TD1 : Généralités sur les groupes

Exercice 1.

1. Soit E un ensemble. Décrire le quotient de E par la relation d'égalité, puis le quotient de E par la relation $R = E \times E$.
2. Soit E un ensemble, R une relation sur E, et P la conjonction d'une ou plusieurs des propriétés suivantes : "réflexive", "symétrique", "transitive". Démontrer qu'il existe une plus petite relation sur E contenant R et vérifiant P. En particulier, il existe une plus petite relation d'équivalence contenant R : c'est la *relation d'équivalence engendrée* par R.
3. Soit E un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre totale sur E. Identifier le quotient de E par la relation $\leq$.
4. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on définit une relation R comme suit : xRy si et seulement s'il existe un nombre premier p tel que $y = px$. Identifier la plus petite relation réflexive et transitive sur $\mathbb{Z}$ contenant R, ainsi que la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ engendrée par R. Décrire le quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation R.

Exercice 2.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition, associative, avec élément neutre e, et telle que tout élément de E possède un inverse à gauche. Démontrer que tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche. En déduire que E est un groupe.

Exercice 3.

Soit G un groupe tel que $g^2 = e$ pour tout $g \in G$. Démontrer que G est abélien.

Exercice 4.

Soit G un groupe et soit H un sous-ensemble fini non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G.

1. Démontrer que H est un sous-groupe de G.
2. Trouver un exemple d'un groupe G et d'un sous-ensemble non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G qui ne soit pas un sous-groupe de G.

Exercice 5.

Démontrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbf{Q}, +)$ dans $(\mathbf{Q}_+^*, \times)$.

Exercice 6.

Donner la liste de tous les groupes (à isomorphisme près) de cardinal inférieur ou égal à 7.

Exercice 7.

On dit qu'un groupe G est d'exposant e si e est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que pour tout $g \in G$, on a $g^n = 1$. Pour quels entiers e un groupe d'exposant e est-il nécessairement commutatif ?

Exercice 8.

1. Démontrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que les sous-groupes non denses de $\mathbb{R}$ sont les $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.

Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G d'indice 2. Démontrer que H est distingué dans G.

Exercice 10.

Soit S un sous-ensemble non vide d'un groupe fini G. Soient $N(S) := \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$ et $C(S) := \{g \in G \mid \forall s \in S\,, gsg^{-1} = s\}$ le normalisateur et le centralisateur de S dans G. Montrer que :

1. $N(S) < G$ et $C(S) \triangleleft N(S)$.
2. $N(S) = G$ si et seulement si $S = \bigcup_{g \in G} gSg^{-1}$.
3. Si $H \triangleleft G$, alors $C(H) \triangleleft G$.
4. Si $H < G$, alors $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.

Exercice 11.

Soit G un groupe et soit $H \triangleleft G$ un sous-groupe distingué.

1. Décrire les sous-groupes distingués de G/H en fonction de ceux de G.
2. Soit K un sous-groupe de G.
   (a) Si K est distingué dans G et contient H, montrer que l'on a un isomorphisme $(G/H)/(K/H) \cong G/K$.
   (b) Démontrer que HK est un sous-groupe de G égal à KH.
   (c) Démontrer que H est distingué dans HK.
   (d) Démontrer que l'on a un isomorphisme $K/(K \cap H) \cong (HK)/H$.

Exercice 12.

Soit G un groupe fini.

1. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit (isomorphe à) un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
2. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit (isomorphe à) un sous-groupe de $\mathfrak{A}_n$.
3. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit (isomorphe à) un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$, pour tout corps k.

Exercice 13.

Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$. Et dans $\mathfrak{A}_n$?

Exercice 14.

Démontrer que si $n \geq 2$, $\mathfrak{S}_{n+2}$ a deux sous-groupes non conjugués isomorphes à $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 15.

Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes et soit x un élément de G_1 d'ordre fini. Démontrer que l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x.

Exercice 16.

Soit G un groupe. Vrai ou faux ?

1. Si tout sous-groupe H de G est distingué dans G, alors G est abélien.
2. Si $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft H$, alors $K \triangleleft G$.
3. Soient x et $y \in G$ d'ordre fini. Alors xy est nécessairement d'ordre fini.
4. Si G a un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.

Exercice 17.

Soit G un groupe fini.

1. Démontrer que des éléments conjugués dans G sont de même ordre.
2. Deux éléments de même ordre dans G sont-ils toujours conjugués ?
3. Trouver tous les groupes abéliens finis G pour lesquels la question précédente a une réponse positive. Un exemple non abélien ?

Exercice 18.

Soit N un entier naturel.

1. Démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini (à isomorphisme près) de groupes de cardinal au plus N.
2. Démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini (à isomorphisme près) de groupes abéliens finis possédant au plus N automorphismes.
3. Démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini (à isomorphisme près) de groupes finis possédant au plus N automorphismes.

Exercice 19

Soit k un corps fini à q éléments. Démontrer que les cardinaux de $\mathrm{GL}_n(k)$, $\mathrm{SL}_n(k)$ et $\mathrm{PGL}_n(k)$ sont des fonctions polynomiales en q, que l'on explicitera.

Exercice 20

Soit $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et soit n un entier naturel.

1. Déterminer le groupe des automophismes du groupe additif k^n.
2. Combien y a-t-il de sous-groupes de cardinal p dans k^2 ? Plus généralement, combien y a-t-il de sous-groupes de cardinal p^m (avec $m \leq n$) dans k^n ?
3. Expliciter une bijection entre la droite projective sur k et l'ensemble des sous-groupes de cardinal p dans k^2, telle que l'action de $\mathrm{Aut}(k^2)$ sur ce dernier ensemble corresponde à une action par homographies sur la droite projective.

Exercice 21

Soit G un groupe fini de cardinal $n \geq 1$.

1. Démontrer l'existence d'un système de générateurs $(a_i)_{i=1}^k$ de G tels que pour tout $i \in [|1, k|]$, l'élément a_i n'appartient pas au sous-groupe de G engendré par $(a_j)_{j<i}$.
2. Démontrer que G possède au plus $n^{\log_2(n)}$ endomorphismes.

Exercice 22

Soit G un groupe tel que le quotient par son centre est monogène. Démontrer que G est abélien.

Exercice 23

Quel est le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer le groupe $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 24

Soit G un groupe de type fini (i.e. engendré par un nombre fini d'éléments).

1. Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ?
2. Même question en supposant de plus que le cardinal de G/H est fini.

Exercice 25

Démontrer que tout sous-groupe d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.