# TD 1 – Espaces mesurés

## 1 – Petites questions

1. Est-ce que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une tribu ?
2. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus, est-ce que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est toujours une tribu ?
3. Soit $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Est-ce que la fonction dérivée $f'$ est mesurable ?

## 2 – Limites supérieure et inférieure d'une suite de réels

*Exercice 1.* Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On définit les deux nombres suivants dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ :

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

1. Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens.
2. Montrer les assertions suivantes et écrire leurs analogues faisant intervenir $\liminf_{n\to\infty} a_n$ :
   (a) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n < \alpha \Rightarrow \exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha$.
   (b) $\exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq \alpha$.
   (c) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n > \alpha \Rightarrow \forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha$.
   (d) $\forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq \alpha$.
3. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.
4. Vérifier que $a_n$ converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$.

## 3 – Tribus

*Exercice 2.* (*Opérations sur les tribus*)

1. (*Tribu induite*) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur $\Omega$ et $B \in \mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur $B$.
2. (*Tribu réciproque*) Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{G}$ une tribu sur $Y$. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\}$ est la plus petite tribu sur $X$ rendant $f$ mesurable.
3. (*Tribu image*) Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ une tribu sur $X$. Montrer que $f(\mathcal{F}) := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ est la plus grande tribu sur $Y$ rendant $f$ mesurable.
4. (*Union croissante de tribus*) On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.
   *Indication.* On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

# 4 – Limites supérieure et inférieure d'ensembles

*Exercice 3.* On considère un ensemble $E$ et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de $E$. Si $A \subset E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

1. Décrire avec des mots les ensembles suivants

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k.$$

Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.
   (a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} (A_n)^c$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.
   (b) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty \right\}$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{ \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty \right\}$.
   (c) $\limsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$ et $\limsup_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n$.
3. Calculer $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les cas suivants.
   (a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés.
   (b) $A_{2n} = ]0, 3 + 1/(2n)[$ et $A_{2n+1} = ]-1 - 1/(3n), 2]$.
   (c) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers.
   (d) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

# 5 – À chercher pour la prochaine fois

*Exercice 4.* (*Lemme de Borel-Cantelli*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

et que si $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) < \infty$, alors

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Que se passe-t-il si $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \infty$ ?

2. (*Lemme de Borel-Cantelli*) On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

3. (*Une application du lemme de Borel-Cantelli*) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de couple $(p, q)$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

c'est-à-dire presque tout $x$ est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$".

## 6 – Compléments (hors TD)

*Exercice 5.* (*Support d'une mesure*) Soit $\mu$ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable). On pose

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, \mu(\mathrm{B}(x,r)) > 0\}.$$

1. Montrer que $S$ est fermé.
2. Montrer que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$.
3. Montrer que, pour tout fermé $F$ strictement contenu dans $S$, $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$.

*Remarque.* On appelle $S$ le *support* de la mesure $\mu$ et on vient de montrer que c'est le plus petit fermé portant toute la masse de $\mu$.

*Exercice 6.* Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu$ non nulle et $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tous $x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

*Exercice 7.* On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète définie par $d(x,y) = \mathbb{1}_{x \neq y}$. Quelle est alors la tribu borélienne ? Est-ce que les tribus engendrées par les boules ouvertes et les boules fermées sont la tribu borélienne ?

*Exercice 8.* (✯) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(X, d)$ un espace métrique et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$. On suppose que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction $f : E \to X$. Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$ est mesurable.

*Fin*