Géométrie Différentielle, TD 11 du 18 mai 2015

1. Formule du wedge

Soit E un espace vectoriel et soient α et β des formes multilinéaires alternées de degré k et l sur E. Montrer la formule

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Solution :

On rappelle que le wedge d'un nombre arbitraire de formes de degré 1, $l_1, \ldots, l_k$ a été défini par la formule

$$l_1 \wedge \cdots \wedge l_k(X_1, \ldots, X_k) = \det(l_i(X_j))_{i,j}.$$

Le wedge de deux formes α et β totalement décomposables de degré k et l a été défini par simple concaténation : si $\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ et $\beta = m_1 \wedge \cdots \wedge m_l$ alors,

$$\alpha \wedge \beta = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k \wedge m_1 \wedge \cdots \wedge m_l.$$

En toute rigueur, il faudrait vérifier que cette formule est indépendante des décompositions de α et β. La formule a ensuite été étendue par linéarité. Là encore, il n'est pas clair que cela ne dépend pas des choix effectués. Ce sera un corollaire de l'exercice.

Il s'agit donc de vérifier que la formule donnée est correcte si $\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ et $\beta = m_1 \wedge \cdots \wedge m_l$. Apppliqué en $(v_1, \ldots, v_{k+l})$, le terme de droite vaut :

$$= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \sum_{\rho \in S_k} \varepsilon(\rho) l_1(v_{\sigma\circ\rho(1)}) \ldots l_k(v_{\sigma\circ\rho(k)}) \sum_{\tau \in S_l} \varepsilon(\tau) m_1(v_{\sigma(k+\tau(1))}) \ldots m_l(v_{\sigma(k+\tau(l))})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sum_{(\rho,\tau) \in S_k \times S_l} \varepsilon(\sigma \circ j(\rho,\tau)) l_1(v_{\sigma\circ j(\rho,\tau)(1)}) \ldots l_k(v_{\sigma\circ j(\rho,\tau)(k)}) m_1(v_{\sigma\circ j(\rho,\tau)(k+1)}) \ldots m_l(v_{\sigma\circ j(\rho,\tau(k+l)}),$$

où $j : S_k \times S_l \to S_{k+l}$ est le morphisme de groupes injectif naturel.

On inverse les sommes, et le terme général est indépendant de (ρ, τ). De plus, on reconnait l'expression du déterminant calculant $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k \wedge m_1 \wedge \cdots \wedge m_l$. D'où la formule.

2. Formes différentielles sur un quotient

Soit X une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n et G un groupe de Lie agissant librement et proprement par $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes sur X. On note $p : X \to X/G$ l'application quotient.

1– Soit $k \geqslant 0$. Montrer que $p^* : \Omega^k(X/G) \to \Omega^k(X)$ est injective.

2– Dans le cas où G est discret, montrer que l'image de $p^* : \Omega^k(X/G) \to \Omega^k(X)$ est l'ensemble $\Omega^k(X)^G$ des formes G-invariantes.

3– Identifier l'image de p^* dans le cas général.

Solution :

1– Comme p^* est linéaire, il suffit de vérifier que son noyau est trivial, i.e. que p^* envoie une forme non nulle sur une forme non nulle.

Soit $\omega \in \Omega^k(X/G)$ non nulle. Soit $y \in X/G$ tel que ω_y soit non nul. Soit x un antécédent de y par p. Comme p est un difféomorphisme local, $d_x p$ est un isomorphisme, qui identifie donc $T_x X$ et $T_y X/G$. Via cette identification, ω_y et $(p^*\omega)_x$ coïncident, de sorte que $(p^*\omega)_x$ est non nul. On a bien $p^*\omega \neq 0$.

2– Soit $g \in G$. Comme $p \circ g = p$, $g^* p^* \omega = p^* \omega$, de sorte que $p^*\omega$ est G-invariante. Réciproquement, soit ω une forme G-invariante sur X. Soit $y \in X/G$. On choisit x un antécédent de y, et on pose $\alpha_y = ((d_x p)^{-1})^* \omega_x$. Comme ω est G-invariante, α_y ne dépend pas du choix de x.

Pour montrer que α est $\mathcal{C}^\infty$, on choisit des voisinages U et V de x et de y tels que p réalise un difféomorphisme entre U et V. Alors $\alpha|_V = ((p|_U)^{-1})^* \omega|_U$, ce qui montre que $\alpha|_V$ est $\mathcal{C}^\infty$, comme voulu.

Finalement, par construction, on a bien $\omega = p^*\alpha$.

3– Dans le cas général, la projection $p : X \to X/G$ est toujours une submersion. Remarquons qu'une forme ω dans l'image est encore G-invariante. De plus, si Y_x est dans le noyau de $d_x p$ (de façon équivalente, si Y_x est tangent à l'orbite de G passant par x), on a nécessairement $\iota_{Y_x}\omega_x = 0$. On va montrer que ces conditions nécessaires sont suffisantes. Soit donc ω une forme de degré k sur X, G-invariante et telle que $\iota_{Y_x}\omega_x = 0$ dès que Y_x appartient au noyau de $d_x p$. Soient $Z_1, \ldots, Z_k$ des vecteurs dans $T_z(X/G)$. On considère un point x tel que $p(x) = z$ et des vecteurs $Y_1, \ldots, Y_k$ tels que $d_x p(Y_i) = Z_i$ (on rappelle que p est une submersion). On définit alors

$$\alpha_z(Z_1, \ldots, Z_k) := \omega_x(Y_1, \ldots, Y_k).$$

D'autres choix pour les Y_i diffèrent des Y_i par des vecteurs dans le noyau de $d_x p$. En appliquant de proche en proche l'hypothèse faite sur ω, on en déduit que l'expression ne dépend pas des Y_i choisis. De plus, elle ne dépend pas non plus de x, comme précédemment, par G-invariance. Finalement, si s est une section locale de p, on a défini α comme $s^*\omega$. Ceci montre que α ainsi définie est lisse ; par construction, elle vérifie $p^*\alpha = \omega$.

3. Formes différentielles $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$-invariantes

Soit ω la forme différentielle de degré $n-1$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

1– Calculer $\mathrm{d}\omega$.

2– Montrer que $\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$.

3– Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?

4– Montrer que ω est, à constante multiplicative près, la seule forme de degré $n-1$ invariante par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

5– Montrer en revanche que, si $n \geqslant 3$, toute forme différentielle de degré 1 invariante par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ est nulle.

Solution :

1– Dans $\mathrm{d}\omega$, tous les termes donnent, après être réordonnés, un $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. Ainsi,

$$\mathrm{d}\omega = n\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

2– C'est le développement du déterminant par rapport à la première colonne.

3– On calcule :

$$\begin{aligned}(A^*\omega)(x).(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) &= \omega(Ax).(A\xi_1, \ldots, A\xi_{n-1}) = \det(Ax, A\xi_1, \ldots, A\xi_{n-1}) \\ &= \det(A)\det(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \det(A)\omega(x).(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\end{aligned}$$

i.e. $A^*\omega = \det(A)\omega$.

4– La question précédente montre que ω est invariante sous $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Pour montrer l'unicité, notons $x = (1, 0, \ldots, 0)$. La forme alternée ω_x détermine uniquement ω sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par homogénéité, donc sur tout $\mathbb{R}^n$ par continuité. Il reste à vérifier que ω_x est uniquement déterminée, à une constante multiplicative près. On peut pour cela l'écrire en coordonnées et écrire les conditions données par l'invariance de ω_x sous le stabilisateur de x dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. C'est un calcul explicite.

5– Une 1-forme invariante ω est uniquement déterminée par ω_{e_1} où e_1 est le premier vecteur de coordonnées. En effet, par invariance, ω_{e_1} détermine uniquement $\omega|_{\mathbb{R}^n \setminus 0}$, donc, par continuité, ω toute entière. Il suffit donc de vérifier que $\omega_{e_1} = 0$.

Or ω_{e_1} est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ invariante par le sous-groupe G de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ stabilisant e_1. Son noyau est de dimension $\geqslant 2$ et est G-invariant. On vérifie aisément que le seul tel sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{R}^n$ tout entier, de sorte que $\omega_{e_1} = 0$.

4. Mesure de Haar sur $GL_n(\mathbb{R})$

Soit $U = GL_n(\mathbb{R})$ vu comme ouvert de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. On définit une forme volume ω sur U par $\omega(A) = \frac{1}{(\det A)^n}\omega_0$, où ω_0 est la forme volume standard sur $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que ω est invariante par multiplication à gauche ou à droite par des matrices, et que c'est la seule forme volume sur $GL_n(\mathbb{R})$ à avoir cette propriété (à multiplication par un scalaire près).

Solution :

Si φ est un difféomorphisme local, on sait que $\varphi^*(f\omega_0)(x) = J\varphi(x)f(\varphi(x))\omega_0$, où $J\varphi$ est le jacobien de φ, i.e. le déterminant de sa différentielle.

Ici, φ est la multiplication à gauche par une matrice M (le cas de la multiplication à droite étant analogue), qui est linéaire donc égale à sa différentielle. Soit E_{ij} la matrice élémentaire qui a un 1 en position (i, j) et des 0 ailleurs. Quand M est diagonale, $ME_{ij} = M_{ii}E_{ij}$, si bien que dans la base des E_{ij} la multiplication par M est diagonale, et son déterminant est $\prod(M_{ii})^n = \det(M)^n$. On en déduit le même résultat quand M est diagonalisable puis, par densité (quitte à passer sur $\mathbb{C}$), quand M est quelconque. Ainsi, $J\varphi(A) = \det(M)^n$, puis

$$\varphi^*\omega(A) = \det(M)^n \det(AM)^{-n}\omega_0 = \det(A)^{-n}\omega_0 = \omega(A),$$

i.e ω est invariante.

Pour l'unicité, si $\omega(A) = f(A)\omega_0$ est invariante, on peut supposer que $f(I_n) = 1$. En écrivant la même équation d'invariance que ci-dessus, on en déduit $f(A) = \det(A)^{-n}$.

Remarque : dès qu'un groupe agit transitivement (i.e. $\forall x, y, \exists g, g(x) = y$), il y a de même au plus une forme volume invariante par le groupe, pour les mêmes raisons.

5. Demi-plan de Poincaré

Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive.

1– Montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}$ définit une action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}$.

2– Montrer qu'à un scalaire près, $\omega = \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ est la seule forme volume invariante sur $\mathbb{H}$ par le groupe.

Solution :

C'est juste un calcul pour vérifier que l'action stabilise bien $\mathbb{H}$, et laisse la forme ω invariante.

Pour l'unicité, il suffit de voir que $SL_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$, ce qui vient du fait que $SL_2(\mathbb{R})$ contient les translations horizontales (ce sont les matrices $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) et les homothéties de centre 0 et de rapport positif (ce sont les matrices $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$).

6. Coordonnées de Plücker

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $e_1, \dots, e_n$ une base de E^*. Pour chaque m-uplet $I = (i_1, \dots, i_m)$ avec $1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n$, posons $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$. Si W est un sous-espace de E^* de dimension m et $x_1, \dots, x_m$ une base de W, la m-forme linéaire alternée $x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ s'écrit $\sum a_I e_I$ pour certains coefficients a_I.

1– Montrer que, à une constante multiplicative près, les coefficients $(a_I)_I$ ne dépendent pas du choix de la base de W et définissent une application *injective* de l'ensemble $\{W \subset E^* \mid \dim W = m\}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$, où $N = \binom{n}{m} - 1$.

Les coefficients a_I s'appellent les coordonnées de Plücker de W.

2– Montrer que les coordonnées de Plücker déterminent un plongement de la grassmanienne $\mathcal{G}_m(E^*)$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$.

3– Montrer qu'une forme bilinéaire alternée ω sur $\mathbb{R}^4$ s'écrit sous la forme $x_1 \wedge x_2$ avec x_1, x_2 deux formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^4$, si et seulement si $\omega \neq 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$.

4– En paramétrant l'image de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ par le plongement de Plücker, montrer que $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ est difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. On pourra poser $x_1 = a_{12} + a_{34}$, $x_2 = a_{23} + a_{14}$, $x_3 = a_{31} + a_{24}$, $y_1 = a_{12} - a_{34}$, $y_2 = a_{23} - a_{14}$, $y_3 = a_{31} - a_{24}$.

Solution :

1– Si $y_1, \dots, y_m$ est une autre base de W, il existe une matrice $A \in GL(W)$ envoyant x_i sur y_i. Alors $y_1 \wedge \dots \wedge y_m = (\det A) x_1 \wedge \dots \wedge x_m$.

Ainsi, l'application $W \mapsto [x_1 \wedge \dots \wedge x_m]$ est bien définie. Pour montrer qu'elle est injective, il faut voir que, si $x_1 \wedge \dots \wedge x_m = \alpha y_1 \wedge \dots \wedge y_m$, alors $\mathrm{Vect}(x_1, \dots x_m) = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_m)$. On complète $x_1, \dots, x_m$ en une base $x_1, \dots, x_n$. On peut écrire $y_i = \sum a_{ij} x_j$. Alors

$$y_i \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_j \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k.$$

Mais $y_i \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \alpha y_i \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_k = 0$. Par conséquent, $a_{ij} = 0$ pour $j > k$. Ainsi, $y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, ce qui conclut.

2– Soit P l'application de Plücker. On va montrer que c'est un difféomorphisme local en chaque point de $\mathcal{G}_m(E^*)$. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaire à la source et au but, il suffit de travailler au voisinage de $W = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ (avec $P(W) = [1 : 0 : \dots : 0]$).

La coordonnée canonique de $\mathcal{G}_m(E^*)$ au voisinage de W est donnée par $\varphi : A \mapsto \mathrm{Im} \begin{pmatrix} I_k \\ A \end{pmatrix}$ lorsque $A \in \mathcal{M}_{n-k,k}$. Une base de $\varphi(A)$ est $e_1 + Ae_1, \dots, e_m + Ae_m$. On peut écrire

$$(e_1 + Ae_1) \wedge \cdots \wedge (e_m + Ae_m) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m + \sum_{I \neq \{1,\dots,m\}} a_I(A) e_I,$$

où les fonctions a_I sont polynômiales en A (et donc $\mathcal{C}^\infty$). Dans les cartes, l'application P est donnée par $Q : A \mapsto (a_I(A))_{I \neq \{1,\dots,m\}}$; elle est donc polynomiale.

Calculons la dérivée de Q en 0. On a

$$(e_1 + Ae_1) \wedge \cdots \wedge (e_m + Ae_m) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_m + \sum_{i=1}^{m} e_1 \wedge \cdots \wedge Ae_i \wedge \dots e_m + O(\|A\|^2).$$

Mais $Ae_i = \sum_j A_{ji} e_{j+m}$. Ainsi, $dQ_0(A) = ((-1)^{m-i} A_{ji} e_{\{1,\dots,\widehat{i},\dots,m,j+m\}})$. Cette différentielle est injective.

Ainsi, P est une immersion injective. Elle est propre puisque $\mathcal{G}_m(E^*)$ est compact. C'est donc un plongement.

3– Si $\omega = x_1 \wedge x_2$ avec (x_1, x_2) libre, alors ω est non nulle et $\omega \wedge \omega = 0$. Réciproquement, soit ω telle que $\omega \neq 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$.

Le théorème de réduction des formes bilinéaires antisymétriques assure qu'une forme bilinéaire alternée peut s'écrire dans une certaine base avec une matrice de 0 et des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. S'il n'y avait aucun bloc diagonal, on aurait $\omega = 0$, ce qui est absurde. S'il y a exactement un bloc diagonal, alors $\omega = x_1 \wedge x_2$ et on a gagné. Enfin, s'il y a deux blocs diagonaux, alors $\omega = x_1 \wedge x_2 + x_3 \wedge x_4$ où (x_1, x_2, x_3, x_4) forme une base de E^*. On obtient $\omega \wedge \omega = 2x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \neq 0$, ce qui est encore absurde.

4– Une 2-forme non nulle

$$\omega = a_{12} e_1 \wedge e_2 + a_{31} e_3 \wedge e_1 + a_{14} e_1 \wedge e_4 + a_{23} e_2 \wedge e_3 + a_{24} e_2 \wedge e_4 + a_{34} e_3 \wedge e_4$$

est dans l'image du plongement de Plücker si et seulement si $\omega \wedge \omega = 0$, d'après la question précédente. Mais

$$\omega \wedge \omega = 2(a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24} + a_{14}a_{23}) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Ainsi, l'image de P est donnée par la surface déquation $a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$. Dans les coordonnées indiquées dans l'énoncé, cette équation devient $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Ainsi, $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ est difféomorphe à l'ensemble

$$E = \{[x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{R}) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\}.$$

Cet ensemble est le quotient de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ par l'action diagonale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.