Géométrie Différentielle, TD 11 du 24 mai 2014

1. Cohomologie de l'espace projectif complexe

Soit $n \geqslant 1$. On considère $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe de dimension n. On souhaite montrer que les espaces de cohomologie $H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ sont de dimension 1 si k est pair et compris entre 0 et $2n$, et de dimension 0 sinon. On supposera connue la cohomologie des sphères.

1– On voit $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ plongé dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par l'application $[w_0, \dots, w_{n-1}] \mapsto [0, w_0, \dots, w_{n-1}]$ en coordonnées homogènes. De plus, on note x le point $x = [1, 0, \dots, 0]$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. On note U l'ouvert $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - \{x\}$ et V l'ouvert $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Montrer que U a même type d'homotopie que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, que V est difféomorphe à $\mathbb{C}^n$ et que $U \cap V$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}^{2n-1}$.

2– Montrer que $\mathbb{P}^1$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. En déduire la dimension de ses espaces de cohomologie.

3– Pour $n \geqslant 2$, écrire une suite exacte de Mayer-Vietoris reliant les espaces $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ et $H^1(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$. Montrer que, dans cette suite exacte, la flèche $H^0(U) \times H^0(V) \to H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ est surjective. En déduire que $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ est nul pour tout n.

4– Déterminer par récurrence, et par une suite de Mayer-Vietoris, la dimension des autres espaces de cohomologie de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

2. Surfaces à g trous

Soient $g, k \geqslant 0$ des entiers. Soit T_g l'unique surface connexe compacte orientable « à g trous ». On note $T_{g,k}$ la variété obtenue en enlevant k points distincts à T_g.

1– Montrer que $\dim H^0(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 1$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$.

2– Calculer $\dim H^1(T_{0,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{0,k}, \mathbb{R})$ pour $k \geqslant 0$.

3– Calculer $\dim H^1(T_1, \mathbb{R})$.

4– Calculer $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R})$.

5– Soit $k \geqslant 2$. Calculer $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R})$, $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R})$, et montrer que si $\mathbb{S}^1 \subset T_{1,k}$ est un petit cercle tracé autour de l'un des points qu'on a enlevé, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle.

6– Calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R})$ pour $g, k \geqslant 0$.

7– En déduire que si $g \neq g'$, T_g et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Montrer que si $(g, k) \neq (g', k')$, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ne sont pas homéomorphes.

Solution :

1– $\dim H^0(T_g, \mathbb{R}) = 1$ car T_g est connexe. $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ car T_g est compacte connexe orientable.

2– La variété T_0 est la sphère. Sa cohomologie a été calculée en cours : $H^1(T_0) = 0$.

Si $k \geqslant 1$, la variété $T_{0,k}$ est le plan privé de $k-1$ points. On peut appliquer Mayer-Vietoris à un recouvrement constitué de deux ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection a k composantes connexes homéomorphes à $\mathbb{R}^2$. Il vient $\dim H^1(T_{0,k}) = k-1$ et $\dim H^2(T_{0,k}) = 0$.

3– La variété T_1 est le tore. On peut trouver un recouvrement par deux ouverts U et V qui sont des cylindres dont l'intersection est la réunion de deux cylindres. Comme un cylindre se rétracte par déformation sur un cercle, il a les mêmes groupes de cohomologie que le cercle. Appliquant alors Mayer-Vietoris, et utilisant le fait que $H^2(T_1) = \mathbb{R}$, il vient : $H^1(T_1) = \mathbb{R}^2$.

4– On peut recouvrir $T_{1,1}$ par deux ouverts se rétractant par déformation sur un cercle, dont l'intersection est contractile. Mayer-Vietoris montre alors que $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R}) = 2$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R}) = 0$.

5– Si $k \geqslant 2$, on recouvre $T_{1,k-1}$ par un ouvert homéomorpheà $T_{1,k}$ et un ouvert contractile, dont l'intersection se rétracte sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Appliquant Mayer-Vietoris, on montre par récurrence sur k que $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R}) = k+1$ et $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R}) = 0$ pour $k \geqslant 1$. De plus, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ apparaît dans la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, qui montre qu'elle est surjective, donc non nulle.

6– On va montrer par récurrence sur g que $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) = 2g$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$, et que $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 2g - 1 + k$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 0$ si $k \geqslant 1$. On peut supposer $g \geqslant 2$.

On peut recouvrir $T_{g,k}$ par deux ouverts homéomorphes à $T_{1,k+1}$ et à $T_{g-1,1}$, d'intersection se rétractant sur le cercle, et considérer la suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée. Si $k = 0$, la connaissance de $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ permet de calculer $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) = 2g$. Si $k \geqslant 1$, la question précédente montre que la flèche $H^1(T_{1,k+1}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle. Ceci permet d'utiliser la suite exacte longue pour calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 2g - 1 + k$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 0$.

7– Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie, de sorte que deux variétés homéomorphes ont mêmes groupes de cohomologie. Mais, la question précédente montre que $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) \neq \dim H^1(T_{g'}, \mathbb{R})$ si $g \neq g'$: T_g et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Supposons que $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ soient homéomorphes.

La valeur de k est déterminée par l'espace topologique $T_{g,k}$: c'est son « nombre de bouts ». Plus précisément, c'est le plus petit entier tel que l'énoncé suivant soit vrai : si $K \Subset T_{g,k}$ est un compact, il existe un compact $K \Subset K' \Subset T_{g,k}$ tel que $T_{g,k} \setminus K'$ ait exactement k composantes connexes. Ainsi $k = k'$.

Comme les groupes de cohomologie sont un invariant topologique, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ont un H^1 de même dimension, et les questions précédentes montrent que $g = g'$.

3. Manœuvre d'une voiture

On considère une voiture se déplaçant dans le plan. On note l la distance entre les roues avant et arrière. On repère la voiture par la position (x, y) des roues arrières, l'angle θ qu'elle fait avec l'axe des abscisses et l'angle φ que font les roues avant avec l'axe de la voiture. La voiture peut avancer (et reculer), ou bien tourner ses roues avant.

1– Calculer le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent.

2– Montrer qu'on peut faire prendre à la voiture toute position choisie à l'avance.

Solution :

1– On travaille en coordonnées (x, y, θ, φ).

Un champ de vecteurs tangent au mouvement consistant à tourner les roues avant est $X = (0, 0, 0, 1)$.

Les équations régissant le mouvement consistant à avancer la voiture sont : $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$, $\frac{d(y+l\sin\theta)}{d(x+l\cos\theta)} = \tan(\theta + \varphi)$ et $d\varphi = 0$. Elles décrivent respectivement le mouvement des roues arrière, le mouvement des roues avant et le fait qu'on ne tourne pas le volant. On déduit qu'un champ de vecteurs tangent à ce mouvement est $Y = (l\cos\theta\cos\varphi, l\sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$.

Le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent est celui engendré par X et Y.

2– On va appliquer le théorème de Chow. Il faut montrer que les crochets itérés de X et Y engendrent $\mathbb{R}^4$ en tout point. On calcule $[X, Y] = (-l\cos\theta\sin\varphi, -l\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$. On calcule $[Y, [X, Y]] = (l\sin\theta, -l\cos\theta, 0, 0)$.

On vérifie alors que, en tout point, X, Y, $[X, Y]$ et $[Y, [X, Y]]$ engendrent l'espace tangent. On peut donc appliquer le théorème de Chow, et montrer que toute position est accessible.

4. Théorème de Frobenius et lemme de Poincaré

Soit M une variété différentielle et α une forme différentielle de degré 1 sur M. On veut montrer que α s'écrit localement df, avec f une fonction, si α est fermée, i.e. vérifie $d\alpha = 0$.

On considère X la variété $M \times \mathbb{R}$ et, en un point (x, t) de X, on considère $D_{(x,t)}$ le sous-espace de $T_{(x,t)}X$ des vecteurs de la forme $(\xi + \alpha_x(\xi)\partial_t)$, où $\xi \in T_xM$ et ∂_t est le champ de vecteur constant canonique sur $\mathbb{R}$.

1– Montrer que D définit un champ (ou distribution) d'hyperplans sur X.

2– Montrer que D est involutive si, et seulement si, α est fermée.

3– Montrer que si D est intégrable, alors α est localement exacte.

4– Conclure.

Solution :

On note n la dimension de n.

1– Clairement, $D_{(x,t)}$ est un sous-espace vectoriel de $T_{(x,t)}X$ de dimension n. Il s'agit donc de vérifier que D varie de façon lisse. Or ceci est équivalent à l'existence (locale) de champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_n$ sur X formant une base de D en tout point. Localement autour de x_0 dans M, on peut prendre n champs de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. Alors $Y_i = v_i + \alpha_x(v_i)\partial_t$ conviennent.

2– Il s'agit calculer le crochet entre deux champs de vecteurs de D. Considérons des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ sur M et notons ∂_i le champ de vecteur suivant x_i. Alors, on peut considérer comme précédemment les champs de vecteurs $Y_i = \partial_i + \alpha_x(\partial_i)\partial_t$. On calcule $[Y_i, Y_j] = (\partial_i\alpha_x(\partial_j) - \partial_j\alpha_x(\partial_i)\partial_t$ (attention dans cette expression, le même symbole ∂_i est vu comme champ de vecteurs et comme dérivation de fonction). Or D intersecte trivialement $\mathbb{R}\partial_t$ donc $[Y_i, Y_j]$ est dans D si, et seulement si, il est nul, i.e. $\partial_i\alpha_x(\partial_j) - \partial_j\alpha_x(\partial_i = 0$. On retrouve l'expression locale de $d\alpha$.

3– Si D est intégrale, soit Y une sous-variété de dimension n de X telle que, dans un voisinage de $(x, 0)$, $T_yY = D_y$, pour tout y dans Y. Comme D intersecte trivialement $\mathbb{R}\partial_t$, la projection de Y sur le facteur M est un difféomorphisme local. Notons $s : X \to Y$ un inverse local. Comme s est une section de la projection, s est de la forme $s(x) = (x, f(x))$, où $x \in M$ et $f(x)$ est une fonction lisse de M dans $\mathbb{R}$. La différentielle de s appliquée en Y vaut $Y + df(Y)\partial_t$ et vit dans D. Vue l'expression de D, on a donc $df(Y) = \alpha(Y)$ pour tout Y. Donc $\alpha = df$.

4– Par le théorème de Frobenius, D est involutive si, et seulement si, elle est intégrable. D'où le résultat.

5. Codistributions

Soit M une variété C^∞ de dimension n. Une codistribution Γ de dimension p sur M est la donnée en tout point $x \in M$ d'un sous-espace vectoriel $\Gamma_x \subset T_xM^*$ de dimension p satisfaisant la condition suivante : pour tout $y \in M$, il existe un voisinage U de y et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \Omega^1(U)$ telles que $\Gamma_x = \langle \alpha_{1,x}, \ldots, \alpha_{p,x} \rangle$ pour tout $x \in U$.

On dit que $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartient à la codistribution Γ si $\alpha_x \in \Gamma_x$ pour tout $x \in U$.

Une codistribution Γ de dimension p est dite intégrable si, au voisinage de tout point $y \in M$, il existe une sous-variété Y de dimension $n - p$ de M telle que pour tout $x \in Y$, les éléments de Γ_x sont nuls en restriction à T_xY.

1– Montrer que les codistributions de dimension p sur M sont naturellement en bijection avec les champs de $(n-p)$-plans sur M.

2– Montrer qu'une codistribution est intégrable si et seulement si le champ de $(n-p)$-plans correspondant l'est.

3– Soient X, Y deux champs de vecteurs sur une variété M et $\alpha \in \Omega^1(M)$. Montrer que :

$$d\alpha(X, Y) = d(\alpha(Y))(X) - d(\alpha(X))(Y) - \alpha([X, Y]).$$

4– Montrer qu'une codistribution Γ est intégrable si et seulement si pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$ appartenant à Γ et tout $x \in U$, $(d\alpha)_x|_{\mathrm{Ker}(\beta_x)} = 0$.

5– Montrer qu'une codistribution Γ est intégrable si et seulement si pour tout $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartenant à Γ, $d\alpha$ s'écrit localement $\sum_i \beta_i \wedge \gamma_i$ avec β_i appartenant à Γ.

Solution :

1– A une codistribution, on associe le champ de plans « dual », et réciproquement. Il faut montrer que l'un est C^∞ si et seulement si l'autre l'est. On détaille un sens, l'autre est analogue.

Supposons donné un champ de $(n-p)$-plans C^∞. On travaille localement, donc on peut se placer au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Le champ de $(n-p)$-plans est engendré par $X_1, \ldots, X_{n-p}$. Choisissons $X_{n-p+1}, \ldots, X_n$ de sorte que les $X_i(0)$ forment une base de l'espace tangent en l'origine. On définit alors des 1-formes α_i par $\alpha_i(X_j) = \delta_{i,j}$. Ces 1-formes sont bien C^∞ (il s'agit simplement de vérifier que la base duale d'une base varie de façon lisse quand les vecteurs de base varient de façon lisse). Alors, la codistribution associée au champ de $(n-p)$-plans choisi est engendrée par $\alpha_{n-p+1}, \ldots, \alpha_n$. Ceci conclut.

2– Cela résulte immédiatement des définitions.

3– On peut montrer cette identité localement, donc en coordonnées. C'est un calcul explicite.

4– Appliquons le théorème de Frobenius au champ de p-plans dual. A l'aide de l'identité montrée à la question précédente, on montre ainsi que la codistribution est intégrable si et seulement si, pour tout $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartenant à Γ, $d\alpha$ est nulle en restriction au champ de p-plans associé. Ceci est bien équivalent à la condition de l'énoncé.

5– La condition « $d\alpha$ s'écrit est nulle en restriction au champ de p-plans associé »implique la condition de la question précédente, donc l'intégrabilité de Γ.

Réciproquement, supposons que $d\alpha$ est nulle en restriction au champ de p-plans associé. On travaille localement, en coordonnées, de sorte que le champ de p-plans est engendré par p champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$. Considérons $n-p$ champs de vecteurs $X_{p+1}, \ldots, X_n$ (constants par exemple) tels que $X_1, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_n$ forment en tout point une base de l'espace tangent. C'est possible quitte à restreindre l'ouvert sur lequel on travaille.

On considère les 1-formes différentielles $\omega_1, \ldots, \omega_n$ définies par $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$. On écrit alors $d\alpha$ comme combinaison à coefficients C^∞ des formes $\omega_i \wedge \omega_j$. Comme $d\alpha$ est nulle en restriction au champ de p-plans, beaucoup des coefficients sont nuls. Les termes restants sont tous de la forme $\beta_i \wedge \gamma_i$ avec β_i appartenant à Γ. Cela conclut.