Géométrie Différentielle, TD 10 du 6 et 9 mai 2014

1. Cohomologie et homotopie

Soit $F : M \times [0,1] \to N$ une homotopie lisse. Soit α une forme différentielle fermée de degré p sur N. On note f_t la restriction de F à $M \times \{t\}$. Montrer que $f_0^*(\alpha) - f_1^*(\alpha)$ est exacte et exhiber une forme γ telle que $d\gamma = f_0^*(\alpha) - f_1^*(\alpha)$. Simplifier cette expression dans le cas particulier où $M = N$ et F est le flot entre les temps 0 et 1 associés à un champ de vecteur X.

Solution :

On considère $f_t^*(\alpha)$ comme une forme différentielle à paramètre sur M. On peut dériver ou intégrer par rapport à ce paramètre et on montre aisément que ces opérations commutent à la différentielle extérieure. On note j_t l'inclusion de $M \times \{t\}$ dans $M \times [0,1]$. La forme $\beta = F^*(\alpha)$ est une forme fermée sur $M \times [0,1]$. On écrit

$$f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha) = j_1^*\beta - j_0^*\beta = \int_0^1 (\frac{d}{dt} j_t^*\beta)dt.$$

Montrons la formule

$$\frac{d}{dt} j_t^*\beta = j_t^*(L_{\frac{d}{dt}}\beta). \tag{1}$$

Comme β est une forme sur $M \times \mathbb{R}$, on peut choisir des coordonnées $(x_1, \dots, x_n, t)$ où les x_i sont les coordonnées sur M et t la coordonnée sur $\mathbb{R}$. Dans ces coordonnées, β s'écrit

$$\beta = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \gamma_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1}(t,x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} + dt \wedge \sum_{i_1 < \cdots < i_{p-1}} \delta_{i_1,\dots,i_{p-1}}(t,x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}},$$

ce qu'on écrit $\beta = \gamma + dt \wedge \delta$.

On a $j_t^*(\beta) = j_t^*(\gamma)$ car $j_t^*(dt) = 0$. Donc

$$\frac{d}{dt} j_t^*(\beta) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \frac{d}{dt} \gamma_{i_1,\dots,i_p}(t,x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

D'autre part, $L_{\frac{d}{dt}}(dt \wedge \delta) = L_{\frac{d}{dt}}(dt) \wedge \delta + dt \wedge L_{\frac{d}{dt}}\delta = dt \wedge L_{\frac{d}{dt}}\delta$ et donc

$$j_t^*(L_{\frac{d}{dt}}\beta) = j_t^*(L_{\frac{d}{dt}}\gamma).$$

Mais $L_{\frac{d}{dt}}\gamma = \iota_{\frac{d}{dt}} d\gamma + d\iota_{\frac{d}{dt}}\gamma = \iota_{\frac{d}{dt}} d\gamma$ car γ n'a pas de terme dt. Vu la forme de γ, il est clair qu'on a alors

$$j_t^*(\iota_{\frac{d}{dt}} d\gamma) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \frac{d}{dt} \gamma_{i_1,\dots,i_p}(t,x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

ce qui prouve la formule (1).

On calcule alors

$$\begin{aligned}
f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha) &= \int_0^1 (\frac{d}{dt} j_t^* \beta) dt \\
&= \int_0^1 (j_t^* (L_{\frac{d}{dt}} \beta) dt \\
&= \int_0^1 (j_t^* d\iota_{\frac{d}{dt}} \beta) dt \text{ car } \beta \text{ est fermée} \\
f_1^*(\alpha) - f_0^*(\alpha) &= d\Big(\int_0^1 (j_t^* \iota_{\frac{d}{dt}} \beta) dt \Big),
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Dans le cas particulier où $F(x,t) = \varphi_t(x)$, avec φ_t groupe à un paramètre de difféomorphismes de générateur infinitésimal X, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_1^*(\alpha) - \varphi_0^*(\alpha) &= \int_0^1 (\frac{d}{dt} \varphi_t^*(\alpha)) dt \\
&= \int_0^1 (\varphi_t^* L_X \alpha)) dt \\
\varphi_1^*(\alpha) - \varphi_0^*(\alpha) &= d\Big(\int_0^1 (\varphi_t^* \iota_X \alpha) dt \Big).
\end{aligned}$$

2. Cohomologie du tore

On note $M_n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n. L'espace $\Omega^p(M_n)$ s'identifie aux p-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ invariantes par translation par $\mathbb{Z}^n$. On note Ω^p_{const} le sous-espace constitué des formes invariantes par toutes les translations.

1– Soit $\alpha \in \Omega^p_{const}$. Montrer que α est une forme fermée. En déduire une application linéaire $u : \Omega^p_{const} \to H^p(M_n, \mathbb{R})$.

2– Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note τ_x la translation par x. Soit $\alpha \in \Omega^p(M_n)$ une forme fermée. Montrer que $\tau_x^* \alpha - \alpha$ est exacte.

3– Soit $\alpha \in \Omega^p(M_n)$ une forme fermée. Montrer que $\int_{[0,1]^n} \tau_x^* \alpha dx - \alpha$ est exacte.

4– En déduire que u est surjective.

5– Montrer que u est injective.

6– Calculer $\dim H^p(M_n, \mathbb{R})$.

Solution :

1– Sur $\mathbb{R}^n$, α est une forme à coefficients constants. Les dérivées partielles des coefficients sont donc nulles, et $d\alpha = 0$. On dispose ainsi d'une application $u : \Omega^p_{const} \to H^p(M_n, \mathbb{R})$ qui consiste à prendre la classe de cohomologie.

2– L'application τ_x est homotope à Id via $t \mapsto \tau_{tx}$. Ainsi, par le premier exercice (et le cours), $\tau_x^*\alpha - \alpha$ est exacte.

3– Par les calculs du premier exercice (et le cours), on peut écrire $\tau_x^*(\alpha) - \alpha = d\beta_x$ où

$$\beta_x = \int_0^1 (\tau_{tx}^* \iota_{X^x} \alpha) dt,$$

avec X^x le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, constant égal à x. Cette expression est manifestement lisse en x et on pose $\beta = \int_{[0,1]^n} \beta_x dx$.

Alors, $\int_{[0,1]^n} \tau_x^* \alpha dx - \alpha = d\beta$. Pour cette égalité, on a interverti différentielle extérieure et intégration ce qui est licite car toutes les expressions sont lisses.

4– Considérons une classe de cohomologie de $H^p(M_n, \mathbb{R})$, représentée par une forme fermée α, invariante par translations par $\mathbb{Z}^n$. La question précédente montre qu'elle estaussi représentée par $\int_{[0,1]^n} \tau_x^* \alpha dx$, qui appartient à Ω^p_{const}, comme voulu.

5– Soit $\alpha \in \Omega^p_{const}$ non nulle. Quitte à permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que le coefficient C en $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$ dans α est constant non nul. Notons $M_p = \mathbb{R}^p/\mathbb{Z}^p$: c'est une sous-variété de M_n. La forme $\alpha|_{M_p}$ est une forme de degré maximal. On calcule $\int_{M_p} \alpha|_{M_p} = C \neq 0$. En particulier, par Stokes, $\alpha|_{M_p}$ ne peut être exacte, donc α n'était pas exacte : $u(\alpha) \neq 0$. Ceci monte que u, de noyau trivial, est injective.

6– On a donc $\dim H^p(M_n, \mathbb{R}) = \dim \Omega^p_{const} = \dim \bigwedge^p \mathbb{R}^{n,*} = \binom{n}{p}$.

3. Cohomologie de la sphère

Dans cet exercice, on calcule la cohomologie de la sphère $\mathbb{S}^n$, en utilisant l'action transitive du groupe des rotations $SO(n+1)$.

1– On note $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de taille $n+1$. Montrer que l'application exponentielle envoie surjectivement $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})$ sur $SO(n+1)$.

2– Montrer que, sur le complémentaire Z d'un ensemble de mesure nulle dans $SO(n+1)$, l'application $\exp : \mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1}) \to SO(n+1)$ admet un inverse à droite lisse, i.e. une application $L : Z \to \mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})$ telle que $\exp \circ L = id_Z$. On notera $\exp^{-1}$ cet inverse, avec des abus de notation.

3– Si X est dans $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})$, on note $\widetilde{X}$ le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^n$ défini par $\widetilde{X}_x = (\frac{d}{dt})_{t=0} \exp(tX).x$, où x est dans $\mathbb{S}^n$ et $g.x$ désigne l'action de la rotation g sur x. Expliciter le flot de $\widetilde{X}$.

4– Montrer l'existence d'une mesure de Haar sur $SO(n)$, i.e. une forme volume ω sur $SO(n)$, invariante par translations à gauche et d'intégrale 1. Si α est une forme sur

$\mathbb{S}^n$, donner un sens à la forme $\int_{SO(n)} g^*(\alpha)\omega_g$ et montrer que cette forme est invariante sous l'action de $SO(n)$.

5– Montrer que si α est une forme fermée sur $\mathbb{S}^n$, α est cohomologue à une forme fermée invariante sous l'action de $SO(n)$.

6– En déduire les espaces de cohomologie de $\mathbb{S}^n$.

Solution :

1– Si A est une matrice antisymétrique, on a $A = -{}^tA$. En notant $B = \exp(A)$, l'égalité implique $B = {}^tB^{-1}$. De plus, par le théorème de réduction des rotations, il suffit de montrer que les rotations dans le plan (et l'identité en dimension 1) sont dans l'image de l'exponentielle des matrices antisymétriques en dimension 2 (et en dimension 1). En dimension 1, c'est évident, et en dimension 2, la matrice antisymétrique avec θ dans le coin supérieur droit a pour exponentielle la matrice de rotation d'angle θ.

2– On considère Z l'ensemble des matrices de rotations à valeurs propres (complexes) distinctes. On a donc p angles θ_j distincts bien définis à 2π près, correspondant aux valeurs propres $e^{i\theta_j}$ et $e^{-i\theta_j}$, et suivant la parité de $n+1$, on a éventuellement une unique valeur propre 1. On peut alors définir les plans E_j sur lesquels la rotation se restreint en une rotation d'angle θ_j (et éventuellement une droite invariante point par point D). On définit alors une matrice antisymétrique qui vaut la matrice antisymétrique avec l'angle θ_j dans le coin supérieur droit en restriction au plan E_j, où on prend θ_j dans $]-\pi,\pi[$ (et éventuellement 0 sur D). Cette matrice a pour exponentielle la matrice de rotation et on laisse au lecteur le soin de vérifier que cette construction est lisse et que l'ensemble de définition est effectivement le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle.

3– On pose $\varphi_t^X(x) = \exp(tX).x$ On a $\varphi_0^X(x) = x$ et $(\frac{d}{ds})_{s=t}\varphi_s(x) = (\frac{d}{ds})_{s=0}(\exp sX.(\exp tX.x)) = \widetilde{X}(\varphi_t^X(x))$. Donc, φ_t^X est le flot de $\widetilde{X}$.

4– On a vu dans un précédent TD qu'une forme volume invariante à gauche existe toujours sur un groupe de Lie (il suffit de définir cette forme en tout point, en translatant sa valeur en l'identité). Comme le groupe est compact, quitte à normaliser, on peut supposer la forme d'intégrale 1.

Pour donner un sens à $\gamma = \int_{SO(n+1)} g^*(\alpha)\omega_g$, on peut par exemple considérer $g \mapsto g^*(\alpha)$ comme une application lisse de $SO(n+1)$ dans l'ensemble des formes différentielles sur $\mathbb{S}^n$ et intégrer dans cet espace. De façon plus élémentaire, on peut définir $\gamma_x(X_1,\ldots,X_p)$ comme l'intégrale $\int_{SO(n+1)} \alpha_{g.x}(dg(X_1),\ldots,dg(X_p))\omega_g$, où x est dans $\mathbb{S}^n$ et X_i dans $T_x\mathbb{S}^n$. Les théorèmes de régularité sous le signe intégrale montrent alors que cette forme est bien lisse. De plus, l'invariance de cette forme sous l'action de $SO(n)$ résulte de sa construction et de l'invariance de la mesure de Haar.

5– On suit point par point ce qui a été fait dans le cas du tore, mais il faut faire attention. Prenons g dans Z et considérons $g^*\alpha$. Alors, si $X = \exp^{-1}(g)$, on a $g^*\alpha - \alpha =$

$(\varphi_1^X)^*\alpha - (\varphi_0^X)^*\alpha$. Par le premier exercice, il vient $g^*\alpha - \alpha = d\beta_g$ où

$$\beta_g = \int_0^1 \big((\varphi_t^{\exp^{-1}(g)})^* \iota_{\exp^{-1}(g)}\alpha\big)dt.$$

On peut alors intégrer β_g par rapport à g (avec la mesure de Haar ω sur Z), ce qui donne une forme β telle que $\int_{SO(n+1)} g^*(\alpha)\omega_g - \alpha = d\beta$ (car Z est de mesure pleine dans $SO(n+1)$). Ceci conclut la preuve. Remarquons qu'il suffit que l'inverse partiel $\exp^{-1}$ soit mesurable pour que la construction donne une forme lisse β.

6– D'après ce qui précède, les classes de cohomologie sont à chercher parmi les formes différentielles invariantes sous l'action de $SO(n+1)$. En s'inspirant de ce qui a été fait dans le TD 5, on montre qu'il n'existe de telles formes invariantes qu'en degré 0 (les fonctions constantes) et en degré n (les formes volumes invariantes, correspondant à la mesure de Lebesgue à un scalaire près). Ces formes sont évidemment fermées et non exactes (une forme volume sur une variété compacte orientée n'est pas exacte par la formule de Stokes). On en déduit que la cohomologie de la sphère $\mathbb{S}^n$ est concentrée en degré 0 et n, et de dimension 1 en ces degrés.

4. Cohomologie de l'espace projectif réel

Soit Γ un groupe fini opérant librement par difféomorphismes sur une variété C^∞ X, soit Y la variété quotient et $p : X \to Y$ l'application quotient. On admettra la question 1, vue dans un précédent TD.

1– Montrer que pour tout k l'application p^* définit un isomorphisme :

$$\Omega^k(Y) \to \Omega^k(X)^\Gamma$$

2– Montrer que $p^* : H^k(Y) \to H^k(X)$ est injective.

3– Montrer que l'image de p^* est formée des classes de cohomologie Γ-invariantes.

4– Calculer la cohomologie des espaces projectifs réels $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ pour $n \geqslant 1$.

Solution :

1– L'image de p^* est incluse dans $\Omega^k(X)^\Gamma$ car pour tout $\gamma \in \Gamma$, $p \circ \gamma = p$.

Supposons $p^*\omega = 0$. Soit $y \in Y$ et x un antécédent de y par p. Soient $e_1, \dots, e_k$ des vecteurs tangents à Y en y. Comme p est un difféomorphisme local, T_xp est un isomorphisme et on calcule :

$$\omega_y(e_1, \dots, e_k) = p^*\omega_x((T_xp)^{-1}(e_1), \dots, (T_xp)^{-1}(e_1)) = 0,$$

ce qui montre $\omega = 0$. L'application p^* est donc injective.

Soit $\omega \in \Omega^k(X)^\Gamma$. On définit $\sigma \in \Omega^k(y)$ de la manière suivante : soit $y \in Y$. On choisit x un antécédent de y par p et on pose $\sigma_y(e_1, \dots, e_k) = \omega_x((T_xp)^{-1}(e_1), \dots, (T_xp)^{-1}(e_1))$. L'invariance de ω sous Γ montre que cette définition ne dépend pas du choix de x. Montrons que σ est une forme C^∞. Pour cela, comme p est un difféomorphisme local, on choisit un voisinage U de x et un voisinage V de y tel que $p|_U$ réalise un difféomorphisme de U sur V. Alors notre construction est telle que $\sigma|_V = ((p|_U)^{-1})^*(\omega|_U)$ et cette expression montre que σ est C^∞ au voisinage de y. Comme, par construction, $p^*\sigma = \omega$, on a montré la surjectivité de p^*.

2– Soit une $c \in H^k(Y)$ telle que $p^*c = 0$. On choisit une forme différentielle fermée ω représentant c. L'hypothèse est que $p^*\omega$ est exacte : il existe $\alpha \in \Omega^{k-1}(X)$ telle que $p^*\omega = d\alpha$. Posons $\alpha' = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*\alpha$. On calcule :

$$d\alpha' = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^* d\alpha = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^* p^*\omega = p^*\omega$$

car $p^*\omega$ est Γ-invariante. L'expression de α' montre que α' est Γ-invariante. Par la question précédente, il existe $\beta \in \Omega^{k-1}(Y)$ telle que $p^*\beta = \alpha'$. On a alors $p^*(\omega - d\beta) = p^*\omega - d\alpha' = 0$ donc la question précédente montre que $\omega = d\beta$ est exacte. Ainsi, $c = 0$.

3– L'image de p^* est constituée de classes de cohomologie Γ-invariantes par fonctorialité de la cohomologie et car $p \circ \gamma = p$ pour $\gamma \in \Gamma$. Réciproquement, soit $c \in H^k(X)$ une classe de cohomologie Γ-invariante. On choisit ω une forme fermée représentant c. Posons $\omega' = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*\omega$. Alors ω' représente aussi la classe de cohomologie c par Γ-invariance de c. Son expression montre que ω' est Γ-invariante. La première question montre alors qu'il existe $\alpha \in \Omega^k(Y)$ telle que $p^*\alpha = \omega'$. Comme $p^*d\alpha = dp^*\alpha = d\omega' = 0$ et que p^* est injective, α est fermée. la classe de cohomologie c' qu'elle représente est bien telle que $p^*c' = c$. Ceci montre que l'image de p^* contient toutes les classes de cohomologie Γ-invariantes, et conclut.

4– On pose $X = \mathbb{S}^n$, $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant par l'antipodie f et $Y = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ le quotient. On applique les résultats précédents. La sphère n'a que deux groupes de cohomologie non triviaux : $H^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ et $H^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$. L'antipodie agit par l'identité sur le premier car on peut choisir comme représentants de ces classes de cohomologie les fonctions constantes. L'action sur le second est la multiplication par le degré de l'antipodie f. Celui-ci est 1 quand f préserve l'orientation et -1 sinon. Or l'antipodie préserve l'orientation de $\mathbb{S}^n$ si et seulement si n est impair.

On peut alors appliquer la question précédente : $H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ est nul sauf si $i = 0$ ou si $i = n$ et n est impair. auquel cas il est de dimension 1.

5. Cohomologie de l'espace projectif complexe

Pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, soit $j_k : \mathbb{C}^N \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ définie par $j_k(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N) = [x_0 : \dots : x_{k-1} : 1 : x_{k+1} : \dots : x_N]$, et notons $U_k = j_k(\mathbb{C}^N)$.

1– Soit $k \in \{1, \dots, N\}$. Quelle est la cohomologie de de Rham de l'ouvert $U_0 \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k)$?

2– Soit I une partie non vide de $\{0, \dots, N\}$. Quelle est la cohomologie de de Rham de $V_I := \bigcup_{k\in I} U_k$?

3– Quelle est la cohomologie de de Rham de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$? Que vaut sa caractéristique d'Euler-Poincaré ?

4– Quand $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est-il homéomorphe à $\mathbb{S}^{2N}$?

Solution :

1– On a $j_0^{-1}(U_i) = \{(x_1, \dots, x_N) \mid x_i \neq 0\}$. Ainsi, $j_0^{-1}(U_1 \cup \dots \cup U_k) = (\mathbb{C}^k \backslash \{0\}) \times \mathbb{C}^{N-k}$. Cet ouvert se rétracte sur la sphère $\mathbb{S}^{2k-1}$, donc $H^i(U_0 \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k)) = \mathbb{R}$ si $i = 0$ ou $2k-1$, et 0 sinon.

2– On montre par récurrence sur la longueur de I que $H^i(V_I) = \mathbb{R}$ pour $i = 0, 2, \dots, 2|I|-2$, et 0 sinon. Le résultat est clair pour $|I| = 1$. Soit $I = \{0, \dots, k\}$, posons $J = \{1, \dots, k\}$. On écrit la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à U_0 et V_J. Pour tout entier i, on a $H^{2i+1}(U_0) = H^{2i+1}(V_J) = 0$. On obtient donc la suite exacte

$$0 \to H^{2i-1}(U_0 \cap V_J) \to H^{2i}(U_0 \cup V_J) \to H^{2i}(U_0) \oplus H^{2i}(V_J)$$
$$\to H^{2i}(U_0 \cap V_J) \to H^{2i+1}(U_0 \cup V_J) \to 0.$$

Pour $i = 0$, $U_0 \cup V_J$ est connexe donc $H^0(U_0 \cup V_J) = \mathbb{R}$, ce qui donne $H^1(U_0 \cup V_J) = 0$. Pour $i > 0$, on a $H^{2i}(U_0 \cap V_J) = 0$ d'après la question précédente, donc $H^{2i+1}(U_0 \cup V_J) = 0$ et

$$0 \to H^{2i-1}(U_0 \cap V_J) \to H^{2i}(U_0 \cup V_J) \to H^{2i}(U_0) \oplus H^{2i}(V_J) \to 0.$$

Si $i < k$, on a $H^{2i-1}(U_0 \cap V_J) = 0$, $H^{2i}(U_0) = 0$ et $H^{2i}(V_J) = \mathbb{R}$, donc $H^{2i}(U_0 \cup V_J) = \mathbb{R}$. Si $i > k$, on trouve de même $H^{2i}(U_0 \cup V_J) = 0$. Finalement, pour $i = k$, on a $H^{2i-1}(U_0 \cap V_J) = \mathbb{R}$ et $H^{2i}(U_0) \oplus H^{2i}(V_J) = 0$, donc $H^{2i}(U_0 \cup V_J) = \mathbb{R}$. Cela conclut la récurrence.

3– En prenant $I = \{0, \dots, N\}$, on obtient $V_I = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Ainsi, $H^i(\mathbb{P}^N(\mathbb{C})) = \mathbb{R}$ si i est pair et $0 \leqslant i \leqslant 2N$, et 0 sinon. Par conséquent, $\chi(\mathbb{P}^N(\mathbb{C})) = N + 1$.

4– La question précédente montre que si $N \neq 1$, $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et $\mathbb{S}^{2N}$ n'ont pas les mêmes groupes de cohomologie de De Rham, et ne sont donc pas homéomorphes. Si $N = 1$, la projection stéréographique réalise un difféomorphisme de $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.