Corrigé – TD 1

Dénombrabilité, limites supérieure et inférieure

Exercice 1. Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une injection $i\colon E \longrightarrow \mathbb{N}$. Vérifier les points suivants :

1. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est infini non dénombrable.
4. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est infini non dénombrable (deuxième démonstration).
5. (Théorème de Cantor) Soit E un ensemble. Il n'existe pas de surjection $s\colon E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ (Penser au paradoxe du menteur).

Corrigé :

1. & 2. voir

    `http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_dénombrable`

3. voir

    `http://fr.wikipedia.org/wiki/Argument_de_la_diagonale_de_Cantor`

4. On présente ici la toute première preuve (Cantor 1874). On raisonne par l'absurde (comme dans la preuve par argument diagonal) : supposons que l'intervalle $[0,1]$ s'écrive $[0,1] = (x_i)_{i\geq 1}$. On construit une suite de segments emboîtés de $[0,1]$par récurrence

    - $I_0 = [0,1]$
    - Soit $I_n = [a_n, b_n]$ alors

    $$\begin{cases} \text{si } x_n \notin I_n \text{ alors } I_{n+1} = I_n, \\ \text{sinon } I_{n+1} = \text{ un segment d'intérieur non vide } \subset I_n \text{ et ne contenant pas } x_n. \end{cases}$$

    D'après le théorème des segments emboîtés, $I_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ est non vide. Soit $x \in I_\infty$, on vérifie par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $x \neq x_n$. Ce qui est une absurdité.

5. `http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Cantor`

    Voici la démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $s\colon E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une surjection. Considérons

    $$A := \{x \in E \colon x \notin s(x)\}.$$

    Par définition, A est une partie de E donc par sujectivité de s il existe z tel que $s(z) = A$. Maintenant de deux choses l'une

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

- Soit $z \in A = s(Z)$ et dans ce cas par définition de A, $z \notin A$,
- Soit $z \notin A = s(Z)$ et dans ce cas par définition de A, $z \in A$.

C'est une absurdité.

Exercice 2 (Limites supérieure et inférieure d'une suite)**.** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On définit les deux nombres suivants dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

1. Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens.

2. Vérifier les assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha \\
\exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \alpha \\
\limsup_{n\to\infty} a_n > \alpha \quad &\Rightarrow \quad \forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha \\
\forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha \quad &\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \geq \alpha.
\end{aligned}$$

   Écrire des assertions similaires faisant intervenir $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels.

   (a) Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

   (b) Vérifier que a_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Corrigé :

1. La suite de terme général $\sup_{k\geq n} a_k$ est décroissante, donc elle a bien une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. De même pour la $\liminf$ et la limite croissante.

2. Vérifions la première assertion :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \exists n \geq 0, \sup_{k\geq n} a_k < \alpha \\
&\Rightarrow \quad \exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha.
\end{aligned}$$

   Le reste des assertions se démontre de la même façon.

3. (a) Soit L la plus grande valeur d'adhérence de la suite (a_n). Supposons que $L \neq \infty$ (le cas $L = \infty$ se traite similairement). Il existe alors une extraction ϕ (c'est-à-dire une fonction injective croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) telle que $a_{\phi(n)} \to L$. Comme $a_{\phi(n)} \leq \sup_{k\geq\phi(n)} a_k$, en passant à la limite lorsque $n \to \infty$ on en déduit que $L \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Notons $L' = \limsup_{n\to\infty} a_n$ et montrons maintenant l'autre inégalité en prouvant que L' est une valeur d'adhérence de la suite (a_n). Soit $n \geq 1$ un entier. Comme $L' > L' - 1/n$, il existe un entier N tel que $L' + 1/n > \sup_{k\geq N} a_k > L' - 1/n$. Il existe donc un entier entier noté $\phi(n)$ tel que $L' + 1/n > a_{\phi(n)} > L' - 1/n$. Ainsi $a_{\phi(n)} \to L'$, qui est bien valeur d'adhérence.

On raisonne similairement pour la $\liminf$ (ou bien on remarque qu'on a l'égalité $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$)).

(b) C'est une conséquence quasi-immédiate de (a).

Exercice 3 (Fonctions indicatrices)**.** Soit E un ensemble. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbf{1}_A$ l'application $E \to \{0,1\}$ définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon. La fonction $\mathbf{1}_A$ est appelée la fonction indicatrice de A (ou encore fonction caractéristique de A).

1. Si $A, B \subset E$, écrire $\mathbf{1}_{A\cap B}$ et $\mathbf{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Relier les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{\cap_{n\geq 1} A_n}$ et $\mathbf{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n}$ aux fonctions $\mathbf{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.
3. Représenter graphiquement les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :

$$\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{[n,\infty[}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{[0,n]}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{[n,n+1[}.$$

Corrigé :

1. On voit que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$.
2. On a $\mathbf{1}_{\cap_{n\geq 0} A_n} = \prod_{n\geq 1} \mathbf{1}_{A_n}$ et $\mathbf{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n} = 1 - \prod_{n\geq 0}(1 - \mathbf{1}_{A_n})$.
3. Pas de difficulité.

Exercice 4 (Limites supérieure et inférieure d'ensembles)**.**

1. Que représentent les ensembles suivants,

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k\ , \quad \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k\ ?$$

   Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions indicatrices

$$\mathbf{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}, \quad \mathbf{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$$

   aux fonctions $\mathbf{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.

   (a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty}(A_n)^c$, et $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

   (b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cup \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$,
   $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cap \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$.

3. Calculer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ dans les cas suivants
   (a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés,
   (b) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2n} = 1 + 1/(2n)$ et $a_{2n+1} = -1 - 1/(2n+1)$,
   (c) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2n)[$ et $A_{2n+1} =]-1 - 1/(3n), 2]$,
   (d) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n,
   (e) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

Corrigé :

1. L'ensemble $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang, ou, en d'autres mots, l'ensemble $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

   L'ensemble $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une infinité de A_n.

   On a l'égalité
$$\mathbf{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}. \tag{1}$$
   En effet,
$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to\infty} A_n \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0, \quad x \in A_n, \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \inf_{n\geq n_0} \mathbf{1}_{A_n}(x) = 1, \\ &\Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = 1. \end{aligned}$$
   L'égalité
$$\mathbf{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbf{1}_{A_n}$$
   se démontre de façon similaire à (1) ou en passant au complémentaire dans (1) en utilisant la question 2(a).

2. (a) Pour la première égalité, il suffit d'écrire
$$\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}(A_k)^c.$$
   Pour la deuxième, on peut dire que si un élément appartient à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux, alors il appartient à une infinité de A_n.

   (b) La première égalité provient du fait qu'un élément appartienent à une infinité de $A_n \cup B_n$ si et seulement si il appartienent à une infinité de A_n ou bien à une infinité de B_n, et la seconde du fait que si on appartient à une infinité de $A_n \cap B_n$ alors on appartient à une infinité de A_n et une infinité de B_n.

3. (a) On a $\limsup A_n = F \cup G$ et $\liminf A_n = F \cap G$.

(b) On a $\limsup A_n =]-\infty, 1]$ et $\liminf A_n =]-\infty, 1[$.

(c) On a $\limsup A_n = [-1, 3]$ et $\liminf A_n =]0, 2]$.

(d) On a $\liminf A_n = \limsup A_n = \{0\}$.

(e) On a $\limsup A_n =]-2, 2[$ et $\liminf A_n = \{0\}$. En effet, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $]-1, 1[$ (pour le voir, utiliser par exemple le fait que le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas monogène car π est irrationel, donc dense dans $\mathbb{R}$), donc pour tout $0 < x < 2$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\sin(n) > x - 1$ et aussi une infinité de n tels que $\sin(n) < x - 1$. La première famille montre que $x \in \limsup A_n$ et la deuxième famille que $x \notin \liminf A_n$. Il est ensuite facile de vérifier que $\pm 2 \notin \limsup A_n$ (car π est irrationnel) et $0 \in \liminf A_n$.

Exercice 5. Soient X un ensemble non vide et une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ bornées, qui converge simplement vers $f : X \to \mathbb{R}$ bornée.

1. Montrer que
$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \liminf_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} f_n(x)).$$
Établir une inégalité analogue pour l'inf.

2. Donner un exemple où l'inégalité est stricte. Montrer qu'il y a égalité si la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniforme.

Corrigé :

1. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Soit $x_0 \in X$ tel que $\sup_{x\in X} f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$. Soit N un entier tel que $f(x_0) \leq f_n(x_0) + \epsilon$ pour tout entier $n \geq N$. Ainsi, pour $n \geq N$, $\sup_{x\in X} f(x) \leq f_n(x_0) + 2\epsilon$. On en déduit que $\sup_{x\in X} f(x) \leq \sup_{x\in X} f_n(x) + 2\epsilon$. D'où
$$\sup_{x\in X} f(x) \leq \liminf_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} f_n(x)) + 2\epsilon.$$
Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, le résultat désiré en découle.

   En remplaçant f par $-f$, on obtient immédiatement que
$$\inf_{x\in X} f(x) \geq \limsup_{n\to\infty}(\inf_{x\in X} f_n(x)).$$

2. Il suffit de prendre $X = [0, 1]$ et f_n la fonction telle que $f(0) = 0$, $f(1/2n) = 1$, $f(x) = 0$ pour $x \in [1/n, 1]$ et f affine sur $[0, 1/2n]$ et $[1/2n, 1/n]$. On a alors $f = 0$ et
$$\sup_{x\in X} f(x) = 0 \neq 1 = \liminf_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} f_n(x)).$$
Si la convergence est uniforme, on voit aisément que $\sup_{x\in X} f_n(x) \to \sup_{x\in X} f(x)$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 6.

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels vérifiant $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pour tous entiers $m, n \geq 0$. Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$.

2. ($\star$) Un chemin auto-évitant de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite de points distincts $A_0, A_1, \ldots,$ A_n à coordonnées entières où A_0 est l'origine et tels que la distance entre A_i et A_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Soit a_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $a_n^{1/n}$ converge lorsque $n \to \infty$ vers un réel positif noté c et que $2 < c < 3$.

Remarque. Le réel c est appelé *constante de connectivité du réseau* $\mathbb{Z}^2$. On ne connaît pas sa valeur exacte. La constante de connectivité du réseau hexagonal a été calculée par Hugo Duminil-Copin et Stanislav Smirnov en 2012 [1], résolvant ainsi une conjecture formulée en physique théorique il y a 30 ans par Nienhuis.

Corrigé :

1. Soit $q > 0$ fixé et n un entier vérifiant $n \geq q$. Soit $n = k_n q + r_n$ ($k_n \geq 1$ et $0 \leq r_n \leq q-1$) la division euclidienne de n par q. En écrivant $a_n = a_{(k_n-1)q+q+r_n} \leq (k_n-1)a_q + a_{q+r_n}$, il vient

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{k_n-1}{n} a_q + \frac{a_{q+r_n}}{n} = \frac{q(k_n-1)}{n} \cdot \frac{a_q}{q} + \frac{a_{q+r_n}}{n} \leq \frac{n-r_n-q}{n} \cdot \frac{a_q}{q} + \max_{0 \leq i \leq q-1} \frac{a_{q+i}}{n}.$$

   Comme $0 \leq r_n \leq q-1$, $(n-r_n-q)/n \to 1$, et donc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_q}{q}.$$

   Ceci étant vrai pour tout entier $q \geq 1$, on en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}.$$

   Comme on a clairement $\inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$, on a bien égalité.

2. Un chemin auto-évitant de longueur $m+n$ est la concaténation de deux chemins auto-évitants de longueurs respectives m et n. Donc $a_{m+n} \leq a_m a_n$. On peut donc appliquer la première question à la suite $\ln(a_n)$, ce qui implique que $a_n^{1/n}$ converge vers un réel positif c.

   En faisant des pas vers le haut ou la droite uniquement on voit que $2^n \leq a_n$, et comme on ne peut pas revenir en arrière on a $a_n \leq 4 \cdot 3^{n-1}$, ce qui prouve que $2 \leq c \leq 3$. Pour obtenir les inégalités strictes, trouvez deux encadrements meilleurs !

References

[1] H. Duminil-Copin et S. Smirnov, The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, *Annals of Mathematics*, **175(3)**, 1653–1665 (2012).