TD 11 – Indépendance, convergence de variables aléatoires

1 – Petites questions

Soit Z, Y, X des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ convergeant en probabilité vers X.

1. Trouver un exemple où X est indépendante de Y, de Z mais pas de (Y, Z).
2. Supposons que X et Y sont indépendantes. Soit $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Montrer que $\mathbb{E}[F(X,Y)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, où $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est la fonction définie par $g(y) = \mathbb{E}[F(X,y)]$ pour $y \in \mathbb{R}$.
3. Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est uniformément continue. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.
4. Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.
5. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|X_n| \le C$ pour tout $n \ge 1$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans L^1.

Corrigé.

1. On prend X et Y indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2 et $Z := \mathbb{1}_{X=Y}$. Alors on a
$$\mathbb{P}(Z=1, X=1) = \mathbb{P}(Y=1, X=1) = \mathbb{P}(Y=1)\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Z=1)\mathbb{P}(X=1),$$
donc X et Z sont indépendantes (ce sont des indicatrices donc ce calcul suffit !). Mais on a
$$\mathbb{P}((Y,Z)=(1,1), X=1) = \mathbb{P}((Y,Z)=(1,1)) \ne \mathbb{P}((Y,Z)=(1,1))\mathbb{P}(X=1),$$
car $(Y,Z) = (1,1) \Rightarrow X = 1$.
2. On écrit :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}\times R} F(x,y) P_{(X,Y)}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}\times R} F(x,y) P_X(\mathrm{d}x)\otimes P_Y(\mathrm{d}y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} P_Y(\mathrm{d}y)\left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)P_X(\mathrm{d}x)\right) = \int_{\mathbb{R}} P_Y(\mathrm{d}y) g(y) = \mathbb{E}[g(Y)].\end{aligned}$$
3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $|x-y| \le \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \varepsilon$. On en déduit que
$$\mathbb{P}(|f(X_n)-f(X)| > \varepsilon) \le \mathbb{P}(|X_n - X| > \eta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
en utilisant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

4. On veut se ramener sur un compact, sur lequel f sera uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0, \delta > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(X \notin [-n,n]) \leq \delta$. Par uniforme continuité de f sur $[-n-1,n+1]$, il existe $\eta \in]0,1[$ tel que pour tout $x,y \in [-n-1,n+1]$, on ait $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Alors on a

$$\mathbb{P}(|f(X_n)-f(X)| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|f(X_n)-f(X)| > \varepsilon, X \in [-n,n]) + \delta \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \eta) + \delta,$$

car pour $x \in [-n,n]$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x-y| \leq \eta$, on a $y \in [-n-1,n+1]$ et donc $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ par définition de *eta*. Ainsi, en utilisant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|f(X_n)-f(X)| > \varepsilon) \leq 0 + \delta,$$

puis on conclut en faisant tendre $\delta \to 0$.

5. Montrons tout d'abord que $|X| \leq C$ p.s. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\left(|X| > C + \frac{1}{k}\right) \leq \mathbb{P}\left(|X - X_n| > \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p.s. $|X| \leq C + \frac{1}{k}$ et ainsi p.s., pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|X| \leq C + \frac{1}{k}$, c'est-à-dire $|X| \leq C$ p.s.
Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}\left[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}\right] \leq 2C\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) + \varepsilon$$

et donc, par hypothèse de convergence en probabilité,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] \leq 0 + \varepsilon,$$

puis on conclut en faisant tendre $\varepsilon \to 0$.

2 – Indépendance

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On suppose que N est indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On pose

$$P := \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad F := N - P = \sum_{i=1}^{N} (1 - X_i),$$

avec $P = F = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

1. Déterminer la loi du couple (P,N).
2. En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

Corrigé.

1. On a $\mathbb{P}(P = 0, N = 0) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-\lambda}$, et pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(P = k, N = n) = \mathbb{P}\left(N = n, \sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}.$$

2. On a pour $k, l \geq 0$,

$$\mathbb{P}(P = k, F = l) = \mathbb{P}(P = k, N = k + l) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}\right).$$

Donc les variables aléatoires P et F sont indépendantes et de lois respectives les lois de Poisson de paramètres λp et $\lambda(1-p)$.

Remarque. On utilise en fait ici le petit résultat suivant. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans des espaces dénombrables I et J telles que pour tous $i \in I$ et $j \in J$, on ait $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_i q_j$. Alors X et Y sont indépendantes et on a, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = i) = p_i/c$ où $c := \sum_{i \in I} p_i$ et, pour tout $j \in J$, $\mathbb{P}(Y = j) = c q_j$.

Montrons ce résultat. Soit $j \in J$, on a

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i \in I} p_i q_j = q_j c.$$

Comme $\sum_{j \in J} \mathbb{P}(Y = j) = 1$, on en déduit que $\sum_{j \in J} q_j = 1/c$ Puis de la même manière, on a, pour $i \in I$

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_i \sum_{j \in J} q_j = p_i/c.$$

Alors, l'hypothèse se réécrit $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$ pour tous $i \in I$ et $j \in J$, ce qui montre l'indépendance entre X et Y (car on est sur un espace dénombrable donc leq $P_{(X,Y)}(\{(i,j)\})$ caractérisent $P_{(X,Y)}$).

Exercice 2. Soit $p \geq 1$. On considère sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, p\}$.

1. Trouver la loi de $M_n := \max_{1 \leq k \leq n} U_k$.
2. Montrer la convergence suivante

$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \xrightarrow[p \to \infty]{} \frac{n}{n+1}.$$

Corrigé.

1. Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, on a,

$$\mathbb{P}(M_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k, \ldots, U_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k) \cdots \mathbb{P}(U_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k)^n = \left(\frac{k}{p}\right)^n.$$

On en déduit la loi de M_n :

$$\mathbb{P}(M_n = k) = \mathbb{P}(M_n \leq k) - \mathbb{P}(M_n \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{p^n}.$$

2. On a

$$\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(M_n \geq k),$$

et donc

$$\frac{E[M_n]}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \left(1 - \left(\frac{k-1}{p}\right)^n\right) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(1 - \left(\frac{k}{p}\right)^n\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto 1 - x^n$, dont l'intégrale entre 0 et 1 vaut $n/(n+1)$. D'où le résultat.

3 – Convergence de variables aléatoires

Exercice 3. (*Problème du collectionneur*) Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit

$$T_n := \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n := \inf\{m \geq 1 : |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.
2. Calculer l'espérance de T_n et en déterminer un équivalent quand $n \to \infty$.
3. Calculer la variance de T_n et montrer que $\mathrm{Var}(T_n) = O\big(n^2\big)$ quand $n \to \infty$.
4. En déduire un résultat de convergence pour T_n après renormalisation par une suite déterministe à déterminer.

Corrigé.

1. On a $\tau_1^n = 1$. Soit $(t_2, \ldots, t_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$. On veut calculer $\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \ldots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n)$. En posant $t_1 = 1$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \ldots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \Big\{ X_{t_1+\cdots+t_k} = \sigma(k), \forall i \in [\![1, t_{k+1} - 1]\!], X_{t_1+\cdots+t_k+i} \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\} \Big\} \cap \{X_{t_1+\cdots+t_n} = \sigma(n)\} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{1}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1} = \frac{n!}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1} = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{n+1-k}{n} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right)^{t_k - 1}.
\end{aligned}$$

   Donc les variables aléatoires $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et ont respectivement pour loi

$$\sum_{i \geq 1} \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \left(\frac{k-1}{n} \right)^{i-1} \delta_i,$$

   ce qui est une loi géométrique de paramètre $1 - (k-1)/n$. Ici on a utilisé un résultat analogue à celui énoncé dans la remarque à l'exercice 1 mais avec $n-1$ variables aléatoires au lieu de 2 (on peut l'obtenir pour un nombre quelconque de v.a. à partir du cas de 2 v.a. en procédant par récurrence : pour traiter le cas de $n+1$ v.a., on peut considérer le n-uplet des n premières v.a. comme une seule v.a.).

2. On a $T_n = \tau_1 + \sum_{k=2}^{n} (\tau_k - \tau_{k-1})$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_n] &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}[\tau_k - \tau_{k-1}] = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n+1-k}{n} \sum_{i \geq 1} i \left(\frac{k-1}{n} \right)^{i-1} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n+1-k}{n} \left(1 - \frac{k-1}{n} \right)^{-2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{n+1-k} = 1 + nH_{n-1},
\end{aligned}$$

   en utilisant $\sum_{i \geq 1} i x^{i-1} = 1/(1-x)^2$ et où H_n est la série harmonique. On a donc l'équivalent

$$\mathbb{E}[T_n] \sim n \log n,$$

   quand $n \to \infty$.

3. On a
$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathrm{Var}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}\left[(\tau_k - \tau_{k-1})^2\right] - \mathbb{E}[\tau_k - \tau_{k-1}]^2$$
Calculons donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(\tau_k - \tau_{k-1})^2\right] &= \frac{n+1-k}{n} \sum_{i\geq 1} i^2 \left(\frac{k-1}{n}\right)^{i-1} = \frac{n+1-k}{n}\left(1 + \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-3} \\ &= \frac{n+k-1}{n}\left(\frac{n}{n+1-k}\right)^2 = n\frac{n+k-1}{(n+1-k)^2}.\end{aligned}$$
en utilisant $\sum_{i\geq 1} i^2 x^{i-1} = (1+x)/(1-x)^3$. On obtient ainsi, en réutilisant le calcul du moment d'ordre 1,
$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=2}^{n} n\left(\frac{n+k-1}{(n+1-k)^2} - \frac{n}{(n+1-k)^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} n\frac{k-1}{(n+1-k)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} n\frac{n-i}{i^2} = n^2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right).$$
On a donc l'équivalent
$$\mathbb{E}[T_n] \sim n^2\frac{\pi^2}{6},$$
quand $n \to \infty$.
4. Il faut noter ici que $\mathrm{Var}(T_n) = o(\mathbb{E}[T_n]^2)$ donc T_n est très concentré autour de sa moyenne et va en être équivalent. Plus précisément, cela nous amène à considérer la convergence dans L^2 suivante :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\frac{T_n}{n\log n} - 1\right)^2\right]^{1/2} &\leq \mathbb{E}\left[\left(\frac{T_n}{n\log n} - \mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n\log n}\right]\right)^2\right]^{1/2} + \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n\log n}\right] - 1\right)^2\right]^{1/2} \\ &= \frac{\mathrm{Var}(T_n)^{1/2}}{n\log n} + \left|\mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n\log n}\right] - 1\right| \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$
en utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme L^2 puis les questions 2. et 3. Cela montre que
$$\frac{T_n}{n\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \quad \text{dans } L^2.$$
Il en découle que la convergence a aussi lieu en probabilité. La convergence en probabilité peut également être démontrée directement en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \geq \varepsilon n\log n) \leq \frac{\mathrm{Var}(T_n)}{(\varepsilon n\log n)^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2\log(n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
donc $(T_n - \mathbb{E}[T_n])/(n\log(n)) \to 0$ en probabilité. Or $\mathbb{E}(T_n) \sim n\log(n)$ quand $n \to \infty$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\{|T_n - n\log(n)| \geq 2\varepsilon n\log(n)\} \subset \{|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon n\log(n)\}$ pour n assez grand, ce qui montre la convergence en probabilité.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûr" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace (pour des variables aléatoires à valeur dans un espace métrique (E,d)).

Corrigé. On énumère $\Omega = \{\omega_i\}_{i\geq 1}$. Soit X et (X_n) des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que
$$X_n \xrightarrow{(P)} X.$$

Pour montrer que X_n converge p.s. vers X, il suffit de montrer que pour tout $k > 1$

$$\mathbb{P}(\{\omega, \limsup_{n\to\infty} d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq 1/k\}) = 0.$$

Soit $\omega_i \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$. D'après la convergence en probabilité de X_n vers X, on a

$$\mathbb{P}(\{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq 1/k\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $\omega_i \notin \{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}$. On en déduit que pour tout ω_i de probabilité strictement positive, $\limsup d(X_n(\omega_i), X(\omega_i)) \leq 1/k$. La dénombrabilité de Ω permet de conclure.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{P}$. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

Corrigé. *Méthode 1.* On peut utiliser le résultat montré à l'exercice 2 du TD 7 (quantification de l'absolue continuité) : comme $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ est finie, on a

$$\forall \delta > 0, \exists \eta > 0 : \forall A \in \mathcal{A}, (\mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \mathbb{Q}(A) \leq \delta).$$

Soit $\varepsilon, \delta > 0$. On considère $\eta > 0$ fourni par la quantification de l'absolue continuité. À partir d'un certain rang, on a $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \eta$ donc on a $\mathbb{Q}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \delta$, ce qui montre que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.
Méthode 2. D'après Radon-Nikodym on peut trouver une fonction f mesurable positive qui vérifie

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{Q}(A) = \int f \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mathbb{P},$$

et de plus $\int f \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 1 < \infty$, donc f est intégrable. Soit $\varepsilon > 0$, on note $A_n = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Pour tout $M > 0$, on a

$$\mathbb{Q}(A_n) = \int f \mathbb{1}_{A_n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int f \mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_{f\leq M} \,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int f \mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_{f>M} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq M\mathbb{P}(A_n) + \int f \mathbb{1}_{f>M} \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

On obtient donc, en utilisant que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{P}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{Q}(A_n) \leq \int f \mathbb{1}_{f>M} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0,$$

par convergence dominée (domination par f). Cela montre que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes (centrées réduites) indépendantes. Montrer que les variables aléatoires $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ sont indépendantes.

Corrigé. Soient $F, G \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions boréliennes. En remarquant que $(x,y) \mapsto (\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}})$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de jacobien -1, la formule du changement de variable donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x)G(y)\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} F(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} G(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \,\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ soient indépendantes, et sont toutes les deux gaussiennes centrées réduites.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[f(X_1)],$$

où l'on adopte la convention qu'une somme vide est nulle.

Corrigé. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right] = \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N=n\}}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right] = \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right]\\ &= \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(N=n)n\mathbb{E}[f(X_1)] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[f(X_1)].\end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

1. Si deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sont indépendantes et ont un élément commun A, montrer que $\mathbb{P}(A)=0$ ou $\mathbb{P}(A)=1$.
2. Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que si $C\in\mathcal{C}$, alors $\mathbb{P}(C)=0$ ou $\mathbb{P}(C)=1$. Montrer que si X est $\mathcal{C}$ mesurable, alors X est constante presque sûrement.
   Indication. On pourra introduire la fonction de répartition F de X définie par $F: x\mapsto \mathbb{P}(X\leq x)$ et considérer $x_0 := \inf\{x\in\mathbb{R} : F(x)=1\}$.
3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne. On suppose que $f(X)$ et X sont indépendantes. Montrer que $f(X)$ est constante presque sûrement.

Corrigé.

1. On a $\mathbb{P}(A\cap A)=\mathbb{P}(A)^2=\mathbb{P}(A)$. D'où $\mathbb{P}(A)=0$ ou $\mathbb{P}(A)=1$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\{X\leq x\}\in\mathcal{C}$ et donc $F(x)=\mathbb{P}(X\leq x)=0$ ou 1. Comme $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$ et $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$, on a $x_0:=\inf\{x\in\mathbb{R}; F(x)=1\}\in(-\infty,\infty)$. Comme F est croissante, si $a<x_0<b$, on a $F(a)=0$ et $F(b)=1$. En particulier, $\mathbb{P}(x_0-1/n<X\leq x_0+1/n)=1$ pour $n\geq 1$. Or :

   $$\{x_0\}=\bigcap_{n\geq 1}\left]x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right].$$

   Cette intersection étant décroissante et $\mathbb{P}$ étant finie, on a donc

   $$\mathbb{P}(X=x_0)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left]x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right]\right)=1.$$

   Ainsi, $X=x_0$ p.s.
3. Posons $Y=f(X)$ et notons $\mathcal{C}=\sigma(Y)$. Par hypothèse, les tribus engendrées par Y et X sont indépendantes. Or si $C\in\mathcal{C}$, alors $C\in\sigma(X)$ car f est mesurable. Ainsi, pour tout $C\in\mathcal{C}$, C est indépendant de lui-même, et donc $\mathbb{P}(C)=0$ ou $\mathbb{P}(C)=1$. Le résultat en découle d'après la deuxième question.

Exercice 9.

1. Mathias a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
2. Mathilde a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

Corrigé. Une famille de deux enfants peut se représenter par (a_1, a_2) où a_i est f (fille) ou g (garçon) suivant que le i-ième enfant est une fille ou un garçon. Tous les couples (a_1, a_2) sont équiprobables. Posons donc $\Omega = \{(f,g),(f,f),(g,g),(g,f)\}$ muni de $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

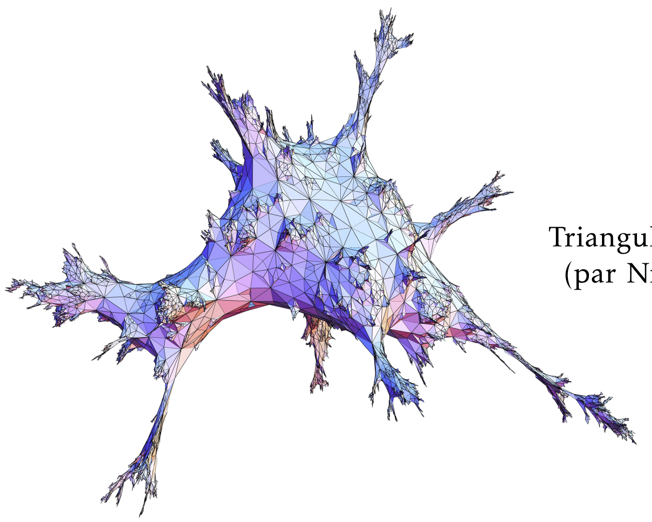
1. On sait qu'un enfant est une fille on cherche donc $\mathbb{P}(E|A)$ avec $E = \{(f,g),(g,f),(g,g)\}$ et $A = \{(f,g),(f,f),(g,f)\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(E|A) = 2/3$.
2. On cherche désormais $P(F|B)$ où $F = \{(g,g),(g,f)\}$ et $B = \{(f,f),(g,f)\}$. On trouve alors $\mathbb{P}(F|B) = 1/2$.

Exercice 10. (*Convolution de mesures finies sur* $\mathbb{R}^n$) Soit μ, ν des mesures finies sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. La *convolution* de μ et de ν, notée $\mu * \nu$, est la mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ définie par : pour toute fonction mesurable positive F sur $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \,\mathrm{d}(\mu * \nu) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(x+y) \,\mathrm{d}\nu(y) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

1. Montrer que $\mu * \nu$ est bien définie et que c'est une mesure finie, dont on explicitera la masse totale.
2. Soit μ, ν, ρ trois mesures finies sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Montrer les points suivants
   (a) $\mu * \delta_0 = \mu$;
   (b) $\mu * \nu = \nu * \mu$;
   (c) $(\mu * \nu) * \rho = \mu * (\nu * \rho)$.
3. (*Convolution et indépendance*) Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indépendantes.
   (a) Montrer que la loi de $X + Y$ est $P_X * P_Y$.
   (b) Supposons que X a une densité p_X et Y a une densité p_Y. Montrer que $X + Y$ a pour densité $p_X * p_Y$ (au sens de la convolution de deux fonctions L^1).

Corrigé. Je rédigerai un corrigé prochainement, si vous avez un problème sur cet exercice vous pouvez m'envoyer un mail (mais normalement, il n'y a rien de compliqué).



Triangulation aléatoire
(par Nicolas Curien)

Fin