Processus aléatoires
ENS Paris, 2018-2019

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 10 : Chaînes de Markov
Corrigé

Mercredi 21 Novembre

1 Chaînes de Markov

Exercice 1 (Markov ou pas Markov ?)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Lesquels des processus suivants sont des chaînes de Markov sur $\mathbb{Z}$? Pour ceux qui le sont, donner la matrice de transition.

1. $A = (S_n)_{n\geq 0}$,
2. $B = (S_n + n)_{n\geq 0}$,
3. $C = \left(S_n + n^2\right)_{n\geq 0}$,
4. $D = (S_n + 10^n)_{n\geq 0}$,
5. $E = (S_n + (-1)^n)_{n\geq 0}$,
6. $F = (|S_n|)_{n\geq 0}$,
7. $G = \left(S_n^2 - n\right)_{n\geq 0}$,
8. $H = (S_{2n})_{n\geq 0}$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. Oui. La matrice de transition est $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $|x-y| = 1$ et 0 sinon.
2. Oui. La matrice de transition est $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $y = x$ ou $y = x+2$, et 0 sinon.
3. Non. Si C était une chaîne de Markov de matrice de transition Q, on aurait d'une part
$$\mathbb{P}\left(C_0 = 0, C_1 = 0\right) = Q(0,0)$$
soit $Q(0,0) = \mathbb{P}\left(S_1 = -1\right) = \frac{1}{2}$, et d'autre part
$$\mathbb{P}\left(C_0 = 0, C_1 = 0, C_2 = 0\right) = Q(0,0)^2,$$
mais $C_2 \geq -2 + 2^2 = 2$ donc $\mathbb{P}\left(C_2 = 0\right) = 0$ donc $Q(0,0)^2 = 0$ et $Q(0,0) = 0$, d'où la contradiction.
4. Oui. La matrice de transition est la suivante : pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ de même parité que n tel que $|k| \leq n$, on pose $Q(10^n + k, 10^{n+1} + k + 1) = Q(10^n + k, 10^{n+1} + k - 1) = \frac{1}{2}$, et $Q(10^n + k, y) = 0$ pour tous les autres y. Cette définition a bien un sens car chaque entier peut s'écrire d'au plus une manière comme $10^n + k$ avec $|k| \leq n$. Notons que cet argument ne marche plus pour l'exemple précédent, car par exemple 0 peut s'écrire $0^2 + 0$, mais aussi $1^2 + (-1)$.
5. Oui. La matrice de transition est la suivante : si x est pair alors $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $y = x-1$ ou $y = x-3$ et 0 sinon. Si x est impair alors $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $y = x+1$ ou $y = x+3$ et 0 sinon.
6. Oui. La matrice de transition est la suivante : on a $Q(0,1) = 1$ et $Q(0,y) = 0$ pour tout $y \neq 1$ et, pour $x \geq 1$, on a $Q(x,y) = \frac{1}{2}$ si $|y-x| = 1$ et 0 sinon.

7. Non. Si G était une chaîne de Markov de matrice de transition Q, on aurait d'une part

$$Q(0,0) = \mathbb{P}(G_1 = 0) = \mathbb{P}\left(S_1^2 = 1\right) = 1$$

et d'autre part

$$Q(0,0)^2 = \mathbb{P}(G_1 = G_2 = 0) \leq \mathbb{P}(G_2 = 0) = \mathbb{P}\left(S_2^2 = 2\right) = 0,$$

d'où la contradiction.

8. Oui. La matrice de transition est

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = y, \\ \frac{1}{4} & \text{si } |x-y| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2 (Bricoler une chaîne de Markov à partir de variables indépendantes)
Soient S un ensemble dénombrable et $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable. Soient aussi $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \to S$ une application mesurable. On définit une suite de variables $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Soient $n \geq 0$ et $(x_0, \ldots, x_n) \in S^n$. On a par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) =& \mathbb{P}(X_0 = x_0, \phi(x_0, Z_1) = x_1, \phi(x_1, Z_2) = x_2, \ldots, \phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n) \\ =& \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x_0, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_2) = x_2) \ldots \mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n) \\ =& \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x_0, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_1) = x_2) \ldots \mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_1) = x_n).\end{aligned}$$

On pose $Q(y,z) = \mathbb{P}(\phi(y, Z_1) = z)$ pour tout $(y,z) \in S^2$. On peut alors écrire

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2) \ldots Q(x_{n-1}, x_n).$$

Cela signifie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

Exercice 3 On dit qu'un graphe G est transitif si pour tous sommets u et v de G, il existe un automorphisme Φ de G tel que $\Phi(u) = v$ (autrement dit, les sommets de G jouent tous le même rôle). Soit G un graphe (fini ou infini) transitif et localement fini, et soit X une marche aléatoire simple sur G issue d'un sommet u.

1. Montrer que pour tout sommet v et tout $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X_{2k} = u) \geq \mathbb{P}(X_{2k} = v).$$

2. En déduire que $\mathbb{P}(X_{2k} = u)$ est décroissante en k.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. Notons que si le graphe est transitif, alors tous les sommets ont le même degré d. Soit Q la matrice de transition de la marche aléatoire simple sur G, i.e. $Q(x,y) = \frac{1}{d}$ si x et y sont voisins et 0 sinon. L'énoncé se réécrit :

$$Q^{2k}(u,v) \leq Q^{2k}(u,u).$$

Or, on a

$$Q^{2k}(u,v) = \sum_w Q^k(u,w)Q^k(w,v) = \sum_w Q^k(u,w)Q^k(v,w) \leq \left(\sum_w Q^k(u,w)^2\right)^{1/2} \left(\sum_w Q^k(v,w)^2\right)^{1/2},$$

en utilisant la symétrie de Q, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, comme le graphe est transitif, la famille $\left(Q^k(v,w)\right)_{w\in G}$ est une permutation de la famille $\left(Q^k(u,w)\right)_{w\in G}$. En effet, si Φ

est un automorphisme de G qui envoie u sur v, on a $Q^k(u,w) = Q^k(v, \Phi(w))$ pour tout sommet w. On a donc $\sum_w Q^k(v,w)^2 = \sum_w Q^k(u,w)^2$, d'où

$$Q^{2k}(u,v) \leq \sum_w Q^k(u,w)^2 = \sum_w Q^k(u,w)Q^k(w,u) = Q^{2k}(u,u),$$

en réutilisant à la fin la symétrie de Q. Notons que même si G est infini, X_k et X_{2k} ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, donc toutes les sommes manipulées sont en fait finies, donc il n'y a pas de problème de convergence.

2. Soit $k \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} Q^{2k+2}(u,u) &= \sum_v Q^{2k}(u,v)Q^2(v,u) \\ &\leq Q^{2k}(u,u)\sum_v Q^2(v,u) \\ &= Q^{2k}(u,u)\sum_v Q^2(u,v) \\ &= Q^{2k}(u,u) \end{aligned}$$

en utilisant successivement la question précédente, et la symétrie de Q. Cela conclut.

Remarque La première question est fausse sans l'hypothèse de transitivité (prendre par exemple un graphe avec un sommet de très gros degré), et en remplaçant $2k$ par un entier impair (prendre un grand cycle de longueur impaire).

2 Propriété de Markov forte

Exercice 4 Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0. Pour tout $i \geq 0$, on pose $T_i = \min\{n \geq 0 | S_n = i\}$ (on rappelle que tous les T_i sont finis p.s. par récurrence de S).

1. Montrer que les variables $T_{i+1} - T_i$ sont i.i.d.
2. On suppose maintenant que S est une marche biaisée négativement, i.e. les $S_{n+1} - S_n$ sont i.i.d. et

$$\mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = +1) > \frac{1}{2}.$$

Montrer sans calcul que $M = \max\{S_n | n \geq 0\}$ est une variable géométrique.

3. On se replace dans le cas non biaisé. Déduire de la question 1 que $\mathbb{E}[T_1] = +\infty$

Solution de l'exercice 4

1. On propose deux manières de rédiger le résultat : une manière formelle en utilisant la formule vue en cours, et une autre plus intuitive.

Preuve formelle :
Soit $i \geq 0$. On rappelle la formule donnant la propriété de Markov forte pour le temps d'arrêt T_i : pour toute variable $\mathcal{F}_{T_i}$-mesurable F et toute variable G qui est une fonction mesurable de S, on a

$$\mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{T_i<+\infty} F \times G \circ \theta_{T_i}\right] = \mathbb{E}_0\left[\mathbb{1}_{T_i<+\infty} F \mathbb{E}_{S_{T_i}}[G]\right].$$

Notons que dans notre cas, on a $T_i < +\infty$ p.s. (déjà vu précédemment) et $S_{T_i} = i$ par définition de i, donc la formule s'écrit

$$\mathbb{E}_0\left[F \times G \circ \theta_{T_i}\right] = \mathbb{E}_0\left[F \mathbb{E}_i[G]\right].$$

On prend $G = \mathbb{1}_{T_{i+1}=t_{i+1}}$, avec $t_{i+1} \in \mathbb{N}$. On a alors

$$G \circ \theta_{T_i} = \min\{t \geq 0 | S_{T_i+t} = i+1\} = T_{i+1} - T_i,$$

donc dans ce cas la formule s'écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0\left[F\mathbb{1}_{T_{i+1}-T_i=t_{i+1}}\right] &= \mathbb{E}_0\left[F\mathbb{P}_i(T_{i+1}=t_{i+1})\right]\\ &= \mathbb{E}_0\left[F\mathbb{P}_0(T_1=t_{i+1})\right]\\ &= \mathbb{P}_0(T_1=t_{i+1})\mathbb{E}_0[F]\end{aligned}$$

en utilisant le fait qu'une marche aléatoire simple issue de i a la même loi qu'une marche issue de 0 à laquelle on a ajouté i, donc T_{i+1} en partant de i a la même loi que T_1 en partant de 0. Cela est vrai pour toute variable $\mathcal{F}_{T_i}$-mesurable F. En particulier, en prenant

$$F = \mathbb{1}_{T_1=t_1,T_2-T_1=t_2,\ldots,T_i-T_{i-1}=t_i},$$

on obtient

$$\mathbb{P}\left(T_1=t_1,T_2-T_1=t_2,\ldots,T_{i+1}-T_i=t_{i+1}\right)=\mathbb{P}\left(T_1=t_{i+1}\right)\mathbb{P}\left(T_1=t_1,T_2-T_1=t_2,\ldots,T_i-T_{i-1}=t_i\right).$$

Par une récurrence immédiate sur i, on obtient donc

$$\mathbb{P}\left(T_1=t_1,T_2-T_1=t_2,\ldots,T_i-T_{i-1}=t_i\right)=\prod_{j=1}^{i}\mathbb{P}\left(T_1=t_i\right),$$

donc les variables $T_{i+1}-T_i$ sont bien des copies i.i.d. de T_1.

Preuve intuitive :

Soit $i \geq 0$. Par la propriété de Markov forte, conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$, le processus $(S_{T_i+n})_{n\geq 0}$ a la loi d'une marche simple issue de i, donc $\widetilde{S}=(S_{T_i+n}-i)_{n\geq 0}$ est une marche simple sur $\mathbb{Z}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$. De plus, on a

$$T_{i+1}-T_i=\min\{n\geq 0|\widetilde{S}_n=1\},$$

donc conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$, la variable $T_{i+1}-T_i$ a la même loi que T_1. Comme cette loi est toujours la même, la variable $T_{i+1}-T_i$ est indépendante de $\mathcal{F}_{T_i}$. Or, les variables $T_1, T_2-T_1,\ldots,T_i-T_{i-1}$ sont $\mathcal{F}_{T_i}$-mesurables, donc $T_{i+1}-T_i$ a la loi de T_1 et est indépendante de $(T_{j+1}-T_j)_{0\leq j\leq i-1}$, d'où le résultat.

2. Le raisonnement est similaire. Soit $i \geq 0$. Conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_i}$, si $T_i < +\infty$, le processus $\widetilde{S}=(S_{T_i+n}-i)_{n\geq 0}$ est une marche simple sur $\mathbb{Z}$ par la propriété de Markov forte, donc

$$\mathbb{P}\left(T_{i+1}<+\infty|T_i<+\infty\right)=\mathbb{P}\left(\exists n\geq 0,\widetilde{S}_n=+1\right)=\mathbb{P}\left(T_1<+\infty\right).$$

   Par récurrence, on en déduit $\mathbb{P}\left(T_i<+\infty\right)=\mathbb{P}\left(T_1<+\infty\right)^i$ pour tout $i\geq 0$, d'où le résultat car $T_i<+\infty$ équivaut à $M\geq i$.
   On pourrait aussi rédiger une preuve formelle dans le même esprit que celle de la question précédente, en prenant $G=\mathbb{1}_{T_{i+1}<+\infty}$. La seule différence est que les temps d'arrêt auxquels on applique Markov forte ne sont pas finis p.s., donc on doit garder l'indicatrice jusqu'au bout dans la formule.
3. On utilise la loi forte des grands nombres. Si on avait $\mathbb{E}[T_1]<+\infty$, comme T_i peut s'écrire comme la somme de i copies i.i.d. de T_1, on aurait $\frac{T_i}{i}\to\mathbb{E}[T_1]$ p.s. quand $i\to+\infty$. On aurait donc $\frac{S_{T_i}}{T_i}\to\frac{1}{\mathbb{E}[T_1]}>0$ quand $i\to+\infty$, ce qui contredit la formule $\frac{S_n}{n}\to 0$ donnée par la loi forte des grands nombres.

Remarque Le résultat de la deuxième question a déjà été obtenu (avec le paramètre de la loi géométrique) en utilisant le théorème d'arrêt dans l'exercice 9 du TD6.

Remarque Le résultat de la dernière question peut sembler faible, par exemple car on sait déjà obtenir la loi exacte de T_1 en utilisant le principe de réflexion. Cependant, l'approche utilisée est beaucoup plus robuste, et fonctionne encore en remplaçant (S_n) par n'importe quelle somme de variables i.i.d. d'espérance nulle.

Exercice 5 (La fourmi et la montre)
Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. La fourmi s'arrête quand elle a visité tous les chiffres de la montre. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Solution de l'exercice 5 Notons d'abord que C existe bien p.s. car la fourmi finit forcément par faire 12 pas consécutifs vers la gauche (argument déjà vu en TD, par exemple exercice 6 du TD6), donc par visiter tous les chiffres de la montre. Pour tout $i \in \mathbb{Z}\backslash 12\mathbb{Z}$, on note T_i le premier temps auquel la fourmi découvre i. Pour tout $i \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C = i) &= \mathbb{P}(T_i > T_{i-1}, T_i > T_{i+1}) \\
&= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1} < T_i) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1} < T_i) \\
&= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1})\,\mathbb{P}(T_{i+1} < T_i | T_{i-1} < T_{i+1}) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1})\,\mathbb{P}(T_{i-1} < T_i | T_{i+1} < T_{i-1}).
\end{aligned}$$

Mais d'après la propriété de Markov forte, conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$, la marche de la fourmi après T_{i-1} a la même loi qu'une marche aléatoire démarrée de $i-1$, donc $\mathbb{P}(T_{i+1} < T_i | T_{i-1} < T_{i+1})$ est égale à la probabilité qu'une marche démarrée en $i-1$ atteigne $i+1$ avant i. Par invariance par rotation, cette probabilité ne dépend pas de i, donc vaut $\mathbb{P}(T_2 < T_1)$. De même, on a

$$\mathbb{P}(T_{i-1} < T_i | T_{i+1} < T_{i-1}) = \mathbb{P}(T_{10} < T_{11}) = \mathbb{P}(T_2 < T_1),$$

où la dernière égalité s'obtient par symétrie. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C = i) &= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1})\,\mathbb{P}(T_2 < T_1) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1})\,\mathbb{P}(T_2 < T_1) \\
&= \mathbb{P}(T_2 < T_1).
\end{aligned}$$

Comme cela ne dépend pas de i, on en déduit que C est bien uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Remarque On peut déduire de la fin de la preuve que $\mathbb{P}(T_2 < T_1) = \frac{1}{11}$, c'est-à-dire que pour la marche simple sur $\mathbb{Z}$ on a $\mathbb{P}(T_{-10} < T_1) = \frac{1}{11}$, résultat qu'on avait déjà obtenu par le théorème d'arrêt.

Exercice 6 (Un petit résultat technique utile)
Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. à valeurs entières. Pour tout $n \geq 0$, soient $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \max\{|S_k| | 0 \leq k \leq n\}$. On se fixe $n \geq 0$, et $\varepsilon, A > 0$ tels que pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(|S_k| \geq A) \leq \varepsilon.$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(|S_n^*| \geq 2|A|) \leq 2\varepsilon.$$

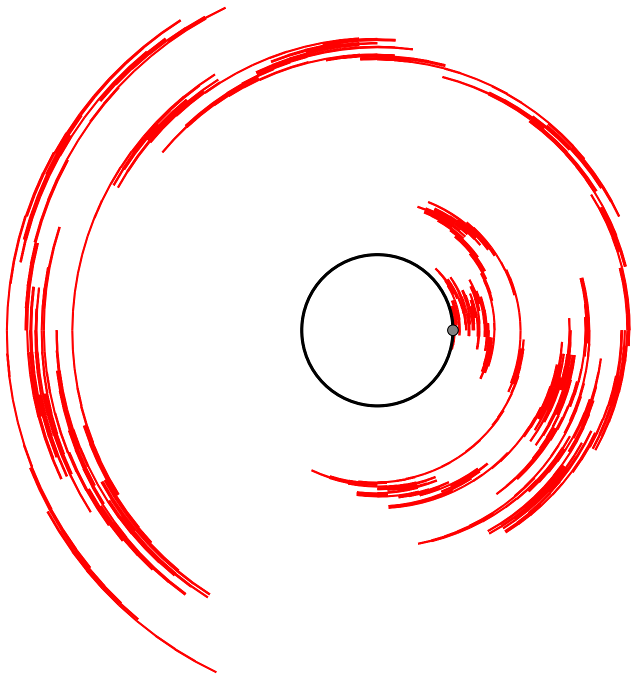
Solution de l'exercice 6 Commençons par remarquer que S est une chaîne de Markov. Si on note $p_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$, sa matrice de transition est $Q(x,y) = p_{y-x}$.

Soit $\tau = \min\{k \geq 0 | |S_k| \geq 2A\}$. On applique la propriété de Markov forte au temps d'arrêt τ. La propriété de Markov forte nous dit que conditionnellement à $\mathcal{F}_\tau$, le processus $(S_{\tau+k})_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov issue de S_τ, de matrice de transition Q. Soit $\widetilde{S}$ le processus $(S_{\tau+k} - S_\tau)_{k\geq 0}$. La loi de $\widetilde{S}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_\tau$ est donc celle d'une chaîne de Markov issue de 0 et de matrice de transition Q. En particulier, cette loi ne dépend pas de $\mathcal{F}_\tau$, donc $\widetilde{S}$ est une copie de S, indépendante de $\mathcal{F}_\tau$.

L'idée de la preuve est maintenant la suivante : si $\tau \leq n$, alors soit $|S_n| \geq A$, ce qui arrive avec proba au plus ε, soit $|S_n| \leq A$, mais alors $|S_n - S_\tau| \geq A$, soit $|\widetilde{S}_{n-\tau}| \geq A$, ce qui arrive aussi avec proba au plus ε.

Plus précisément, si $\tau = k \leq n$, alors

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \leq A | \mathcal{F}_\tau\right) \leq \mathbb{P}\left(|\widetilde{S}_{n-\tau}| \geq A | \mathcal{F}_\tau\right) = \mathbb{P}\left(|\widetilde{S}_{n-k}| \geq A | \mathcal{F}_\tau\right) \leq \varepsilon,$$



en utilisant notre hypothèse sur A et ε et le fait que la loi de $\widetilde{S}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_\tau$ est celle de S. On en déduit, en utilisant la définition de l'espérance conditionnelle sur $\mathcal{F}_\tau$:

$$\mathbb{P}\left(\tau \leq n, |S_n| \leq A\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tau \leq n} \mathbb{P}\left(|S_n| \leq A \middle| \mathcal{F}_\tau\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tau \leq n} \varepsilon\right] \leq \varepsilon.$$

On a donc finalement :

$$\mathbb{P}\left(\tau \leq n\right) \leq \mathbb{P}\left(|S_n| \geq A\right) + \mathbb{P}\left(\tau \leq n, |S_n| \leq A\right) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

en utilisant l'hypothèse de départ pour $k = n$.

Exercice 7 Que représente cette la jolie image ci-dessous ?

Solution de l'exercice 7 Il s'agit d'une illustration de l'exercice 5. On a représenté la trajectoire de la fourmi, en la faisant s'éloigner progressivement du centre de la montre pour rendre sa trajectoire plus visible. La fourmi s'arrête une fois qu'elle a découvert tous les chiffres. On a ici pris une montre à 100 chiffres, et la fourmi a fait 3631 pas.