Géométrie Différentielle, TD 10 du 11 mai 2015

1. Deux champs de vecteurs

1– Soient X et Y deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété M de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. Montrer qu'il existe f, g des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ strictement positives définies au voisinage de x telles que $[fX, gY] = 0$.

2– Le résultat local est-il encore valable si M est de dimension supérieure à 3 ?

2. Champs de vecteurs sur un groupe

Soit G un groupe de Lie, i.e. une variété différentielle munie d'une structure de groupe telle que les opérations de groupes soient lisses. On note $\mathfrak{g}$ l'espace tangent de G en l'élément neutre, qu'on appelle l'*algèbre de Lie* du groupe. On note $L_g : G \to G$ la translation à gauche par un élément g de G.

1– Montrer que l'espace vectoriel des champs de vecteurs *invariations à gauche*, i.e. des champs de vecteurs X de G vérifiant $dL_g(X) = X$, pour tout g dans G est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{g}$.

2– Montrer que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariants à gauche est un champ de vecteurs invariant à gauche. Par transport de structure, cela définit une application bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{g}$, encore appelé crochet de Lie et dénoté $[\cdot, \cdot]$.

3– Calculer cette application dans le cas où G est un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$.

4– Si G agit de façon lisse sur une variété M et si X appartient à $\mathfrak{g}$, on note X_M le champ de vecteurs sur M défini par

$$X_M(x) = d_e a_x(X),$$

où $a_x : G \to M, x \mapsto g.x$ est l'application orbitale. Montrer que X_M est lisse.

5– Si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{g}$, montrer que $[X, Y]_M = -[X_M, Y_M]$ (dans le cas où G est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$).

3. Dérivations des fonctions continues

Montrer que l'anneau des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ n'admet pas de dérivation non nulle.

4. Manœuvre d'une voiture

On considère une voiture se déplaçant dans le plan. On note l la distance entre les roues avant et arrière. On repère la voiture par la position (x, y) des roues arrières, l'angle θ qu'elle fait avec l'axe des abscisses et l'angle φ que font les roues avant avec l'axe de la voiture. La voiture peut avancer (et reculer), ou bien tourner ses roues avant.

1– Calculer le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent.

2– Montrer qu'on peut faire prendre à la voiture toute position choisie à l'avance.

5. Roulement sans glissement

On considère une boule de rayon 1 roulant sur un plan fixe horizontal. On note (x, y) les coordonnées du centre de la boule et R la matrice de rotation décrivant la position de la boule. L'espace des phases du système est de dimension 5, difféomorphe à $M = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$. On suppose le roulement sans glissement : si on marque en un instant t le point de contact sur la sphère par une croix, on demande que la vitesse de la croix en t soit nulle.

1– Écrire l'équation de roulement sans glissement. Cela définit une distribution de dimension 3 dans M

2– Exhiber des champs de vecteurs engendrant cette distribution.

3– En déduire que toute position de l'espace des paramètres est accessible par un roulement sans glissement.