Géométrie Différentielle, TD 11 du 24 mai 2014

1. Cohomologie de l'espace projectif complexe

Soit $n \geqslant 1$. On considère $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe de dimension n. On souhaite montrer que les espaces de cohomologie $H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ sont de dimension 1 si k est pair et compris entre 0 et $2n$, et de dimension 0 sinon. On supposera connue la cohomologie des sphères.

1– On voit $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ plongé dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par l'application $[w_0, \ldots, w_{n-1}] \mapsto [0, w_0, \ldots, w_{n-1}]$ en coordonnées homogènes. De plus, on note x le point $x = [1, 0, \ldots, 0]$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. On note U l'ouvert $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - \{x\}$ et V l'ouvert $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Montrer que U a même type d'homotopie que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, que V est difféomorphe à $\mathbb{C}^n$ et que $U \cap V$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}^{2n-1}$.

2– Montrer que $\mathbb{P}^1$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. En déduire la dimension de ses espaces de cohomologie.

3– Pour $n \geqslant 2$, écrire une suite exacte de Mayer-Vietoris reliant les espaces $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ et $H^1(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$. Montrer que, dans cette suite exacte, la flèche $H^0(U) \times H^0(V) \to H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ est surjective. En déduire que $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ est nul pour tout n.

4– Déterminer par récurrence, et par une suite de Mayer-Vietoris, la dimension des autres espaces de cohomologie de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

2. Surfaces à g trous

Soient $g, k \geqslant 0$ des entiers. Soit T_g l'unique surface connexe compacte orientable « à g trous ». On note $T_{g,k}$ la variété obtenue en enlevant k points distincts à T_g.

1– Montrer que $\dim H^0(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 1$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$.

2– Calculer $\dim H^1(T_{0,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{0,k}, \mathbb{R})$ pour $k \geqslant 0$.

3– Calculer $\dim H^1(T_1, \mathbb{R})$.

4– Calculer $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R})$.

5– Soit $k \geqslant 2$. Calculer $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R})$, $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R})$, et montrer que si $\mathbb{S}^1 \subset T_{1,k}$ est un petit cercle tracé autour de l'un des points qu'on a enlevé, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle.

6– Calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R})$ pour $g, k \geqslant 0$.

7– En déduire que si $g \neq g'$, T_g et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Montrer que si $(g, k) \neq (g', k')$, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ne sont pas homéomorphes.

3. Manœuvre d'une voiture

On considère une voiture se déplaçant dans le plan. On note l la distance entre les roues avant et arrière. On repère la voiture par la position (x, y) des roues arrières, l'angle θ

qu'elle fait avec l'axe des abscisses et l'angle φ que font les roues avant avec l'axe de la voiture. La voiture peut avancer (et reculer), ou bien tourner ses roues avant.

1– Calculer le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent.

2– Montrer qu'on peut faire prendre à la voiture toute position choisie à l'avance.

4. Théorème de Frobenius et lemme de Poincaré

Soit M une variété différentielle et α une forme différentielle de degré 1 sur M. On veut montrer que α s'écrit localement df, avec f une fonction, si α est fermée, i.e. vérifie $d\alpha = 0$.

On considère X la variété $M \times \mathbb{R}$ et, en un point (x, t) de X, on considère $D_{(x,t)}$ le sous-espace de $T_{(x,t)}X$ des vecteurs de la forme $(\xi + \alpha_x(\xi)\partial_t)$, où $\xi \in T_xM$ et ∂_t est le champ de vecteur constant canonique sur $\mathbb{R}$.

1– Montrer que D définit un champ (ou distribution) d'hyperplans sur X.

2– Montrer que D est involutive si, et seulement si, α est fermée.

3– Montrer que si D est intégrable, alors α est localement exacte.

4– Conclure.

5. Codistributions

Soit M une variété C^∞ de dimension n. Une codistribution Γ de dimension p sur M est la donnée en tout point $x \in M$ d'un sous-espace vectoriel $\Gamma_x \subset T_xM^*$ de dimension p satisfaisant la condition suivante : pour tout $y \in M$, il existe un voisinage U de y et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \Omega^1(U)$ telles que $\Gamma_x = \langle \alpha_{1,x}, \ldots, \alpha_{p,x} \rangle$ pour tout $x \in U$.

On dit que $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartient à la codistribution Γ si $\alpha_x \in \Gamma_x$ pour tout $x \in U$.

Une codistribution Γ de dimension p est dite intégrable si, au voisinage de tout point $y \in M$, il existe une sous-variété Y de dimension $n - p$ de M telle que pour tout $x \in Y$, les éléments de Γ_x sont nuls en restriction à T_xY.

1– Montrer que les codistributions de dimension p sur M sont naturellement en bijection avec les champs de $(n - p)$-plans sur M.

2– Montrer qu'une codistribution est intégrable si et seulement si le champ de $(n - p)$-plans correspondant l'est.

3– Soient X, Y deux champs de vecteurs sur une variété M et $\alpha \in \Omega^1(M)$. Montrer que :
$$d\alpha(X, Y) = d(\alpha(Y))(X) - d(\alpha(X))(Y) - \alpha([X, Y]).$$

4– Montrer qu'une codistribution Γ est intégrable si et seulement si pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$ appartenant à Γ et tout $x \in U$, $(d\alpha)_x|_{\mathrm{Ker}(\beta_x)} = 0$.

5– Montrer qu'une codistribution Γ est intégrable si et seulement si pour tout $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartenant à Γ, $d\alpha$ s'écrit localement $\sum_i \beta_i \wedge \gamma_i$ avec β_i appartenant à Γ.