Géométrie Différentielle, TD 10 du 11 mai 2015

1. Deux champs de vecteurs

1– Soient X et Y deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété M de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. Montrer qu'il existe f, g des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ strictement positives définies au voisinage de x telles que $[fX, gY] = 0$.

2– Le résultat local est-il encore valable si M est de dimension supérieure à 3 ?

Solution :

1– On développe l'équation $[fX, gY] = 0$. C'est équivalent à $fg[X, Y] + f(X.g)Y - g(Y.f)X = 0$. Comme on est en dimension 2, $[X, Y] = aX + bY$, avec des fonctions a et b lisses, uniquement déterminées. On veut donc résoudre les équations (découplées) $a = \frac{Y.f}{f}$ et $b = -\frac{X.g}{g}$. Pour montrer qu'une telle équation admet toujours une solution, on peut redresser X en un champ de vecteur constant, choisir une fonction quelconque sur une ligne transverse à la direction du vecteur et se ramener à une EDO en dimension 1 (ici, on peut même expliciter la solution si on ne veut pas utiliser les théorèmes de régularité des solutions d'EDO).

2– Choisissons X et Y de sorte qu'ils engendrent un champ de 2-plans non intégrable. Alors fX et gY engendrent le même champ de 2-plans. La condition $[fX, gY] = 0$ permettrait d'appliquer le théorème de Frobenius pour montrer son intégrabilité. C'est absurde.

2. Champs de vecteurs sur un groupe

Soit G un groupe de Lie, i.e. une variété différentielle munie d'une structure de groupe telle que les opérations de groupes soient lisses. On note $\mathfrak{g}$ l'espace tangent de G en l'élément neutre, qu'on appelle l'*algèbre de Lie* du groupe. On note $L_g : G \to G$ la translation à gauche par un élément g de G.

1– Montrer que l'espace vectoriel des champs de vecteurs *invariations à gauche*, i.e. des champs de vecteurs X de G vérifiant $dL_g(X) = X$, pour tout g dans G est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{g}$.

2– Montrer que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariants à gauche est un champ de vecteurs invariant à gauche. Par transport de structure, cela définit une application bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{g}$, encore appelé crochet de Lie et dénoté $[\cdot, \cdot]$.

3– Calculer cette application dans le cas où G est un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$.

4– Si G agit de façon lisse sur une variété M et si X appartient à $\mathfrak{g}$, on note X_M le champ de vecteurs sur M défini par

$$X_M(x) = d_e a_x(X),$$

où $a_x : G \to M, x \mapsto g.x$ est l'application orbitale. Montrer que X_M est lisse.

5– Si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{g}$, montrer que $[X,Y]_M = -[X_M, Y_M]$ (dans le cas où G est un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$).

Solution :

1– Soit X dans $\mathfrak{g}$. On définit un champ de vecteurs $\widetilde{X}$ sur G par

$$\widetilde{X}_g = d_e L_g(X).$$

C'est un champ de vecteurs lisse car les opérations de groupe sont lisses. De plus, $\widetilde{X}$ est invariant à gauche : soit g, g' dans G. Alors, $d_g L_{g'} \widetilde{X}_g = d_g L_{g'} \circ d_e L_g X = d_e L_{g'g} X = \widetilde{X}_{g'g} = \widetilde{X}_{L_{g'}(g)}$.

On en déduit aisément que l'application $X \mapsto \widetilde{X}$ est un isomorphisme linéaire, d'inverse l'application d'évaluation en l'élément neutre.

2– Si φ est un difféomorphisme et X, Y deux champs de vecteurs, on sait que $\varphi_*[X,Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$. On applique ceci à $\varphi = L_g$, pour tout g dans G.

3– On utilise la formule suivante :

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_g = \frac{d}{dt}_{|t=0} (\varphi_t^{\widetilde{Y}})_* (\widetilde{X}_{\varphi_t^{\widetilde{Y}}(g)}).$$

D'abord, remarquons que $\widetilde{Y}_g$ est simplement égal à gY. Le flot $\varphi^{\widetilde{Y}_t}(g)$ est donc égal à $g \exp tY$. Alors,

$$\begin{aligned}
(\varphi_t^{\widetilde{Y}})_*(\widetilde{X}_g) &= d_g \varphi_{-t}^{\widetilde{Y}} (\widetilde{X}_{\varphi_t^{\widetilde{Y}}(g)}) \\
&= d_g \varphi_{-t}^{\widetilde{Y}} (g \exp tY X) \\
&= g \exp tY X e^{-tY}
\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à t, il vient $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_g = -g[X,Y]$, où le dernier crochet est le crochet matriciel usuel. Donc, au niveau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le crochet de Lie défini par les champs invariants à gauche est *moins* le crochet matriciel usuel.

4– Si G agit de façon lisse, l'application de $m : G \times M$ dans M donnée par $(g,x) \mapsto a_x(g)$ est lisse. En particulier, le champ de vecteurs $x \mapsto d_{(e,x)} m(X,0)$ est lisse. C'est la définition de X_M.

5– Si X est dans $\mathfrak{g}$, le flot de X_M est donné par $\varphi_t^{X_M}(x) = \exp(tX).x$. Si g est dans G, on note m_g le difféomorphisme de X donné par $x \mapsto g.x$. Alors,

$$\begin{aligned}
[X_M, Y_M]_x &= \frac{d}{dt}_{|t=0} d_{\exp -tY.x} m_{\exp(-tY)}(X_M(\exp(tY.x)) \\
&= \frac{d}{dt}_{|t=0} d_{\exp(tY).x} m_{\exp(-tY)}(\frac{d}{ds}_{|s=0} \exp(sX).(\exp(tY.x)) \\
&= \frac{d}{dt}_{|t=0}(\frac{d}{ds}_{|s=0} d_x m_{\exp(-tY)\exp(sX)\exp(tY)}) \\
&= d_x m_{\frac{d}{dt}_{|t=0}(\frac{d}{ds}\exp(-tY)\exp(sX)\exp(tY)} \\
&= d_x m(-YX + XY) \\
&= [X, Y]_{M,x}
\end{aligned}$$

3. Dérivations des fonctions continues

Montrer que l'anneau des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ n'admet pas de dérivation non nulle.

Solution :

Soit δ une dérivation. On a $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 2\delta(1)$ de sorte que $\delta(1) = 0$, et que $\delta(c) = 0$ pour toute constante c.

Si $f \geqslant 0$ et $f(x) = 0$, on pose $g = \sqrt{(}f)$. Il vient $\delta(f) = 2g\delta(g)$ de sorte que $\delta(f)(x) = 0$.

Si f est telle que $f(x) = 0$, on montre $\delta(f)(x) = 0$, en écrivant $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$: on est alors ramené au cas précédent.

Finalement, si f est quelconque, on écrit $f = (f - f(x)) + f(x)$. Les résultats ci-dessus montrent $\delta(f)(x) = 0 + 0 = 0$.

4. Manœuvre d'une voiture

On considère une voiture se déplaçant dans le plan. On note l la distance entre les roues avant et arrière. On repère la voiture par la position (x, y) des roues arrières, l'angle θ qu'elle fait avec l'axe des abscisses et l'angle φ que font les roues avant avec l'axe de la voiture. La voiture peut avancer (et reculer), ou bien tourner ses roues avant.

1– Calculer le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent.

2– Montrer qu'on peut faire prendre à la voiture toute position choisie à l'avance.

Solution :

1– On travaille en coordonnées (x, y, θ, φ).

Un champ de vecteurs tangent au mouvement consistant à tourner les roues avant est $X = (0, 0, 0, 1)$.

Les équations régissant le mouvement consistant à avancer la voiture sont : $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$, $\frac{d(y+l\sin\theta)}{d(x+l\cos\theta)} = \tan(\theta+\varphi)$ et $d\varphi = 0$. Elles décrivent respectivement le mouvement des roues arrière, le mouvement des roues avant et le fait qu'on ne tourne pas le volant. On déduit qu'un champ de vecteurs tangent à ce mouvement est $Y = (l\cos\theta\cos\varphi, l\sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$.

Le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent est celui engendré par X et Y.

2– On va appliquer le théorème de Chow. Il faut montrer que les crochets itérés de X et Y engendrent $\mathbb{R}^4$ en tout point. On calcule $[X, Y] = (-l\cos\theta\sin\varphi, -l\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$. On calcule $[Y, [X, Y]] = (l\sin\theta, -l\cos\theta, 0, 0)$.

On vérifie alors que, en tout point, X, Y, $[X, Y]$ et $[Y, [X, Y]]$ engendrent l'espace tangent. On peut donc appliquer le théorème de Chow, et montrer que toute position est accessible.

5. Roulement sans glissement

On considère une boule de rayon 1 roulant sur un plan fixe horizontal. On note (x, y) les coordonnées du centre de la boule et R la matrice de rotation décrivant la position de la boule. L'espace des phases du système est de dimension 5, difféomorphe à $M = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$. On suppose le roulement sans glissement : si on marque en un instant t le point de contact sur la sphère par une croix, on demande que la vitesse de la croix en t soit nulle.

1– Écrire l'équation de roulement sans glissement. Cela définit une distribution de dimension 3 dans M

2– Exhiber des champs de vecteurs engendrant cette distribution.

3– En déduire que toute position de l'espace des paramètres est accessible par un roulement sans glissement.

Solution :

Voir le polycopié de C. Viterbo.