TD 11 – Indépendance, convergence de variables aléatoires

1 – Petites questions

Soit Z, Y, X des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ convergeant en probabilité vers X.

1. Trouver un exemple où X est indépendante de Y, de Z mais pas de (Y, Z).
2. Supposons que X et Y sont indépendantes. Soit $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Montrer que $\mathbb{E}[F(X,Y)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $g(y) = \mathbb{E}[F(X,y)]$ pour $y \in \mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.
5. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|X_n| \le C$ pour tout $n \ge 1$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans L^1.

2 – Indépendance

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On suppose que N est indépendante de $(X_n)_{n\ge 1}$. On pose

$$P := \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad F := N - P = \sum_{i=1}^{N} (1 - X_i),$$

avec $P = F = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

1. Déterminer la loi du couple (P, N).
2. En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

Exercice 2. Soit $p \ge 1$. On considère sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires $U_1, \dots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, p\}$.

1. Trouver la loi de $M_n := \max_{1\le k\le n} U_k$.
2. Montrer la convergence suivante

$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \frac{n}{n+1}.$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3 – Convergence de variables aléatoires

Exercice 3. (*Problème du collectionneur*) Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit

$$T_n := \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n := \inf\{m \geq 1 : |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.
2. Calculer l'espérance de T_n et en déterminer un équivalent quand $n \to \infty$.
3. Calculer la variance de T_n et montrer que $\mathrm{Var}(T_n) = O(n^2)$ quand $n \to \infty$.
4. En déduire un résultat de convergence pour T_n après renormalisation par une suite déterministe à déterminer.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûr" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace (pour des variables aléatoires à valeur dans un espace métrique (E, d)).

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{P}$. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes (centrées réduites) indépendantes. Montrer que les variables aléatoires $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ sont indépendantes.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[f(X_1)],$$

où l'on adopte la convention qu'une somme vide est nulle.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Si deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont indépendantes et ont un élément commun A, montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que si $C \in \mathcal{C}$, alors $\mathbb{P}(C) = 0$ ou $\mathbb{P}(C) = 1$. Montrer que si X est $\mathcal{C}$ mesurable, alors X est constante presque sûrement.
   Indication. On pourra introduire la fonction de répartition F de X définie par $F \colon x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ et considérer $x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On suppose que $f(X)$ et X sont indépendantes. Montrer que $f(X)$ est constante presque sûrement.

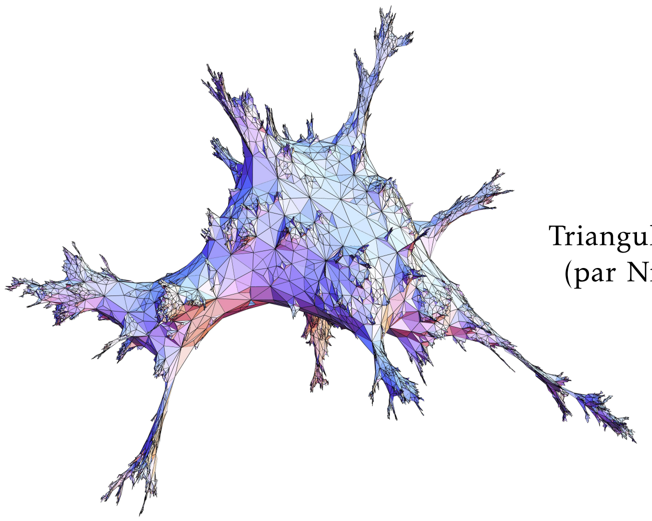
Exercice 9.

1. Mathias a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
2. Mathilde a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon ?

Exercice 10. (*Convolution de mesures finies sur* $\mathbb{R}^n$) Soit μ, ν des mesures finies sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. La *convolution* de μ et de ν, notée $\mu * \nu$, est la mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ définie par : pour toute fonction mesurable positive F sur $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F \,\mathrm{d}(\mu * \nu) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(x+y) \,\mathrm{d}\nu(y) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

1. Montrer que $\mu * \nu$ est bien définie et que c'est une mesure finie, dont on explicitera la masse totale.
2. Soit μ, ν, ρ trois mesures finies sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Montrer les points suivants
   (a) $\mu * \delta_0 = \mu$;
   (b) $\mu * \nu = \nu * \mu$;
   (c) $(\mu * \nu) * \rho = \mu * (\nu * \rho)$.
3. (*Convolution et indépendance*) Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indépendantes.
   (a) Montrer que la loi de $X + Y$ est $P_X * P_Y$.
   (b) Supposons que X a une densité p_X et Y a une densité p_Y. Montrer que $X + Y$ a pour densité $p_X * p_Y$ (au sens de la convolution de deux fonctions L^1).



Triangulation aléatoire
(par Nicolas Curien)

Fin