Géométrie Différentielle, TD 11 du 18 mai 2015

1. Formule du wedge

Soit E un espace vectoriel et soient α et β des formes multilinéaires alternées de degré k et l sur E. Montrer la formule

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

2. Formes différentielles sur un quotient

Soit X une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n et G un groupe de Lie agissant librement et proprement par $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes sur X. On note $p : X \to X/G$ l'application quotient.

1– Soit $k \geqslant 0$. Montrer que $p^* : \Omega^k(X/G) \to \Omega^k(X)$ est injective.

2– Dans le cas où G est discret, montrer que l'image de $p^* : \Omega^k(X/G) \to \Omega^k(X)$ est l'ensemble $\Omega^k(X)^G$ des formes G-invariantes.

3– Identifier l'image de p^* dans le cas général.

3. Formes différentielles $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$-invariantes

Soit ω la forme différentielle de degré $n-1$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

1– Calculer $\mathrm{d}\omega$.

2– Montrer que $\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$.

3– Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?

4– Montrer que ω est, à constante multiplicative près, la seule forme de degré $n-1$ invariante par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

5– Montrer en revanche que, si $n \geqslant 3$, toute forme différentielle de degré 1 invariante par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ est nulle.

4. Mesure de Haar sur $GL_n(\mathbb{R})$

Soit $U = GL_n(\mathbb{R})$ vu comme ouvert de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. On définit une forme volume ω sur U par $\omega(A) = \frac{1}{(\det A)^n}\omega_0$, où ω_0 est la forme volume standard sur $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que ω est invariante par multiplication à gauche ou à droite par des matrices, et que c'est la seule forme volume sur $GL_n(\mathbb{R})$ à avoir cette propriété (à multiplication par un scalaire près).

5. Demi-plan de Poincaré

Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive.

1– Montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}$ définit une action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$.

2– Montrer qu'à un scalaire près, $\omega = \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ est la seule forme volume invariante sur $\mathbb{H}$ par le groupe.

6. Coordonnées de Plücker

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $e_1, \dots, e_n$ une base de E^*. Pour chaque m-uplet $I = (i_1, \dots, i_m)$ avec $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n$, posons $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$. Si W est un sous-espace de E^* de dimension m et $x_1, \dots, x_m$ une base de W, la m-forme linéaire alternée $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$ s'écrit $\sum a_I e_I$ pour certains coefficients a_I.

1– Montrer que, à une constante multiplicative près, les coefficients $(a_I)_I$ ne dépendent pas du choix de la base de W et définissent une application *injective* de l'ensemble $\{W \subset E^* \mid \dim W = m\}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$, où $N = \binom{n}{m} - 1$.

Les coefficients a_I s'appellent les coordonnées de Plücker de W.

2– Montrer que les coordonnées de Plücker déterminent un plongement de la grassmanienne $\mathcal{G}_m(E^*)$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$.

3– Montrer qu'une forme bilinéaire alternée ω sur $\mathbb{R}^4$ s'écrit sous la forme $x_1 \wedge x_2$ avec x_1, x_2 deux formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^4$, si et seulement si $\omega \neq 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$.

4– En paramétrant l'image de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ par le plongement de Plücker, montrer que $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ est difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. On pourra poser $x_1 = a_{12} + a_{34}$, $x_2 = a_{23} + a_{14}$, $x_3 = a_{31} + a_{24}$, $y_1 = a_{12} - a_{34}$, $y_2 = a_{23} - a_{14}$, $y_3 = a_{31} - a_{24}$.