Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$10

Corrigé

Exercice 1

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leq |x| \, ||G'||_\infty$. Donc $|G \circ u| \leq |u| \, ||G'||_\infty$ et, si $u \in H^1 \subset L^2$, $G \circ u \in L^2$.
b) Si u est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $G \circ u$ est dérivable au sens classique, de dérivées partielles :

$$\partial_j(G \circ u) = (G' \circ u)\partial_j u$$

On suppose maintenant seulement $u \in H^1(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ convergeant vers u dans $H^1(\Omega)$.
La suite $(G \circ u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 vers $G \circ u$. En effet, pour tout n :

$$\begin{aligned} & |G \circ u_n - G \circ u| \leq ||G'||_\infty |u_n - u| \\ \Rightarrow \qquad & ||G \circ u_n - G \circ u||_2 \leq ||G'||_\infty ||u_n - u||_2 \end{aligned}$$

Quitte à extraire, on peut supposer que u_n converge simplement vers u presque partout (propriété de L^2). Alors, $(G' \circ u_n)\partial_j u_n$ converge dans L^2 vers $(G' \circ u)\partial_j u$. En effet :

$$\begin{aligned} ||(G' \circ u_n)\partial_j u_n - (G' \circ u)\partial_j u||_2 &\leq ||(G' \circ u_n)(\partial_j u_n - \partial_j u)||_2 + ||\partial_j u(G' \circ u_n - G' \circ u)||_2 \\ &\leq ||G'||_\infty ||\partial_j u_n - \partial_j u||_2 + ||\partial_j u(G' \circ u_n - G' \circ u)||_2 \end{aligned}$$

Puisque G' est continue, $G' \circ u_n - G' \circ u$ converge simplement vers 0 presque partout. Par le théorème de convergence dominée, on a alors $||\partial_j u(G' \circ u_n - G' \circ u)||_2 \to 0$. Cela implique que $||(G' \circ u_n)\partial_j u_n - (G' \circ u)\partial_j u||_2$ tend vers 0.
Donc $G \circ u_n$ converge dans H^1 : c'est une suite de Cauchy dont toutes les dérivées partielles forment une suite de Cauchy. Sa limite est $G \circ u$ (puisque les limites dans L^2 et H^1 coïncident, si les deux existent). Donc $G \circ u \in H^1$ et, pour tout j :

$$\partial_j(G \circ u) = \lim_{n\to+\infty} \partial_j(G \circ u_n) = \lim_{n\to+\infty} (G' \circ u_n)\partial_j u_n = (G' \circ u)\partial_j u$$

2. a) Posons $G(t) = e^{-1/t^2}$ si $t > 0$ et $G(t) = 0$ sinon. Cette fonction convient.
b) La fonction $G \circ u$ appartient à H^1, d'après la question 1. De plus, elle est nulle sur le bord de Ω, puisque $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$ et $G = 0$ sur $\mathbb{R}^-$.
Comme H^1_0 est l'ensemble des fonctions dont la trace sur $\partial\Omega$ est nulle (voir la fin du TD 2 à ce sujet), $G \circ u \in H^1_0$. Donc $\langle Lu, G \circ u \rangle = 0$, d'après la définition de « solution au sens faible ».

Ainsi :

$$\begin{aligned}0 &= \int \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(x)\partial_j u(x)\partial_i u(x)(G'\circ u(x))dx \\ &\ge \int \lambda||\nabla u(x)||^2 (G'\circ u(x))dx\end{aligned}$$

c) La fonction $x \to ||\nabla u(x)||^2(G'\circ u(x))$ est à valeurs positives. Puisque son intégrale est nulle, elle doit être nulle presque partout. Donc $(\nabla u)(G'\circ u) = 0$ presque partout. Puisque $(\nabla u)(G'\circ u) = \nabla(G\circ u)$, la fonction $G\circ u$ est de gradient nul presque partout. Comme elle vaut 0 sur le bord de Ω, cette fonction est nulle, ce qui entraîne $u \le 0$ sur presque tout Ω.

Exercice 2

1. Soit $t \to (x(t), \xi(t))$ une courbe bicaractéristique. Posons $P(t) = p(x(t), \xi(t))$. Alors :

$$P'(t) = \left\langle \nabla_x p(x(t),\xi(t)), \frac{dx}{dt}(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_\xi p(x(t),\xi(t)), \frac{d\xi}{dt}(t)\right\rangle = 0$$

Donc, pour tout t, $p(x(t),\xi(t)) = p(x_0,\xi_0) = 0$.

2. a) Pour tout $(x_0,\xi_0) \in p^{-1}(\{0\})$, on note $\mathcal{C}_{x_0,\xi_0}$ la courbe bicaractéristique associée.
On veut montrer que :

$$WF(u) = \bigcap_{\mathcal{C}_{x_0,\xi_0}\cap WF(u)\neq\emptyset} \mathcal{C}_{x_0,\xi_0}$$

Il faut donc montrer que, pour tout (x_0,ξ_0), soit $\mathcal{C}_{x_0,\xi_0}\cap WF(u) = \emptyset$, soit $\mathcal{C}_{x_0,\xi_0}\cap WF(u) = \mathcal{C}_{x_0,\xi_0}$.
Soit donc (x_0,ξ_0) fixé.
Soit I l'ensemble de définition de la courbe bicaractéristique $t \to (x(t),\xi(t))$ associée. Notons $I' = \{t \in I \text{ tq } (x(t),\xi(t)) \in WF(u)\}$.
L'ensemble I' est fermé dans I, puisque (x,ξ) est continue et $WF(u)$ est fermé.
Si on suppose démontré le résultat indiqué dans l'énoncé, I' est également ouvert. En effet, si $t_1 \in I'$, alors $(x(t_1),\xi(t_1)) \in WF(u)$. La courbe bicaractéristique associée à $(x(t_1),\xi(t_1))$ est $t \to (x(t_1+t),\xi(t_1+t))$. D'après le résultat de l'énoncé, $(x(t_1+t),\xi(t_1+t)) \in WF(u)$ pour tout t assez proche de 0. Donc il existe un voisinage de t_1 inclus dans I'.
Puisque I est un intervalle, I est connexe. On vient de voir que $I' \subset I$ était ouvert et fermé, donc $I' = \emptyset$ ou $I' = I$. Cela implique le résultat voulu.
b) Puisque p est m-homogène en ξ, $\nabla_\xi p$ est $(m-1)$-homogène en ξ et $\nabla_x p$ est m-homogène en ξ.
Cela implique que, si (x,ξ) et $(\tilde{x},\tilde{\xi})$ sont respectivement les courbes bicaractéristiques associées aux conditions initiales (x_0,ξ_0) et $(x_0,\lambda\xi_0)$, avec $\lambda > 0$, on a :

$$(\tilde{x}(t),\tilde{\xi}(t)) = \left(x\left(\lambda^{m-1}t\right), \lambda\xi\left(\lambda^{m-1}t\right)\right)$$

Supposons (x_0,ξ_0) quelconque et $\lambda > 0$ choisi de sorte que $\lambda||\xi_0|| \ge 4$. Si $(\tilde{x}(t),\tilde{\xi}(t))$ appartient à $WF(u)$ pour tout t assez proche de 0, comme $WF(u)$ est un cône en ξ, on a alors aussi que $(x(t),\xi(t))$ appartient à $WF(u)$ pour tout t assez proche de 0.

Donc le résultat pour $||\xi_0|| \geq 4$ implique le résultat pour tout ξ_0.
3. a) Soit V un voisinage ouvert de x_0 sur lequel ψ vaut 1. Alors :

$$WF(u) \cap (V \times \mathbb{R}^n) = WF(\psi u) \cap (V \times \mathbb{R}^n)$$

En effet, si $x \in V$ et $(x, \xi) \notin WF(u)$, il existe Γ un voisinage conique de ξ et ω un voisinage ouvert de x tel que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$, $\widehat{\phi u}$ décroît plus vite que tout polynôme sur Γ. Quitte à remplacer ω par $\omega \cap V$, on peut supposer que ω est inclus dans V. Alors, pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$, $\phi u = \phi(\psi u)$ donc $\widehat{\phi(\psi u)}$ décroît plus vite que tout polynôme sur Γ. Ainsi, $(x, \xi) \notin WF(\psi u)$.
L'autre inclusion est identique.

Donc u et ψu ont le même front d'onde au voisinage de (x_0, ξ_0). On conclut avec le lemme suivant, en utilisant le fait que ψu est dans H^s pour un certain s (c'est une distribution à support compact).

Lemme 2.1. *Soit $f \in H^s$ quelconque, pour un certain $s \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$WF(f) = WF(\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{m-1})f)$$

Démonstration. On montre $WF(f) \supset WF(\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{m-1})f)$; l'autre sens est identique. D'après l'exercice 3., si $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$, il existe Γ un voisinage conique de (x_0, ξ_0) tel que, pour tout $a \in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Supp}(a) \subset \Gamma$, $\mathrm{Op}(a)f \in H^\infty$.
Supposons un tel Γ fixé. Alors, pour tout $a \in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Supp}(a) \subset \Gamma$, on a aussi :

$$\mathrm{Supp}(a(x, \xi) \langle\xi\rangle^{m-1}) \subset \Gamma$$

et donc $\mathrm{Op}(a) \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{m-1})f = \mathrm{Op}(a(x, \xi) \langle\xi\rangle^{m-1})f \in H^\infty$.
Donc $(x_0, \xi_0) \notin WF(\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{m-1})f)$. □

b) Puisque $\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{1-m}) \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{m-1}) = \mathrm{Op}(1) = \mathrm{Id}$, il faut montrer :

$$\mathrm{Op}(\phi) \mathrm{Op}(a) \mathrm{Op}(\psi)u \in \mathcal{C}_c^\infty$$

Comme ϕ est à support compact, $\mathrm{Op}(\phi) \mathrm{Op}(a) \mathrm{Op}(\psi)u = \phi \mathrm{Op}(a) \mathrm{Op}(\psi)u$ est à support compact.
Il suffit de montrer que cette fonction est également $\mathcal{C}^\infty$.
D'après les théorèmes de calcul symbolique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(\phi) \mathrm{Op}(a) \mathrm{Op}(\psi) &= \mathrm{Op}(\phi a) \mathrm{Op}(\psi) \\
&\sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}(\alpha!)} \partial_\xi^\alpha(\phi a) \partial_x^\alpha \psi \\
&\sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}(\alpha!)} \phi\, \partial_\xi^\alpha a \partial_x^\alpha \psi \\
&\sim \phi a \psi
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que, pour $|\alpha| \geq 1$ si $\partial_x^\alpha \psi(x) \neq 0$, alors ψ n'est pas égal à 1 dans un voisinage de x, donc $\phi(x) = 0$; cela entraîne $\phi\, \partial_x^\alpha \psi = 0$ pour tout $\alpha \neq 0$.
Donc $\mathrm{Op}(\phi)\,\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(\psi)u - \mathrm{Op}(\phi a \psi)u$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. De plus :

$$\mathrm{Op}(\phi a \psi)u = \mathrm{Op}(\phi\psi)\,\mathrm{Op}(a)u = 0$$

Donc $\mathrm{Op}(\phi)\,\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(\psi)u \in \mathcal{C}^\infty$.
c) Puisque ϕ est dans S^0, $a \in S^m$ et $\langle\xi\rangle^{1-m} \in S^{1-m}$, b appartient à S^1.
De plus, on a $a(x,\xi) = p(x,\xi) + \tilde{p}(x,\xi)$ avec $\tilde{p} \in S^{m-1}$, donc $b(x,\xi) = q(x,\xi) + \phi(x)\tilde{p}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{1-m}$, avec $\phi(x)\tilde{p}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{1-m}$ qui appartient à S^0.
d) $\nabla_\xi q(x,\xi) = \phi(x)p(x,\xi)\nabla_\xi\left[\langle\xi\rangle^{1-m}\right](\xi) + \phi(x)\langle\xi\rangle^{1-m}\nabla_\xi p(x,\xi)$.
$\nabla_x q(x,\xi) = \nabla_x\phi(x)p(x,\xi)\langle\xi\rangle^{1-m} + \phi(x)\langle\xi\rangle^{1-m}\nabla_x p(x,\xi)$.
Soit c à valeurs dans $\mathbb{R}$ l'unique solution maximale du problème :

$$\begin{aligned}
&c'(t) = \phi(x\circ c(t))\,\langle\xi\circ c(t)\rangle^{1-m}\\
&c(0) = 0
\end{aligned}$$

Soit $t \to (x(t),\xi(t))$ la courbe bicaractéristique de p qui vaut (x_0,ξ_0) en $t = 0$. D'après la question 1., $p(x\circ c(t), \xi\circ c(t)) = 0$ pour tout t donc :

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi q(x\circ c(t),\xi\circ c(t)) &= \phi(x\circ c(t))\,\langle\xi\circ c(t)\rangle^{1-m}\,\nabla_\xi p(x\circ c(t),\xi\circ c(t))\\
&= \phi(x\circ c(t))\,\langle\xi\circ c(t)\rangle^{1-m}\,\frac{dx}{dt}\circ c(t)\\
&= c'(t)\frac{dx}{dt}\circ c(t)\\
&= \frac{d}{dt}\left[x\circ c\right](t)
\end{aligned}$$

De même :

$$-\nabla_x q(x\circ c(t),\xi\circ c(t)) = \frac{d}{dt}\left[\xi\circ c\right](t)$$

Donc $(x\circ c, \xi\circ c)$ est (au moins sur le domaine de définition de c) la courbe bicaractéristique de q passant par (x_0,ξ_0) en 0.
4. On peut appliquer le raisonnement de l'exercice 3 du TD 9 à $a = ib$, puisque le symbole principal de b, iq, est dans S^1 et à valeurs imaginaires pures. Si on pose $c(t,.,.) = q_t$, où q_t est la suite de symboles construite dans le TD 9, les deux premières conditions sont bien vérifiées (c'est la question 4. de l'exercice).
Il reste à montrer que la troisième condition peut également être vérifiée.
Puisque, dans le TD 9, on contruit q_t comme la somme asymptotique des $(q^{(-k)})_{k\in\mathbb{N}}$, il suffit de montrer qu'on peut choisir chaque $q^{(-k)}$ de sorte que :

$$\forall t \qquad \mathrm{Supp}(q_t^{(-k)}) \subset \mathrm{Supp}(c_0\circ\Phi_q^{-t}) = \mathrm{Supp}(q_t^{(0)})$$

Pour $k = 0$, c'est immédiat. Montrons-le pour $k = 1$ (ensuite, le raisonnement sera le même pour $k > 1$).

Quitte à lui retrancher un symbole de $S^{-\infty}$, on peut supposer que $b_t^{(-1)}$ est à support inclus dans $\mathrm{Supp}(q_t^{(0)})$, puisque, d'après la définition donnée à la question 2.b) de l'exercice 3 du TD 9 :

$$b_t^{(-1)} \sim \frac{d}{dt}q_t^{(0)} + \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}(\alpha!)}\left(\partial_\xi^\alpha a \partial_x^\alpha q_t^{(0)} - \partial_\xi^\alpha q_t^{(0)} \partial_x^\alpha a\right)$$

À la question 3.a), on voit que :

$$q^{(-1)}(t,x,\xi) = \int_0^t \tilde{q}^{(-1)}(s,t,x,\xi)ds = -\int_0^t b^{(-1)}(s, \Phi_q^{-(t-s)}(x,\xi))ds$$

Pour tout s, $\mathrm{Supp}(b^{(-1)}(s, \Phi_q^{-(t-s)}(x,\xi))) \subset \mathrm{Supp}(c_0 \circ \Phi_q^{-s} \circ \Phi_q^{-(t-s)}) = \mathrm{Supp}(c_0 \circ \Phi_q^{-t})$. Donc $q^{(-1)}(t,x,\xi)$ est aussi à support inclus dans $\mathrm{Supp}(c_0 \circ \Phi_q^{-t})$.

5. a) C'est le même raisonnement qu'à la question 2.a) de l'exercice 2 du TD 9.

b) D'après la question précédente, si $||\xi(0)|| \geq 2$, $||\xi(s)|| \geq 1$ pour tout $s \in [-s_0; s_0]$. Puisque $\xi \to \langle \xi \rangle$ est 1-homogène sur $\mathbb{R}^n - B(0,1)$, q est également 1-homogène en ξ sur $\mathbb{R}^n - B(0,1)$. Donc, pour tout (x_1, ξ_1) tel que $||\xi_1|| \geq 2$, pour tout $\lambda \geq 1$, si on note (x,ξ) la solution de (1) pour la condition initiale (x_1, ξ_1) et $(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ la solution de (1) pour la condition initiale $(x_1, \lambda\xi_1)$, on a :

$$\forall s \in [-s_0; s_0], \qquad (\tilde{x}(s), \tilde{\xi}(s)) = (x(s), \lambda\xi(s)) \tag{1}$$

Soit Γ un voisinage ouvert conique de (x_1, ξ_1) (avec donc $||\xi_1|| \geq 2$). Soit $s \in [-s_0; s_0]$ Notons :

$$\Gamma' = \{\Phi_q^s(\tilde{x}_1, \tilde{\xi}_1) \text{ tq } (\tilde{x}_1, \tilde{\xi}_1) \in \Gamma, ||\tilde{\xi}_1|| \geq 2\}$$

Notons $U = \{(x, \lambda\xi) \text{ tq } (x,\xi) \in \Gamma', \lambda \in \mathbb{R}_+^*\} \supset \Gamma'$. L'ensemble U est un cône en ξ. Il contient Γ' ; c'est donc un voisinage conique de $\Phi_q^s(x_1, \xi_1)$.

De plus, à cause de la propriété (1), $U - \Gamma' \subset B(0,4)$.

En effet, supposons $(x, \lambda\xi) \in U - \Gamma'$ et $\lambda||\xi|| \geq 4$. D'après (1), Γ' est stable par $(x,\xi) \to (x, \mu\xi)$ pour tout $\mu \geq 1$. Puisque $(x,\xi) \in \Gamma'$, on a donc $\lambda < 1$, sinon $(x, \lambda\xi) \in \Gamma'$.

Comme $\lambda||\xi|| \geq 4 \geq 2$ et $1/\lambda \geq 1$, on a, d'après (1) :

$$\Phi_q^{-s}(x,\xi) = \Phi_q^{-s}\left(x, \frac{1}{\lambda}\lambda\xi\right) = \left(\tilde{x}_1, \frac{1}{\lambda}\tilde{\xi}_1\right)$$

où $(\tilde{x}_1, \tilde{\xi}_1) = \Phi_q^{-s}(x, \lambda\xi)$.

Puisque $(x,\xi) \in \Gamma'$, $(\tilde{x}_1, \tilde{\xi}_1/\lambda) \in \Gamma$. Comme Γ est un cône, $(\tilde{x}_1, \tilde{\xi}_1) \in \Gamma$. D'après la question a), on a de plus $||\tilde{\xi}_1|| \geq 2$, puisque $||\lambda\xi|| \geq 4$. Donc $(x, \lambda\xi) = \Phi_q^s(x_1, \xi_1) \in \Gamma'$. C'est absurde.

Donc $\Phi_q^s(\Gamma)$ contient $U - (U - \Gamma')$ qui est un cône (en ξ) privé d'un ensemble borné.

c) Soit Γ un voisinage conique de $\Phi_q^s(x_0, \xi_0)$ satisfaisant la condition 2 de l'exercice 3.

D'après la question précédente, $\Phi_q^{-s}(\Gamma)$ contient $\Gamma' - E$, pour un certain voisinage conique Γ' de (x_0, ξ_0) et un certain ensemble borné E.

Supposons que c_0 est à support inclus dans Γ'. Alors, d'après la troisième condition de la question 4., pour tout $s \in [-s_0; s_0]$:

$$\mathrm{Supp}(c(s,.,.)) \subset \mathrm{Supp}(c_0 \circ \Phi_q^{-s}) \subset \Phi_q^s(\Gamma') \subset \Gamma \cup \Phi_q^s(E)$$

L'ensemble $\Phi_q^s(E)$ est borné (car Φ_q^s est un homéomorphisme et E est borné). Donc $c(s,.,.)$ s'écrit sous la forme $c_1 + c_2$, où c_1 est à support dans Γ et c_2 est à support compact.
Puisque Γ vérifie la condition 2 de l'exercice 3., $\mathrm{Op}(c_1)v \in H^\infty$. Puisque $c_2 \in S^{-\infty}$, $\mathrm{Op}(c_2)v \in H^\infty$. Donc $\mathrm{Op}(c(s,.,.))v \in H^\infty$.
d) Soit σ tel que $v \in H^\sigma$. Pour tout t, $\mathrm{Op}(c(t,.,.))v \in H^\sigma$, puisque $c(t,.,.) \in S^0$. De plus, $w : t \to w(t) \in H^\sigma$ est continue, car $t \to c(t,.,.) \in S^0$ l'est.
Puisque $t \to c(t,.,.)$ est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, S^0)$, w est dérivable et sa dérivée $w'(t) = \mathrm{Op}((d/dt)c(t,.,.))v$ est continue, à valeurs dans H^σ. Donc $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, H^\sigma)$.
e)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}w(t) + i\,\mathrm{Op}(b)w(t) &= \frac{d}{dt}\mathrm{Op}(c)v + i\,\mathrm{Op}(b)\,\mathrm{Op}(c)v \\
&= \left(\frac{d}{dt}\mathrm{Op}(c) + i[\mathrm{Op}(b), \mathrm{Op}(c)]\right)v - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(b)v \\
&= \mathrm{Op}(r_t)v - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(b)v
\end{aligned}$$

Par définition, $r_t \in S^{-\infty}$ (uniformément en t). On a de plus vu que $\mathrm{Op}(b)v$ était $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (question 3.b). Donc $t \to \mathrm{Op}(r_t)v - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(b)v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^\infty)$.
D'après la question c, $w(s) \in H^\infty$. D'après le lemme 6.5 du cours (qu'on peut appliquer car ib est hyperbolique : son symbole principal ib est à valeurs imaginaires pures), pour tout $\sigma' \in \mathbb{R}$:

$$||w(0)||_{H^{\sigma'}} \leq C||w(s)||_{H^{\sigma'}} + C\int_0^s \left|\left|\frac{d}{dt}w(\tau) + i\,\mathrm{Op}(b)w(\tau)\right|\right|_{H^{\sigma'}} d\tau$$

Donc, puisque $w(s) \in H^{\sigma'}$ et $\tau \to \left|\left|\frac{d}{dt}w(\tau) + i\,\mathrm{Op}(b)w(\tau)\right|\right|_{H^{\sigma'}}$ est finie (et continue), on a :

$$||w(0)||_{H^{\sigma'}} < +\infty$$

C'est valable pour tout σ' donc $w(0) \in H^\infty$.
f) Par définition, $w(0) = \mathrm{Op}(c_0)v$. D'après la question e), si le support de c_0 est inclus dans un certain voisinage conique de (x_0, ξ_0), alors $\mathrm{Op}(c_0)v \in H^\infty$. D'après l'exercice 3, $(x_0, \xi_0) \notin WF(v)$.
g) La conclusion de la dernière question est absurde : on avait supposé $(x_0, \xi_0) \in WF(v)$. Donc, pour tout s assez proche de 0, $\Phi_q^s(x_0, \xi_0) \in WF(v)$.
Comme v et u ont le même front d'onde au voisinage de (x_0, ξ_0), cela signifie que, pour tout s assez proche de 0, $\Phi_q^s(x_0, \xi_0) \in WF(u)$.
D'après la question 3.d), q et p ont les mêmes courbes bicaractéristiques au voisinage de (x_0, ξ_0), à reparamétrisation près. Donc on a aussi $\Phi_p^s(x_0, \xi_0) \in WF(u)$ pour tout s assez proche de 0 (au moins pour $||\xi_0|| \geq 4$). D'après la question 2., c'est ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 3

1. Supposons (2) vérifiée.
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ tels que Γ_1 est un voisinage de x_0, Γ_2 est un voisinage conique de ξ_0 et $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \subset \Gamma$.

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ à support dans Γ_1. Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ une fonction bornée ayant toutes ses dérivées bornées, à support dans Γ_2, telle que :

$$\forall \xi \in \Gamma_2' \text{ tq } ||\xi|| \geq 1 \qquad \psi(\xi) = 1$$

où Γ_2' est un voisinage conique de ξ_0 inclus dans Γ_2'.

Lemme 3.1. *$\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f \in H^\infty$.*

Démonstration. D'après l'un des théorèmes de calcul symbolique, pour tout N :

$$\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x)) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!} \mathrm{Op}(\partial^\alpha \psi(\xi) \partial^\alpha \phi(x)) \in \mathrm{Op}(S^{-(N+1)})$$

Pour tout α, $\mathrm{Op}(\partial^\alpha \psi(\xi) \partial^\alpha \phi(x))f \in H^\infty$, puisque (2) est vérifiée. Donc $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f$ est la somme d'un élément de H^∞ et d'un élément de $H^{s+(N+1)}$. Comme ceci est valable pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f \in H^\infty$. $\square$

La transformée de Fourier de $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f$ est $\psi\left(\widehat{\phi f}\right)$. La fonction $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f$ appartient à H^∞, donc est dans L^1 et a toutes ses dérivées dans L^1 (en effet, comme on l'a revu au TD 2, l'injection $H^1 \to L^1$ est continue). Cela implique que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\xi^\alpha \psi(\xi)\left(\widehat{\phi f}\right)(\xi)$ est une fonction bornée.

Donc $\xi^\alpha\left(\widehat{\phi f}\right)(\xi)$ est bornée sur Γ_2' pour tout multi-indice α. Cela implique que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe C_N tel que :

$$\forall \xi \in \Gamma_2, \qquad |\widehat{\phi f}(\xi)| \leq C_N(1 + ||\xi||)^{-N}$$

Donc $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$.

2. a) Soient $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(x_0) = 2$ et Γ_2 un voisinage conique de ξ_0 tels que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0 \text{ tq } \forall \xi \in \Gamma_2, \qquad |\widehat{\phi f}(\xi)| \leq C_N(1 + ||\xi||)^{-N}$$

Soient Γ_2' un voisinage conique ouvert de ξ_0 inclus dans Γ_2 et ψ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ ayant toutes ses dérivées $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

- le support de ψ est inclus dans Γ_2 ;
- ψ vaut 1 sur $\Gamma_2' - B(0,1)$.

Alors $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))f \in H^\infty$; en effet, la transformée de Fourier de cette fonction vaut $\psi(\xi)\left(\widehat{\phi f}\right)(\xi)$ et décroît plus vite que tout polynôme.

Notons $a \in S^0$ le symbole de $\mathrm{Op}(\psi(\xi))\,\mathrm{Op}(\phi(x))$. D'après l'un des théorèmes de calcul symbolique :

$$a \sim \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!} \partial^\alpha \psi(\xi) \partial^\alpha \phi(x)$$

Pour tout $\alpha \neq 0$, $\partial^\alpha \psi(\xi) = 0$ si $\xi \in \Gamma_2' - B(0,1)$, puisque ψ est constante sur $\Gamma_2' - B(0,1)$. On voit (en reprenant l'exercice 1 du TD 4) qu'il existe $\tilde{a} \in S^0$ tel que :

$$\tilde{a} \sim \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!} \partial^\alpha \psi(\xi) \partial^\alpha \phi(x)$$

et tel que, de plus, $\tilde{a}(x,\xi) = \psi(\xi)\phi(x) = \phi(x)$ si $\xi \in \Gamma_2' - B(0,1)$.
Puisque $\phi(x_0) = 2$, il existe un voisinage Γ_1 de x_0 sur lequel $\phi \geq 1$. Alors :

$$\forall (x,\xi) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2' \text{ tq } ||\xi|| > 1, \qquad |a(x,\xi)| = |\phi(x)| \geq 1$$

Comme $a - \tilde{a} \in S^{-\infty}$ et $\mathrm{Op}(a)f \in H^\infty$, on a aussi $\mathrm{Op}(\tilde{a})f \in H^\infty$. Donc $\tilde{a}$ satisfait les conditions voulues.
b) Soit $m \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit $b \in S^m$ tel que $\mathrm{Supp}(b) \subset \Gamma'$.

Lemme 3.2. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $c_N \in S^{-(m-N)}$ à support dans Γ' tel que :*

$$\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(c_0 + ... + c_N)\, \mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{m-N-1})$$

Démonstration. On procède par récurrence sur N.
Pour $N = 0$, on prend $c_0 = \chi b/a$, où χ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact qui vaut 0 sur $B(0,R)$ et 1 sur $\mathbb{R}^n - B(0,2R)$. D'après la propriété d'ellipticité vérifiée par a, c'est un symbole de S^m. Il est de plus à support dans Γ'. D'après le théorème de calcul symbolique sur la composition, $\mathrm{Op}(c_0)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(c_0 a) \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$. Comme $\mathrm{Op}(c_0 a) - \mathrm{Op}(b)$ a son symbole qui est à support compact en ξ, $\mathrm{Op}(c_0 a) - \mathrm{Op}(b) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Donc $\mathrm{Op}(c_0)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(b) \in \mathrm{Op}(S^{m-1})$.
Supposons la propriété vraie pour N et démontrons-la pour $N+1$. Posons $C_N = c_0 + ... + c_N$. Posons $d = \sum_{|\alpha| \leq N+1} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!} \partial_\xi^\alpha C_N(x,\xi) \partial_x^\alpha a(x,\xi)$. C'est un symbole de S^m et, d'après l'un des théorèmes de calcul symbolique :

$$\mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(d) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+2)})$$

Posons $c_{N+1} = \chi(b-d)/a$, avec χ définie de la même façon que dans le cas $N = 0$. Puisque $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+1)})$, on a aussi $\mathrm{Op}(b-d) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+1)})$ donc $c_{N+1} \in S^{m-(N+1)}$.
Le symbole c_{N+1} est à support dans Γ', puisque b et d sont à support dans Γ' (pour d, c'est une conséquence de l'hypothèse de récurrence : C_N est à support dans Γ'). Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(C_N + c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) &= \mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(d) - \mathrm{Op}(c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) \\
&\quad - (\mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(d)) \\
&= \mathrm{Op}(b-d) - \mathrm{Op}(c_{N+1}a) - (\mathrm{Op}(c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(c_{N+1}a)) \\
&\quad - (\mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(d))
\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Op}(b-d) - \mathrm{Op}(c_{N+1}a) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$, $\mathrm{Op}(c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(c_{N+1}a)$, $\mathrm{Op}(C_N)\,\mathrm{Op}(a) - \mathrm{Op}(d) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+2)})$ donc $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(C_N + c_{N+1})\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{m-(N+2)})$.
Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée. □

Si on choisit $c \sim \sum_{N \geq 0} c_N$, on a $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
c) Pour tout $b \in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Supp}(b) \subset \Gamma'$, il existe, d'après la question précédente, $c \in S^{+\infty}$ tel que $\mathrm{Op}(b) - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$. Alors $\mathrm{Op}(b)f - \mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a)f \in H^{\infty}$. Puisque $\mathrm{Op}(a)f \in H^{\infty}$ (d'après la question a), $\mathrm{Op}(c)\,\mathrm{Op}(a)f \in H^{\infty}$. Donc $\mathrm{Op}(b)f \in H^{\infty}$.
Ainsi, la propriété (2) est vraie pour le cône Γ'.