|C' \int_0^r Cx \log(x) dx| \leq \frac{\epsilon}{5}$$

et tels que le terme en $o(r)$ dans (5) soit également plus petit que $\frac{\epsilon}{5}$ et enfin que

$$|\int_{B(r)} \log(a + bz + w) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}| \leq \frac{\epsilon}{5}$$

Soit n_0 tel que

– pour $n \geq n_0$,

$$|\frac{1}{4m^2} \sum_{1 \leq k \leq r \times 4m} C' k \log(C \frac{k}{4m}) - C' \int_0^r Cx \log(x) dx| \leq \frac{\epsilon}{5}$$

– pour $n \geq n_0$, les sommes de Riemann hors de $B(r)$ soit proche de l'intégrale à plus de $\frac{\epsilon}{5}$ près.

On aura alors pour ces mêmes n :

$$|\frac{1}{4m^2} \log(\max(P_{00}, P_{01})) - \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{S^1} \int_{S^1} \log(a + bz + w) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}| \leq \epsilon$$

Et

$$|\frac{1}{4m^2} \log(\max(P_{ij})) - \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{S^1} \int_{S^1} \log(a + bz + w) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}| \leq \epsilon.$$

Ceci conclut la convergence dans le cas $a + b \neq -1$.

Si $a + b = 1$, on remarque que :

$$Z_{m,2m}^{1/4m^2}(a - \epsilon, b) \leq Z_{m,2m}^{1/4m^2}(a, b) \leq Z_{m,2m}^{1/4m^2}(a + \epsilon, b)$$

et la continuité dans l'intégrale à paramètre (a, b) , $\int_{S^1} \int_{S^1} \log(a + bz + w) \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}$, permet de conclure.

$\log Z$ est appelé énergie libre par domaine fondamental du système.

3 Définitions et premières propriétés

3.1 La fonction de hauteur

Nous définissons ici la fonction de hauteur en nous inspirant de [7].

Définition 1. Soit G un graphe planaire . On dit que G est biparti si l'on peut colorier les sommets de G en deux couleurs (dans la suite on choisira noir et blanc) de telle sorte que deux sommets voisins soient toujours de couleurs différentes¹. On dira qu'il est \mathbb{Z}^2 périodique si le graphe et son coloriage en blanc et noir sont préservés par les translations à coordonnées entières.

1. dans la suite on considérera des réseaux hexagonaux

On appelle configuration de dimères (ou couplage parfait) sur le graphe G un sous-ensemble d'arêtes de G dont chaque sommet est incident à exactement une arête de ce sous-ensemble. A toute configuration de dimères on peut associer un flot : chaque dimère est un arc $+1$ du blanc vers le noir. Ainsi chaque sommet blanc est une source de débit 1 et chaque sommet noir un puits de débit 1. Choisissons une configuration de dimères M_0 et son flot associé ω_0 . Alors pour tout autre configuration de dimères M de flot ω le flot $\omega - \omega_0$ est de divergence nulle (de tous points partent deux arcs de valeur opposées). Fixons une face f_0 ; pour toute face f , si γ est un chemin de f_0 à f alors le flux de $\omega - \omega_0$ à travers γ est indépendant du choix de γ et c'est donc une fonction de f . On appelle cette fonction, notée h , fonction de hauteur de M . Le choix de M_0 et de f_0 ne fait varier la fonction que d'une constante. A une constante additive près, la fonction de hauteur ne dépend donc que de M .

3.2 Constructions du champ libre gaussien

Dans cette partie nous nous intéresserons à deux constructions différentes du champ libre gaussien présentées par Scott Sheffield dans [8]. La première nous sera utile par la suite pour les démonstrations. La seconde, quant à elle, est plus intuitive et permet une meilleure compréhension de l'objet. Soit D un compact de \mathbb{R}^d . Notons $H_s(D)$ l'espace des fonctions C^∞ à valeurs réelles et à support dans D . Puisque tout élément de $H_s(D)$ a sa dérivée première dans $L^2(D)$ on peut définir le produit de Dirichlet suivant :

$$\forall f_1, f_2 \in H_s(D), (f_1, f_2)_\nabla = \int_D (\nabla f_1 \cdot \nabla f_2) dx$$

$H(D)$ est l'espace de Hilbert complété de $H_s(D)$ pour $(\cdot, \cdot)_\nabla$. Dans toute la suite on notera $(f_1, f_2)_\nabla$ pour $\int_D (\nabla f_1 \cdot \nabla f_2) dx$ et (f_1, f_2) pour $\int_D (f_1 f_2) dx$; et de même $\|f\|_\nabla = (\int_D (\nabla f)^2 dx)^{1/2}$ et $\|f\| = (\int_D f^2 dx)^{1/2}$.

Si V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie avec un produit scalaire (\cdot, \cdot) on note μ_V la loi de probabilité $Z^{-1} e^{-(v,v)/2} dv$ où Z est une constante de normalisation et dv la mesure de Lebesgue sur V . Dans ces conditions, une variable aléatoire sur V v est une Gaussienne standard si elle vérifie les quatre propriétés équivalentes suivantes :

- v suit la loi μ_V
- v suit la même loi que $\sum_{j=1}^d \alpha_j v_j$ où les v_j sont une base orthonormée de V et les α_j des gaussiennes i.i.d standards
- la fonction caractéristique de v est

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \mathbb{E} \exp(i(v, t)) = \exp(-\frac{1}{2} \|t\|^2)$$

2. ils'agit en fait de l'espace de Sobolev $\mathbb{H}_0^1(D)$

- $\forall w \in V$, la variable aléatoire (v, w) est une gaussienne standard de variance (w, w)

Le champ libre Gaussien est en quelque sorte une variable aléatoire sur $H(D)$. On serait tenté de le définir comme la variable aléatoire ayant pour lois finies dimensionnelles des gaussiennes standards. C'est impossible car ses projections sur une base orthonormée seraient alors des gaussiennes i.i.d dont la somme des carrés est infinie et les valeurs prises par le champ libre ne seraient donc pas dans $H(D)$.

3.2.1 Espaces abstraits de Wiener

Une des manières de définir le champ libre, proposée par Gross en 1967 consiste à faire apparaître les valeurs h qu'il prend non pas comme des éléments de $H(D)$ mais comme des éléments d'un espace de Banach plus grand B .

Définition 2. Une norme $|\cdot|$ sur H est dite mesurable si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie E_ϵ de H tel que

$$E \perp E_\epsilon \Rightarrow \mu_E(\{x \in E : |x| > \epsilon\}) < \epsilon$$

où μ_E est la mesure standard gaussienne sur E . Il existe différentes manières de construire de telles normes, la proposition suivante (que nous admettons) en est une :

Proposition 2. Soit T un opérateur sur H vérifiant

$$\sum \|Tf_j\| < \infty$$

où les f_j sont une base orthonormée alors la norme $\|T\cdot\|$ est mesurable.

Soit B le complété de H pour la norme $|\cdot|$ et B' l'espace des formes linéaires continues sur B . Soit \mathcal{B} la plus petite tribu pour laquelle les formes linéaires de B sont mesurables. On peut voir les éléments de B' comme des formes linéaires sur H et, H étant un espace de Hilbert, on peut donc voir B' comme un sous-espace de H et ainsi B' comme un sous-espace de B . Si $f \in B'$ et $b \in B$ on note (f, b) la valeur de f en b qui coïncide avec le produit interne de H quand les deux éléments sont dans H .

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de B' et v_1, \dots, v_k une base orthonormée de E . On définit l'application $\phi_E : B \rightarrow E$ par $\phi_E(b) = \sum_{j=1}^k (v_j, b)v_j$. Il s'agit en fait d'une extension à B de la projection orthogonale de H sur E . On a alors le théorème suivant démontré par Gross :

Théorème 1. Si $|\cdot|$ est une norme mesurable alors il existe une unique mesure de probabilité P sur (B, \mathcal{B}) telle que pour tout sous-espace de dimension finie E on ait

$$\forall S \in \mathcal{B}(E), P(\phi_E^{-1}S) = \mu_E(S)$$

soit d'après la proposition ci-dessus il existe une unique mesure de probabilités P telle que si h est une variable aléatoire de mesure de probabilité P alors $\forall f \in B'$, (h, f) est une variable aléatoire (à une dimension) gaussienne de moyenne nulle et de variance $(f, f)^2$.

Le triplet (H, B, P) est appelé espace abstrait de Wiener. On peut alors enfin définir le champ libre :

Définition 3. Soit $|\cdot|$ une norme mesurable sur $H(D)$ et B, B' et \mathcal{B} définis comme précédemment. Le champ libre gaussien défini par la norme $|\cdot|$ est l'unique variable aléatoire h \mathcal{B} -mesurable à valeur dans B telle que pour tout f dans B' la variable aléatoire (h, f) est une gaussienne de variance $\|f\|^2$. De manière équivalente h s'écrit $h = \sum \alpha_j f_j$ où les α_j sont des gaussiennes standard i.i.d et les f_j une base orthonormée de B . La somme a bien un sens dans B .

Nous allons maintenant donner un exemple de norme mesurable qui nous servira par la suite. Soit $\{e_j\}$ les vecteurs propres du laplacien sur D et $\{\lambda_j\}$ les valeurs propres (négatives) auxquelles ils sont associés. Ils forment une base orthonormée de $L^2(D)$. On obtient une base orthonormée de $H(D)$ en posant

$$\forall j, f_j = (-\lambda_j)^{-1/2} e_j$$

En effet si $j \neq k$

$$(e_j, e_k)_\nabla = (e_j, -\Delta e_k) = 0$$

et

$$(f_j, f_j)_\nabla = ((-\lambda_j)^{-1/2} e_j, (-\lambda_j)^{-1/2} e_j)_\nabla = 1$$

On admet la formule de Weyl, qui affirme que si $D \subset \mathbb{R}^d$ est borné alors $j^{d/2}/\lambda_j$ tend vers une constante quand $j \rightarrow \infty$. On définit alors les puissances négatives du laplacien de la manière suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, (-\Delta)^a \sum \beta_j e_j = \sum (-\lambda_j)^a \beta_j e_j$$

Cette définition a un sens même si a n'est pas un entier. On définit ensuite formellement $\mathcal{L}_a(D) := (-\Delta)^a L^2(D)$ c'est à dire des sommes $\sum \beta_j e_j$ où

$$\sum \beta_j (-\lambda_j)^{-a} e_j \in L^2(D)^3$$

Par intégration par parties on a

$$(f, g)_\nabla = (f, -\Delta g) = ((-\Delta)^{1/2} f, (-\Delta)^{1/2} g)$$

donc $(-\Delta)^{1/2}$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert de $(L^2(D), (\cdot, \cdot))$ dans $(H(D), (\cdot, \cdot)_\nabla)$ et $H(D)$ s'identifie à $\mathcal{L}_{-1/2}(D)$. De même pour tout $a \in \mathbb{R}$ on peut voir $\mathcal{L}_a(D)$ comme un espace de Hilbert dont le produit $(\cdot, \cdot)_a$ est l'image réciproque de celui de $L^2(D)$ au sens où $(f, g)_a = ((-\Delta)^{-a} f, (-\Delta)^{-a} g)$.

Proposition 3. soit D un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^d . Alors

1.

$$\forall a < b, \mathcal{L}_a(D) \subset \mathcal{L}_b(D)$$

2.

$$\forall a < b - d/4, \|\cdot\|_b$$

3. même lorsque a est négatif on aura toujours la convergence dans l'espace des distributions. Puisque $-\lambda_j$ est polynomial en j la somme est toujours définie sur l'espace des fonctions tests

est une norme mesurable sur $\mathcal{L}_a(D)$ muni de $(\cdot, \cdot)_a$

3.

$$\text{si } g \in \mathcal{L}_{-a}(D), f \rightarrow (f, g)$$

est continue sur $\mathcal{L}_a(D)$

Démonstration. Si $\sum (-\lambda_j)^{-2a} |\beta_j|^2 < \infty$ alors $\sum (-\lambda_j)^{-2b} |\beta_j|^2 < \infty$ ce qui prouve la première assertion. $\|f\|_b = \|T_{b-a} f\|_a$ où $T_c = (-\Delta)^{-c}$. Soit $\{g_j\}$ une base orthonormée de \mathcal{L}_b pour $(\cdot, \cdot)_b$. Comme $a < b - d/4$ on a $2(2a - 2b)/d < -1$ donc $\sum j^{2(2a-2b)/d} < \infty$ et donc $\sum \|T_a g_j\|_b^2 = \sum (-\lambda_j)^{2a-2b} < \infty$. Donc $\|f\|_b$ est une norme mesurable. Enfin $(f, g) = ((-\Delta)^a f, (-\Delta)^a g)_a = (f, (-\Delta)^{2a} g)_a$ et $(-\Delta)^{2a} g \in \mathcal{L}_a$. \square

On peut donc définir le champ libre gaussien comme un élément de $B = \mathcal{L}_b(D)$ avec $b > \frac{d-2}{4}$.

3.2.2 Espaces de Hilbert gaussiens

Considérons à présent l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ où Ω est l'ensemble des suites réelles $\alpha = (\alpha_j)_{j \geq 1}$, \mathcal{F} la plus petite tribu telle que les projections $\alpha \rightarrow \alpha_j$ soient mesurables et μ la mesure de probabilité telle que les α_j sont des gaussiennes standards i.i.d. Pour tout $f = \sum \beta_j f_j \in H(D)$, $(h, f)_\nabla$ est une variable aléatoire qui peut être presque sûrement bien définie comme la limite des sommes partielles des $\alpha_j \beta_j$ ⁴.

Définition 4. On appelle champ libre gaussien dérivé de la base orthonormée f_j la collection $\mathcal{G}(D)$ des variables aléatoires $(h, f)_\nabla$ décrites ci-dessus.

On peut donner une définition plus abstraite qui n'a besoin de spécifier ni l'ordre de sommation ni la base.

Définition 5. Un espace vectoriel gaussien est un espace vectoriel réel de variables aléatoires définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ tel que chaque élément de l'espace est une gaussienne centrée. Un espace de Hilbert gaussien est un espace vectoriel gaussien qui est centré, c'est à dire un sous-espace fermé de $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ fait de variables gaussiennes centrées, avec la restriction du produit canonique de $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) : (X, Y) = \int XY d\mu$. On suppose aussi que \mathcal{F} est la plus petite tribu pour laquelle ces variables aléatoires sont mesurables.

On sait que si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires telles que toute combinaison linéaire des X_j est une gaussienne centrée alors la loi jointe des X_j est entièrement déterminée par les covariances $Cov[X_j, X_k] = \mathbb{E}(X_j X_k)$. On admet que le résultat reste vrai pour un ensemble infini de variables aléatoires.

Définition 6. Un champ libre gaussien est un espace de Hilbert gaussien $\mathcal{G}(D)$ de variables aléatoires notées $(h, f)_\nabla$ ⁵ et qui a hérité du produit de Dirichlet de $H(D)$ à savoir

$$\mathbb{E}[(h, a)_\nabla (h, b)_\nabla] = (a, b)_\nabla$$

De même que pour les espaces de Wiener on a la proposition suivante

4. ici on a fixé à l'avance l'ordre de sommation car les suites $\alpha_j \beta_j$ ne sont pas forcément absolument sommables

5. il y a une variable aléatoire pour chaque $f \in H(D)$

Proposition 4. *Un espace vectoriel réel indexé sur $H(D)$ de variables aléatoires notées $(h, f)_\nabla$ est un champ libre gaussien si et seulement si l'application qui à $f \in H(D)$ associe la variable aléatoire $(h, f)_\nabla$ est linéaire et chaque $(h, f)_\nabla$ est une gaussienne centrée de variance $(h, h)_\nabla$.*

3.3 Propriété de Markov du champ libre gaussien

Dans cette partie nous donnons une première propriété, dite propriété de Markov, du champ libre gaussien. Elle permet de mieux rendre compte des analogies qui peuvent exister entre le champ libre gaussien et le mouvement Brownien.

Soit $D' \subset D$, D' ouvert. On suppose que a défini sur D vérifie $-\Delta a = \rho$ constant sur D' et nul hors de D' . a est donc harmonique hors de D' . On peut alors voir $(h, a)_\nabla = (h, \rho)$ comme la valeur moyenne de h sur D . Cette interprétation sera particulièrement intéressante quand h sera une valeur prise par le champ libre : h varie trop rapidement pour être défini comme une fonction mais sa valeur moyenne sur tout ouvert est quant à elle bien définie. $H(D)$ est un espace de Hilbert, il s'identifie donc à son dual et si ρ est une mesure de probabilité sur D telle que

$$f \rightarrow \rho f := \int f d\rho$$

est une application linéaire continue⁶ alors on peut trouver f telle que $\forall g \in H(D), \rho g = (f, g)_\nabla$. On a ainsi $\rho = -\Delta f$. Supposons à présent que H_1 et H_2 sont deux sous-espaces orthogonaux de $H(D)$ tels que leur somme engendre $H(D)$ tout entier. Alors les restrictions de $(h, \cdot)_\nabla$ à chaque sous-espace sont indépendantes. Nous entendons par là que si l'on note \mathcal{F}_{H_j} la plus petite tribu telle que les $(h, f)_\nabla$ pour $f \in H_j$ soient mesurables alors on a bien que la tribu engendrée par \mathcal{F}_{H_1} et \mathcal{F}_{H_2} est \mathcal{F} toute entière et que ces deux sous-tribus sont indépendantes pour la mesure du champ libre.

Si par exemple U est un ouvert dans D on peut noter $H_U(D)$ l'adhérence de l'ensemble des fonction C^∞ sur D à support dans un compact de U . Si $a \in H_U(D)$ et b est harmonique sur U alors $(a, b)_\nabla = (a, -\Delta b) = 0$ et ainsi $H_U(D)$ est orthogonal à l'espace $H_U^\perp(D)$ des fonctions harmoniques sur U . on a alors le théorème suivant :

Théorème 2. *Les sous-espaces $H_U(D)$ et $H_U^\perp(D)$ engendrent $H(D)$.*

Démonstration. : Montrons que pour tout $f \in H(D)$ on peut écrire $f = a + b$ avec $a \in H_U(D)$ et $b \in H_U^\perp(D)$. Pour tout $\delta > 0$ et pour tout x dans D on pose $b_\delta(x)$ l'espérance de la valeur prise par f au premier point où un mouvement Brownien issu de x sort de l'ensemble U_δ des points situés à une distance plus grande que δ du complémentaire de U . On pose $a_\delta = f - b_\delta$. Puisque f et b_δ sont égales sur $\{x \in D, d(x, U^c) < \delta\}$, a_δ est à support dans un compact de U et est donc dans $H_U(D)$. $H_U(D)$ est l'adhérence de l'union des H_{U_δ} . Les a_δ peuvent s'écrire comme les projections croissantes à mesure que $\delta \rightarrow 0$ sur les espaces $H_{U_\delta}(D)$ d'une certaine fonction $a \in H_U(D)$ vers laquelle elles convergent donc. b_δ converge donc aussi vers une fonction b qui est harmonique

6. on vérifie que c'est vrai si et seulement si $\sum_j [\rho f_j]^2 < \infty$

sur U comme limite de fonctions harmoniques sur U . Ainsi $f = a + b$ avec $a \in H_U(D)$ et $b \in H_u^\perp(D)$. \square

La tribu $\mathcal{F}_{H_u^\perp}$ est telle que les $(h, f)_\nabla = (h, -\Delta f)$ sont mesurables quand Δf s'annule sur U . Elle mesure en quelque sorte les valeurs prises par h hors de U . La tribu \mathcal{F}_{H_U} mesure les valeurs prises par h sur U à une fonction harmonique sur U près. L'indépendance du champ libre sur $\mathcal{F}_{H_u^\perp}$ et \mathcal{F}_{H_U} peut être interprétée comme le fait que sachant les valeurs de h hors de U , la distribution des valeurs du champ libre sur U est une extension harmonique de la valeur au bord de U plus un champ libre gaussien indépendant. On appelle cette propriété la propriété de Markov du champ libre gaussien.

En particulier si $d = 2$ et que U^c est un chemin de D , $\mathcal{F}_{H_u^\perp}$ mesure les valeurs prises par h sur ce chemin (ou en tout cas les valeurs moyennes de h sur tous les sous-chemins).

4 Convergence de la fonction de hauteur

4.1 Matrice de Kasteleyn

Soit G un graphe hexagonal. Les sommets de ce graphe sont partitionnables en deux parties suivant que les arêtes adjacentes à un sommet forment un y (le sommet est alors blanc) ou un y inversé (le sommet est alors noir). La donnée d'un recouvrement parfait du graphe par des dimères correspond donc à la donnée d'un couple (b_i, w_j) tel que chaque sommet blanc b_i appartienne à un unique couple et de même pour les sommets noirs.

Supposons que G soit planaire et contienne n sommets blancs.

Soit K la matrice $n \times 2$ telle que $k(b_i, w_j) = 0$ si b_i et w_j ne sont pas reliés par une arête, et

$$k(b_i, w_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (b_i, w_j) \text{ est une arête de type } \vec{x} \\ j & \text{si } (b_i, w_j) \text{ est une arête de type } \vec{y} \\ j^2 & \text{si } (b_i, w_j) \text{ est une arête de type } \vec{z} \end{cases}$$

où $j = e^{2i\pi/3}$ (le rôle des poids complexe apparaîtra plus tard ; dans cette section des poids valant tous 1 auraient suffi).

Le lien entre K et la fonction de partition Z_G du système est le suivant :

Proposition 5. $|\det(K)| = Z_G$

Développons le déterminant. Cela donne :

$$\det(K) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) K(b_1, w_{\sigma(1)}) \cdots K(b_n, w_{\sigma(n)})$$

Chaque terme est nul à moins que chaque paire corresponde à deux sommets reliés par une arête. Chaque terme non nul de la somme correspond donc à une configuration du recouvrement de dimères. De plus chaque terme, étant produit de complexes de module 1 est également de module 1. Reste à montrer que tous les termes non nuls ont le même argument.

Soient deux recouvrements de G distincts σ et σ' . L'union de ces deux recouvrements consiste en des arêtes recouvertes deux fois et des boucles de longueurs nécessairement $2k$. Ces boucles englobent toutes un nombre pair de sommets du graphe (afin de permettre un recouvrement à l'intérieur d'une boucle). Considérons une de ces boucles. Pour passer d'un recouvrement à l'autre, il faut avancer chaque dimère d'un cran sur la boucle, ce qui revient à opérer un cycle de longueur k à σ .

Lemme 4.1. *Soit un cycle e_1, \dots, e_{2k} de longueur $2k$ entourant un nombre pair de points. Alors on a :*

$$\frac{\prod k(e_{2i+1})}{\prod k(e_{2i})} = (-1)^{k+1}$$

Ce lemme se démontre par récurrence en distinguant les différentes configurations possibles. Ce changement annule le changement de signature dû au cycle de longueur k , ce qui conclut la démonstration.

La matrice de Kasteleyn du système permet également de calculer les probabilités qu'un ensemble d'arêtes soit dans une configuration donnée. Plus précisément on a le résultat suivant :

Proposition 6. *Soit $E = \{(b_{q_1}, w_{p_1}), \dots, (b_{q_k}, w_{p_k})\}$ un ensemble d'arête. Le nombre de configurations recouvrant cet ensemble est :*

$$(-1)^{\sum p_i + q_j} \prod k(b_{q_i}, w_{p_i}) \det(K_E) \times e^{-i \text{Arg}(\det(K))}$$

où $\det(K_E)$ désigne le mineur de K obtenu en enlevant les lignes q_i et les colonnes p_i .

La démonstration de cette proposition s'établit par récurrence. L'ensemble des configurations contenant (b_{q_1}, w_{p_1}) sont celles correspondant aux termes du développement de $\det(K)$ contenant $k(b_{q_1}, w_{p_1})$. La somme de ces termes (tous de même argument et de module 1) vaut justement $k(b_{q_1}, w_{p_1})$ multiplié par le cofacteur $\Delta(b_{q_1}, w_{p_1})$. Et ainsi de suite on développe à nouveau suivant les bonnes colonnes et les bonnes lignes. Il faut enfin multiplier par $e^{-i \text{Arg}(\det(K))}$ pour annuler une éventuelle phase non nulle.

Un résultat algébrique montre que $\det(K_E) = \det(K) \det(K_{E^*}^{-1})$ avec E^* correspondant aux lignes et colonnes n'étant pas présentes dans E . Cela permet d'avoir une expression simple de la probabilité d'avoir l'ensemble E présent dans une configuration :

Corollaire 4.1. *La probabilité que $E = \{(b_{q_1}, w_{p_1}), \dots, (b_{q_k}, w_{p_k})\}$ soit présent dans une configuration est $|\det(K_{E^*}^{-1})| = |\det(k^{-1}(b_{q_i}, w_{p_i}))|$*

Il devient donc intéressant de calculer la matrice K^{-1} (qui sera notée C dans la suite). Sur le tore la situation est plus compliquée du fait que l'union des deux recouvrements peut faire apparaître des boucles non simples (c'est à dire non homotopes à un point), qui ne répondent donc pas aux mêmes règles

lors de l'application d'un cycle.

Dans la suite du problème le tore $H_{m,n}$ définit le quotient du réseau hexagonal sur \mathbb{Z}^2 par $n(\vec{z} - \vec{x})$ et $m(\vec{y} - \vec{x})$. On pose $\vec{Z} = (\vec{y} - \vec{x})$ et $\vec{Y} = (\vec{z} - \vec{x})$ et on choisit une face f_0 comme référence pour le calcul de la fonction de hauteur.

Soit h_0 la fonction de hauteur définie sur le réseau par le flot de base $\omega(x)$ (qui vaut 1 sur les arêtes de type \vec{x} et 0 sur les autres). En particulier h_z représente le nombre de dimères de type \vec{z} rencontrés par un chemin faisant le tour du tore dans la direction \vec{Z} et de même h_y représente le nombre de dimères de type \vec{y} rencontrés par un chemin faisant le tour du tore dans la direction \vec{Y} .

On prend dorénavant $m = n$.

Lemme 4.2. *Soit $N_{\vec{x}}$, $N_{\vec{y}}$ et $N_{\vec{z}}$ le nombre de dimères respectivement de type \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} présent dans le recouvrement. Alors on a l'égalité*

$$h_z = \frac{N_{\vec{z}}}{n} \text{ et } h_y = \frac{N_{\vec{y}}}{n}$$

Le flux le long de tous les chemins faisant le tour du tore dans la direction \vec{Z} est le même, à savoir h_z . Or en prenant tous les translatés d'un tel chemin dans la direction \vec{Y} (il y en a n) on compte ainsi tous les dimères de type \vec{z} présent dans la configuration. D'où $n h_z = N_{\vec{z}}$ et de même pour $N_{\vec{y}}$.

Soit K la matrice de Kasteleyn du tore. Nous prenons dans cette matrice des poids tous égaux à 1 pour plus de simplicité, le cas général est identique.

Développons le déterminant de K comme dans le précédent théorème. Il faut donc regarder le signe d'une configuration. Le signe de la configuration où il n'y a que des dimères \vec{x} est pris comme référence.

Prenons une autre configuration. L'union des deux est un ensemble de dimères \vec{x} doublement recouverts et de boucles. Étudions un peu plus ces boucles. Le fait qu'une configuration ne comporte que des \vec{x} empêche toute boucle d'être simple. On en déduit que toutes les boucles ont la même classe d'homologie (chaque boucle est "enfermée" entre deux autres boucles et doit donc suivre le même chemin) (p, q) .

Soit m le nombre de boucles. Chaque boucle a la même longueur $2(ph_z + qh_y)$ qui est de ce fait égale à $\frac{2n}{m}(h_z + h_y)$. On doit donc avoir $mp = h_y$ et $mq = h_z$ et m divise à la fois h_y et h_z .

D'autre part si p et q sont non nuls, alors ils sont premiers entre eux, et si l'un des deux est supérieur ou égal à deux, l'autre est non nul.

On a alors $m = \text{pgcd}(h_y, h_z)$.

Chaque boucle est de longueur $\frac{2n}{m}(h_z + h_y)$ donc le passage d'une configuration à l'autre se fait par un cycle de longueur $\frac{n}{m}(h_z + h_y)$ qui contribue au changement

de signe par $(-1)^{1 + \frac{n}{m}(h_z + h_y)}$.

Le changement total de signe est donc $(-1)^{m+n(h_z+h_y)}$.

On note que m n'est pair que si h_z et h_y sont pairs. Donc :

- si n est pair, le signe est toujours -1 sauf si $(h_z, h_y) = (0, 0) \text{ mod}(2)$
- si n est impair le signe est $+1$ sauf si $(h_z, h_y) = (1, 1) \text{ mod}(2)$.

Soit C_{h_z, h_y} le nombre de configuration ayant comme changement de hauteur h_z, h_y . Considérons par exemple n pair. Alors, au signe près, on a :

$$\det(K_0) = \sum (-1)^{h_z h_y + h_z + h_y} C_{h_z, h_y}$$

Créons maintenant K_1, K_2, K_3 à partir de K : on multiplie les coefficients des arêtes de type \vec{z} par $e^{i\pi/n}$ pour former K_1 , les arêtes de type \vec{y} par cette même valeur pour former K_2 , et les arêtes de ces deux types par cette valeur pour former K_3 . On aura alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\det(K_1) + \det(K_1) + \det(K_1) - \det(K_0)) \\ &= \frac{1}{2} \sum (-1)^{h_z h_y + h_z + h_y} C_{h_z, h_y} (e^{i\pi/n \times n(h_z)} + e^{i\pi/n \times n(h_y)} + e^{i\pi/n \times n(h_y + h_z)} - 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum C_{h_z, h_y} (-(-1)^{h_z h_y + h_z + h_y} + (-1)^{h_z h_y + h_z + 2h_y} \\ & \quad + (-1)^{h_z h_y + 2h_z + h_y} + (-1)^{h_z h_y + 2h_z + 2h_y}) \end{aligned}$$

Dans tous les cas,

$$-(-1)^{h_z h_y + h_z + h_y} + (-1)^{h_z h_y + h_z + 2h_y} + (-1)^{h_z h_y + 2h_z + h_y} + (-1)^{h_z h_y + 2h_z + 2h_y} = 2$$

donc on a bien :

$$Z = \frac{1}{2}(\det(K_1) + \det(K_2) + \det(K_3) - \det(K_0))$$

De plus un calcul semblable au cas du graphe plan montre que le nombre de recouvrements présentant un ensemble E d'arêtes est :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |(\det(K_1) \det((K_1^{-1})_{E^*}) + \det(K_2) \det((K_2^{-1})_{E^*}) \\ & \quad + \det(K_3) \det((K_3^{-1})_{E^*}) - \det(K_0) \det((K_0^{-1})_{E^*}))| \end{aligned}$$

Fonction de corrélation Dans cette section nous allons démontrer plusieurs résultats sur la fonction de corrélation $C(v_1, v_2)$.

Montrons tout d'abord que la probabilité qu'un ensemble E d'arêtes soit présent dans un recouvrement converge quand n tend vers l'infini (nous supposons que n reste pair et non multiple de 3). Cette démonstration est due à Richard Kenyon.

D'après la section précédente, à n fixé, si on note $\mathbb{P}(E)$ la probabilité qu'un recouvrement présente l'ensemble E d'arêtes, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \frac{1}{2Z} ((\det(K_1) \det((K_1^{-1})_{E^*}) + \det(K_2) \det((K_2^{-1})_{E^*}) + \det(K_3) \det((K_3^{-1})_{E^*}) \\ & \quad - \det(K_0) \det((K_0^{-1})_{E^*})) \end{aligned}$$

C'est une moyenne pondérée des $\det((K_i^{-1})_{E^*})$ avec comme coefficients $\det(K_i)/Z$ si $i \neq 0$ et $-\det(K_0)/Z$ sinon. La somme de ces coefficients vaut 1 et de plus ils

sont tous compris entre -1 et 1 . Cette dernière assertion s'explique par le fait que Z et K_i comptent le même nombre d'objets, sauf que Z les compte tous avec le même signe alors que K_i en compte certains avec un signe opposé, d'où $|Z| \geq K_i$.

Si on montre que chaque $(K_i^{-1})_{E^*}$ tend vers la même limite quand n tend vers l'infini on aura montré la convergence de $\mathbb{P}(E)$. Il faut donc montrer la convergence de $K_i^{-1}(e)$.

Prenons un sommet noir arbitraire et nommons le $(0, 0, 0)$. Les autres sommets noirs sont sur les points $(0, 0, 0) + a\vec{Z} + b\vec{Y}$ (on nommera un tel sommet $(a, b, 0)$). Un sommet blanc est toujours situé à \vec{x} d'un sommet noir $(a, b, 0)$ et prend alors le nom $(a, b, 1)$. Un calcul simple consistant en la diagonalisation de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & {}^t K_i \\ K_i & 0 \end{pmatrix}$, montre que :

$$K_i^{-1}((a, b, 0), (a', b', 0)) = 0$$

et que $K_i^{-1}((a, b, 0), (a', b', 1))$ est une somme de Riemann qui converge vers

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(a'-a)\theta} e^{i(b'-b)\varphi}}{1 + e^{-i\theta} + e^{-i\varphi}} d\theta d\varphi$$

On montre de la même manière que dans la première partie, avec moins de difficultés, que les sommes dans un voisinage des singularités restent petites. Cela clôt la démonstration.

On appelle donc la matrice infinie $C((a, b, t), (a', b', t')) = \lim K_i^{-1}((a, b, t), (a', b', t'))$ la fonction de corrélation du réseau hexagonal infini G_0 . Remarquons par passage à la limite que la somme de la fonction $C((a, b, 1), \bullet)$ autour d'un sommet différent de $(a, b, 1)$ est nulle, et que cette somme vaut 1 autour du sommet $(a, b, 1)$. De plus on peut estimer le comportement asymptotique de $C((0, 0, 1), (a, b, 0))$ quand a et b tendent vers l'infini. Ce calcul est effectué dans [7] :

Proposition 7. $C((0, 0, 1), (a, b, 0)) = \frac{1}{\pi} \frac{\Im(j^a j^{-b})}{(a+b)j+a} + O\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)$

$C((0, 0, 1), (a, b, 0))$ est le coefficient de Fourier (a, b) de la fonction $1/(1+z+w)$ sur le tore. Cette fonction présente deux pôles en $(z_0, w_0) = (j, j^2)$ et en $(z_1, w_1) = (j, j^2)$. Supposons a positif (les symétries de C permettent de conclure). En notant $(z, w) = (e^{i\theta} z_0, e^{i\phi} w_0)$, on a au voisinage de (z_0, w_0) :

$$1 + z + w = i\theta z_0 + i\phi w_0 + o(\theta, \phi)$$

Et de même au voisinage de (z_1, w_1) en notant $(z, w) = (e^{i\tilde{\theta}} z_0, e^{i\tilde{\phi}} w_0)$. On peut donc écrire

$$\frac{1}{1+z+w} = \frac{1}{i\theta z_0 + i\phi w_0} + \frac{1}{i\tilde{\theta} z_1 + i\tilde{\phi} w_1} + f$$

avec f fonction lisse dont les coefficients de Fourier tendent donc exponentiellement vers 0. Calculons les coefficients de Fourier de la première fraction :

$$\frac{z_0^{-a} w_0^{-b}}{4i\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ia\theta} e^{-ib\phi}}{i\theta z_0 + i\phi w_0} d\theta d\phi$$

Nous allons recommencer la même méthode en écrivant sur \mathbb{R}^2 :

$$\frac{e^{-ia\theta}e^{-ib\phi}}{i\theta z_0 + i\phi w_0} = \chi_{(0,2\pi)^2} \frac{e^{-ia\theta}e^{-ib\phi}}{i\theta z_0 + i\phi w_0} + g$$

Avec g lisse et valant $(e^{-ia\theta}e^{-ib\phi})/i\theta z_0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \chi_{(0,2\pi)^2}$. La transformation de Fourier de g décroît donc en $O(1/(x^2 + y^2))$. Il suffit donc de calculer la transformée de Fourier

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ia\theta}e^{-ib\phi}}{i\theta z_0 + i\phi w_0} d\theta d\phi$$

Commençons par intégrer la fonction suivant θ . $-\phi w_0/z_0$ a une partie imaginaire pure négative donc la fonction possède son pôle dans le demi-plan négatif. Comme la fonction est en $O(e^{Im(z)})$ dans le demi plan négatif on peut utiliser le théorème des résidus suivant des contours appropriés (entourant le pôle et tendant vers l'infini suivant un demi-arc de cercle par exemple) pour obtenir le résultat :

$$\frac{z_0^{-a}w_0^{-b}}{2\pi z_0} \int_0^{+\infty} e^{-i(-a\frac{\phi w_0}{z_0} + b\phi)} d\phi = -\frac{z_0^{-a}w_0^{-b}}{2\pi i(a z_0 - b w_0)}$$

($-\frac{\phi w_0}{z_0}$ a une partie imaginaire négative ce qui permet l'intégrabilité).
D'autre part comme

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ia\tilde{\theta}}e^{-ib\tilde{\phi}}}{i\tilde{\theta}z_1 + i\tilde{\phi}w_1} d\tilde{\theta}d\tilde{\phi} = -\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ia\tilde{\theta}}e^{-ib\tilde{\phi}}}{i\tilde{\theta}z_0 + i\tilde{\phi}w_0} d\tilde{\theta}d\tilde{\phi}$$

(noter que $(z_1, w_1) = (w_0, z_0)$), on obtient également la valeur du coefficient pour le deuxième pôle. Finalement on a :

$$\begin{aligned} C((0, 0, 1), (a, b, 0)) &= -\frac{1}{2i\pi} \left(\frac{z_0^{-a}w_0^{-b}}{2\pi i(a z_0 - b w_0)} + \frac{z_0^{-a}w_0^{-b}}{2\pi i(a z_0 - b w_0)} \right) + O\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \Im\left(\frac{z_0^{-a}w_0^{-b}}{2\pi i(a z_0 - b w_0)}\right) + O\left(\frac{1}{a^2 + b^2}\right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \Im\left(\frac{(j^2)^{-a}j^{-b}}{(a+b)j+b}\right) + O\left(\frac{1}{a^2 + b^2}\right) \end{aligned}$$

Ce qui clôt la démonstration.

4.2 Asymptote de la fonction de corrélation dans le cas borné

La situation est un peu plus difficile dans le cas où U est borné (et également plus difficile que dans le cas où le réseau est carré). Ce résultat est tiré de [6]. Cet article traite le cas général, mais nous nous restreindrons ici au cas où chaque arête a pour poids 1, ce qui a pour mérite de simplifier les calculs et de rendre la démonstration plus concrète. Fixons les notations pour plus de clarté. G_0 désigne le réseau hexagonal défini sur le plan ; les sommets de G_0 sont séparables en deux catégories. Un sommet est dit blanc et de coordonnées

(m, n) (noté $w(m, n)$) si ses coordonnées dans le plan sont $(0, 0) + m\vec{x} + n\vec{y}$ avec $\vec{x} = (\sqrt{3}, 1)$ et $\vec{y} = (0, 2\sqrt{3})$. Un sommet est dit noir de coordonnées (m, n) (noté $b(m, n)$) si ses coordonnées sont $w(m, n) + (0, 1)$. On note ϵG_0 le graphe hexagonal dont les coordonnées des sommets sont ϵ fois les coordonnées des sommets de G_0 . Nous avons déjà calculé la valeur asymptotique de la fonction de corrélation sur G_0 , et on a

$$C(w(m, n), b(m', n')) = \frac{1}{\pi} \Im \left(\frac{(j)^{-m+n} (j^2)^{-n}}{(mj^2 + n)} \right) + O\left(\frac{1}{m^2 + n^2}\right)$$

(notons qu'avec nos nouvelles coordonnées, nous avons du poser $m = a - b$ et $n = y$ dans l'expression de C de la précédente section). On notera $\phi(m, n) = mj^2 + n$. A partir de G_0 on définit le graphe dual de G_0 , noté G_0^* comme le réseau triangulaire dont les arêtes sont perpendiculaires aux arêtes de G_0 et dont les sommets sont les centres des hexagones. Enfin dans toute la suite de cette section U désigne un ouvert borné au bord lisse. Soit P_ϵ un chemin polygonal sur ϵG_0 approximant le bord de U (dans le sens où la distance de Hausdorff P_ϵ à ∂U est inférieure à ϵ et où la courbe P_ϵ est localement dans la même direction que la tangente à ∂U). On approxime U par un graphe G_ϵ défini comme le graphe délimité par P_ϵ dans ϵG_0 . Le graphe dual de G_ϵ est défini comme l'union des arêtes de G_0^* entourant les sommets blancs de ϵG_0 et des sommets correspondant.

Transformation des graphes G_0 et G_ϵ On définit sur G_0 la fonction F par : $F(w) = j^{m+n}$ et $F(b) = j^{-m-n}$. Si K_{G_0} est la matrice de Kasteleyn avec poids 1 de G_0 , on a alors :

$$\sum_b K_{G_0}(w, b) f(b) = \sum_w K_{G_0}(b, w) f(w) = 0$$

On définit alors sur G_0 la 1-forme différentielle :

$$\Omega((wb)) = 2\Re(F(w))F(b)$$

On note $(wb)^*$ l'arête du graphe dual de G_0 faisant un angle de $\pi/2$ avec (wb) . On peut donc définir à partir de Ω une 1-forme différentielle Ω^* sur G_0^* par $\Omega^*((wb)^*) = \Omega((wb))$. Ω^* est fermée. En effet la somme de Ω^* autour d'un sommet blanc est égale à $\Re(F(w)) \times \sum_b K_{G_0}(w, b) f(b) = 0$ et de même autour des sommets noirs. Comme sur G_0^* toute 1-forme fermée est exacte, il existe une fonction 0-forme complexe Ψ telle que $d\Psi = \Omega^*$. Etendons Ψ linéairement sur les arêtes de G_0^* . Alors un calcul simple montre que l'image des arêtes entourant un sommet blanc par Ψ forme un triangle équilatéral du plan complexe et l'image des arêtes entourant un sommet noir est un segment formant un des côtés pour les 3 triangles correspondant à l'image des arêtes entourant les 3 sommets blancs adjacents. On note \mathcal{G} , le graphe ainsi créé. Cette transformation préserve globalement les dimensions du graphe. Plus précisément nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit f et g deux sommets du graphe dual, on a alors :*

$$\Psi(g) - \Psi(f) = \phi(m, n) + \varepsilon$$

où $g - f = (m, n)$ et ε est borné.

On rappelle que $\phi(m, n) = mj^2 + n$. Démontrons le pour $m = 0$. Par additivité et symétrie le cas général en découlera. Soient f et g deux sommets du graphe dual séparés par n arêtes horizontales (w_k, b_k) . Quitte à permuter f et g on peut considérer $f - g = (0, n)$. On aura alors

$$\begin{aligned} \Psi(g) - \Psi(f) &= \sum_i \Omega * ((w_i b_i) *) \\ &= \sum_i 2\Re(F(w_i)F(b_i)) \\ &= \sum_i F(\bar{w}_i)F(b_i) + F(w_i)F(b_i) \end{aligned}$$

Or $F(w_i)F(b_i) = 1$ et $F(\bar{w}_i)F(b_i) = j^i \times r$ avec $r \in \{1, j, j^2\}$. On a donc

$$\Psi(g) - \Psi(f) = n + r \sum_i j^i$$

Et j étant de module 1, $\sum_i j^i$ est borné. Sur G_ϵ on peut définir la même transformation en prenant l'image de $\epsilon\Psi$ restreinte à $G_\epsilon/\epsilon \subset G_0$. Ce nouveau graphe est alors noté \mathcal{G}_ϵ . Nous allons maintenant établir quelques résultats sur \mathcal{G}_l et \mathcal{G}_ϵ .

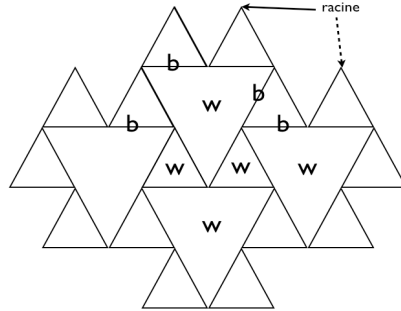


FIGURE 5 – exemple de T-graphe

T-graphe Un T-graphe sur \mathbb{R}^2 est une union $\bigcup_i L_i$ de segments ouverts finis L_i telle que $\bigcup_i L_i$ est connexe et contient tous les points extrémaux des L_i excepté un nombre fini $R = r_1, \dots, r_n$ de points appelés racines du T-graphe. Nous imposons de plus que la fermeture de la frontière de T soit un polygone, et que les r_i soient les sommets convexes de ce polygone. A chaque T graphe on associe

une chaîne de Markov \mathcal{G}_T dont les sommets sont les points extrémaux des L_i qui ne sont pas racines (voir figure 6). Chacun de ces points appartient à un unique

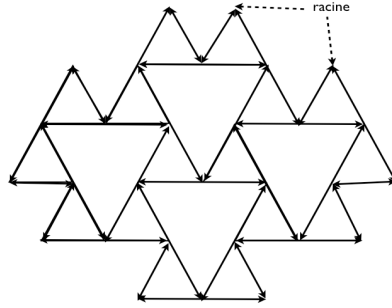


FIGURE 6 – un exemple de chaîne de Markov

L_j (du fait que les L_i soient distincts). On définit une probabilité de transition de chaque point vers les extrémités du segment le contenant proportionnelle à l'inverse de la distance euclidienne à ces extrémités. Pour les sommets racines la chaîne de Markov reste avec une probabilité 1 en ces points. Avec ces définitions une fonction f est harmonique respectivement à \mathcal{G}_T sur $\mathcal{G}_T \setminus R$ si elle est linéaire sur chaque L_i , c'est à dire si v_1, v_2, v_3 étant dans L_i , on a :

$$\frac{f(v_3) - f(v_2)}{v_3 - v_2} = \frac{f(v_2) - f(v_1)}{v_2 - v_1}$$

Nous allons maintenant construire un modèle de dimère sur le T-graphe : les L_i sont les sommets noirs et les régions complémentaires au graphe bornées sont les sommet blancs. On rajoute de plus un sommet blanc (appelé sommet extérieur) pour chaque chemin au bord du graphe reliant deux racines consécutives (excepté pour le chemin reliant r_n à r_1). Il existe une arête entre une région bornée et tous les L_i la délimitant. Le poids d'une telle arête est la longueur de la portion de L_i délimitant la région. De même pour les sommets extérieurs avec le chemin reliant les deux racines correspondantes. Ce modèle de dimères est noté \mathcal{G}_D par la suite. On peut associer à \mathcal{G}_D une matrice de Kasteleyn \mathcal{K}_D . La valeur de $\mathcal{K}_D(b, w)$ est nulle si les sommets de sont pas adjacents et égale au nombre complexe représentant le segment commun à b et à la région w , en orientant ce segment de manière à ce qu'il tourne dans le sens trigonométrique autour de w . On peut vérifier que cette matrice est bien une matrice de Kasteleyn. Notons la propriété suivante qui sera utile par la suite :

Lemme 4.4. *Associons à chaque f harmonique sur $\mathcal{G}_T \setminus R$ la fonction sur b qui*

vérifie

$$df(b) = \frac{f(v_2) - f(v_1)}{v_2 - v_1}$$

Avec v_1 et v_2 nombres complexes associés à des sommets distincts pris arbitrairement sur b (puisque f est harmonique). On a alors $\sum_b \mathcal{K}_D(w, b)df(b) = 0$ pour w intérieur au graphe.

Le calcul est direct sur les segments entourant la région w . Une fonction à valeur sur les sommets noirs et vérifiant l'égalité $\sum_b \mathcal{K}_D(w, b)df(b) = 0$ pour w intérieur au graphe est appelée fonction analytique discrète. Pour finir nous allons relier le conjugué de la fonction de Green discrète sur \mathcal{G}_T à l'inverse de \mathcal{K}_D . On définit le conjugué de la fonction de Green discrète $G^*(w, \bullet)$, fonction sur \mathcal{G}_T comme suit. Soit l un segment allant de w à l'extérieur du graphe en évitant tous les sommets de \mathcal{G}_T . On définit alors $G^*(w, v)$ comme l'espérance du nombre de croisements (comptés positivement dans le sens trigonométrique, négativement sinon) de l par une marche aléatoire commençant en v et se terminant à une racine. $G^*(w, \bullet)$ est harmonique sauf en les points voisins de l , où le laplacien vaut plus ou moins (suivant le côté de l où l'on se trouve) la probabilité de transition d'un côté à l'autre de l . Cette fonction est l'unique fonction vérifiant cette propriété et valant 0 sur les racines (puisque la différence de deux telles fonctions est harmonique et nulle sur le bord, donc nulle). Définissons donc la fonction $dG^*(w, \bullet)$ comme dans le lemme précédent. Il faut prendre soin dans le cas où b traverse l à définir $dG^*(w, \bullet)$ à partir de deux points du même côté de l . On aura alors :

- si $w = w'$, $\sum_b \mathcal{K}_D(w', b)dG^*(w, \bullet)(b) = 1$ car il n'y a qu'un unique segment b traversé par l
- si $w \neq w'$, $\sum_b \mathcal{K}_D(w', b)dG^*(w, \bullet)(b) = 0$ car il y a soit aucun segment, soit deux segments croisant l (un dans le sens trigonométrique et un dans le sens inverse) .

Autrement dit $dC = \mathcal{K}_D^{-1}$.

Calcul de l'asymptote de la fonction de corrélation Les graphes \mathcal{G}_r et \mathcal{G}_ϵ sont justement des T-graphes. Les L_j de ces T-graphes sont respectivement l'intérieur des images par Ψ et $\epsilon\Psi \circ (1/\epsilon)$ des arêtes entourant respectivement les sommets noirs dans G_0^* et G_ϵ^* . On peut donc appliquer les résultats du précédent paragraphe à ces T-graphes. Un examen de la construction de ces graphes montre que pour w quelconque pour $(\mathcal{G}_r)_D$ et w intérieur pour $(\mathcal{G}_\epsilon)_D$ on a :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{\mathcal{G}_r}(w, b) = \Omega * ((wb)^*) = 2\Re(F(w))F(b) \\ \mathcal{K}_{\mathcal{G}_\epsilon}(w, b) = \epsilon\Omega * ((wb)^*) = 2\epsilon\Re(F(w))F(b) \end{cases}$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathcal{G}_r}\left(\frac{1}{2\pi\Re(F(w))F(b)}C(w, b)_{w, b}(w_0, w'_0)\right) &= \frac{\Re(w_0)}{\Re(w'_0)} \sum_{b \sim w} C(w', b) \\ &= \delta_{w, w'} \end{aligned}$$

Et donc d'après le calcul de la forme asymptotique de la fonction de corrélation pour G_0 et le lemme 3.3 on a :

$$\mathcal{K}_{\mathcal{G},-1}(w,b) = \frac{1}{2\pi\Re(F(w))F(b)} \Im\left(\frac{F(b)F(w)}{\phi(b) - \phi(w)}\right) + O\left(\frac{1}{|\phi(b) - \phi(w)|}\right)$$

Nous allons maintenant étudier le conjugué de la fonction de Green discrète sur $\epsilon\mathcal{G}_r$.

Lemme 4.5. *Il existe $s(w, \bullet)$ lisse telle que sur $\epsilon\mathcal{G}_r$, le conjugué de la fonction de Green discrète est :*

$$\begin{aligned} G^*(w,v) &= \frac{1}{2\pi} (\Im(\log(v - \phi(w))) + \frac{\Im(F(w))}{\Re(F(w))} \Re(\log(v - \phi(w))) \\ &\quad + \epsilon s(w,v) + O(\epsilon^2) + O\left(\frac{1}{v - \phi(w)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\Re(F(w))} \Im(F(w) \log(v - \phi(w))) + \epsilon s(w,v) \\ &\quad + O(\epsilon^2) + O\left(\frac{1}{v - \phi(w)}\right) \end{aligned}$$

Le lemme se démontre en différentiant la formule au-dessus et en montrant que pour b loin de w , la différentielle appliquée en b est proche en $O(\epsilon)$ de $\mathcal{K}_{\mathcal{G},-1}$. Nous pouvons donc calculer la forme asymptotique de la fonction de corrélation :

Théorème 4.1. *Soit ξ un difféomorphisme conforme de $\phi(U)$ dans \mathbb{H} . Si w et b convergent vers deux points différents quand $\epsilon \rightarrow 0$, on a :*

$$C_{\mathcal{G}_\epsilon} = \frac{1}{2\pi\Re(F(w))F(b)} \Im\left(\frac{\xi'(\phi(b))F(w)F(b)}{\xi(\phi(b)) - \xi(\phi(w))} + \frac{\xi'(\phi(b))F(\bar{w})F(b)}{\xi(\phi(b)) - \xi(\phi(\bar{w}))}\right) + O(\epsilon)$$

où le $O(\epsilon)$ est uniforme sur tous les w, b .

Pour démontrer ceci, nous allons d'abord construire la fonction de Green sur \mathcal{G}_ϵ . Elle est égale à la fonction de Green sur le plan plus une fonction harmonique dont la valeur sur le bord du domaine est égale à moins la valeur de la fonction de Green sur le plan. Or on a en notant z un point sur la face w :

$$G^*(w,v) = \frac{1}{2\pi\Re(F(w))} \Im(F(w) \log(v - z)) + \epsilon s(z,v) + O(\epsilon^2) \quad (5)$$

Et la fonction harmonique dont les valeurs sur le bord sont égales à moins celle de G^* est pour une certaine fonction lisse s_2 :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi\Re(F(w))} \Im(F(w) \log(v - z)) + \frac{1}{2\pi\Re(F(w))} \Im((F(w) \log(\xi(v) - \xi(z)) \\ + (F(\bar{w}) \log(\xi(v) - \xi(\bar{z})))) + \epsilon s_2(z,v) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

En sommant les deux on trouve que la fonction de Green sur \mathcal{G}_ϵ est

$$\frac{1}{2\pi\Re(F(w))} \Im((F(w) \log(\xi(v) - \xi(z)) + (F(\bar{w}) \log(\xi(v) - \xi(\bar{z})))) + \epsilon s_3(z,v) + O(\epsilon^2)$$

avec s_3 lisse. En différentiant cette expression on obtient la fonction de corrélation.

Remarque Quelques précisions doivent être faites sur la convergence. Tout d'abord la borne en $O(\epsilon)$ dans (6) est uniforme sur tous les w (car on est sur le plan) assez loin de v . Comme dans la suite on rajoute une fonction indépendante de ϵ , on en déduit que le $O(\epsilon)$ dans la convergence de la fonction de Green sur le domaine borné est uniforme en les w assez loin de v . On peut même améliorer la convergence en remarquant que si on prend un ensemble de v et de w éloignés les un des autres (par exemple contenus dans deux ouverts distincts) la convergence est uniforme en les v et les w .

4.3 Convergence des moments et théorème de Prokhorov

A l'aide de ces estimations il est désormais possible de démontrer le résultat suivant sur la fonction de hauteur :

Théorème 3. *Soit U ouvert borné à bord lisse. Soit P_ϵ un réseau d'intervalle ϵ approximant U comme il a été mentionné précédemment. Soit $p_1, p_2, \dots, p_{2n} \in \text{Int}(U)$ distincts. Alors quand $\epsilon \rightarrow 0$, $\mathbb{E}((h(p_1) - h_0(p_1)), \dots, (h(p_n) - h_0(p_n))) \rightarrow \sum_{\text{paires } \sigma} g_U(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}), \dots, g_U(p_{\sigma(2n-1)}, p_{\sigma(2n)})$ où $g_U = G \circ \phi$. G est la fonction de Green sur \mathbb{H} et ϕ est un difféomorphisme de U sur \mathbb{H} vérifiant $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -j \frac{\partial \phi}{\partial y}$*

Nous ne donnerons pas ici de preuve précise (celle-ci s'appuie essentiellement sur le théorème de Prokhorov)

Références

- [1] Henry Cohn, Richard Kenyon, James Propp, Dedicated Pieter, and Willem Kasteleyn. A variational principle for domino tilings. *J. Amer. Math. Soc.*, 14 :297–346, 1997.
- [2] Jesper Lykke Jacobsen and Fabien Alet. Semiflexible fully packed loop model and interacting rhombus tilings. *Physical review letter*, 102, April 2009.
- [3] Richard Kenyon. Local statistics of lattice dimers. *Annales de l'institut Henri Poincaré[U+FFFD] Probability and statistics*, 33 :591–628, 1997.
- [4] Richard Kenyon. Conformal invariance of domino tilings. *The Annals of probability 2000*, 28 :759–795, October 1999.
- [5] Richard Kenyon. Dominos and the gaussian free field. *The Annals of probability 2006*, 29 :1128–1137, 2006.
- [6] Richard Kenyon. Height fluctuations in the honeycomb dimer model. May 2007.
- [7] Richard Kenyon, Andrei Okounkov, and Scott Sheffield. Dimers and amoebae. *Annals of mathematics 2006*, 163 :1019–1056, November 2003.
- [8] Scott Sheffield. Gaussian free fields for mathematicians. November 2006.