Géométrie Différentielle, TD 10 du 6 et 9 mai 2014

1. Cohomologie et homotopie

Soit $F : M \times [0,1] \to N$ une homotopie lisse. Soit α une forme différentielle fermée de degré p sur N. On note f_t la restriction de F à $M \times \{t\}$. Montrer que $f_0^*(\alpha) - f_1^*(\alpha)$ est exacte et exhiber une forme γ telle que $d\gamma = f_0^*(\alpha) - f_1^*(\alpha)$. Simplifier cette expression dans le cas particulier où $M = N$ et F est le flot entre les temps 0 et 1 associés à un champ de vecteur X.

2. Cohomologie du tore

On note $M_n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n. L'espace $\Omega^p(M_n)$ s'identifie aux p-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ invariantes par translation par $\mathbb{Z}^n$. On note Ω^p_{const} le sous-espace constitué des formes invariantes par toutes les translations.

1– Soit $\alpha \in \Omega^p_{const}$. Montrer que α est une forme fermée. En déduire une application linéaire $u : \Omega^p_{const} \to H^p(M_n, \mathbb{R})$.

2– Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note τ_x la translation par x. Soit $\alpha \in \Omega^p(M_n)$ une forme fermée. Montrer que $\tau_x^*\alpha - \alpha$ est exacte.

3– Soit $\alpha \in \Omega^p(M_n)$ une forme fermée. Montrer que $\int_{[0,1]^n} \tau_x^*\alpha dx - \alpha$ est exacte.

4– En déduire que u est surjective.

5– Montrer que u est injective.

6– Calculer $\dim H^p(M_n, \mathbb{R})$.

3. Cohomologie de la sphère

Dans cet exercice, on calcule la cohomologie de la sphère $\mathbb{S}^n$, en utilisant l'action transitive du groupe des rotations $SO(n+1)$.

1– On note $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de taille $n+1$. Montrer que l'application exponentielle envoie surjectivement $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})$ sur $SO(n+1)$.

2– Montrer que, sur le complémentaire Z d'un ensemble de mesure nulle dans $SO(n+1)$, l'application $\exp : \mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1}) \to SO(n+1)$ admet un inverse à droite lisse, i.e. une application $L : Z \to \mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})$ telle que $\exp \circ L = id_Z$. On notera $\exp^{-1}$ cet inverse, avec des abus de notation.

3– Si X est dans $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})$, on note $\widetilde{X}$ le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^n$ défini par $\widetilde{X}_x = (\frac{d}{dt})_{t=0} \exp(tX).x$, où x est dans $\mathbb{S}^n$ et $g.x$ désigne l'action de la rotation g sur x. Expliciter le flot de $\widetilde{X}$.

4– Montrer l'existence d'une mesure de Haar sur $SO(n)$, i.e. une forme volume ω sur $SO(n)$, invariante par translations à gauche et d'intégrale 1. Si α est une forme sur

$\mathbb{S}^n$, donner un sens à la forme $\int_{SO(n)} g^*(\alpha)\omega_g$ et montrer que cette forme est invariante sous l'action de $SO(n)$.

5– Montrer que si α est une forme fermée sur $\mathbb{S}^n$, α est cohomologue à une forme fermée invariante sous l'action de $SO(n)$.

6– En déduire les espaces de cohomologie de $\mathbb{S}^n$.

4. Cohomologie de l'espace projectif réel

Soit Γ un groupe fini opérant librement par difféomorphismes sur une variété C^∞ X, soit Y la variété quotient et $p : X \to Y$ l'application quotient. On admettra la question 1, vue dans un précédent TD.

1– Montrer que pour tout k l'application p^* définit un isomorphisme :

$$\Omega^k(Y) \to \Omega^k(X)^\Gamma$$

2– Montrer que $p^* : H^k(Y) \to H^k(X)$ est injective.

3– Montrer que l'image de p^* est formée des classes de cohomologie Γ-invariantes.

4– Calculer la cohomologie des espaces projectifs réels $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ pour $n \geqslant 1$.

5. Cohomologie de l'espace projectif complexe

Pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$, soit $j_k : \mathbb{C}^N \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ définie par $j_k(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) = [x_0 : \ldots : x_{k-1} : 1 : x_{k+1} : \ldots : x_N]$, et notons $U_k = j_k(\mathbb{C}^N)$.

1– Soit $k \in \{1, \ldots, N\}$. Quelle est la cohomologie de de Rham de l'ouvert $U_0 \cap (U_1 \cup \cdots \cup U_k)$?

2– Soit I une partie non vide de $\{0, \ldots, N\}$. Quelle est la cohomologie de de Rham de $V_I := \bigcup_{k \in I} U_k$?

3– Quelle est la cohomologie de de Rham de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$? Que vaut sa caractéristique d'Euler-Poincaré ?

4– Quand $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est-il homéomorphe à $\mathbb{S}^{2N}$?