Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$11

Corrigé

Exercice 1

1. Pour tout x dans un voisinage de x_0 :

$$u(x) = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(0,r)} u(x+z)dz$$

On peut dériver sous l'intégrale. On applique ensuite la formule de Green à la fonction $U : \Omega \to \mathbb{R}^n$ telle que $U_i = 0$ si $i \neq j$ et $U_j = u$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) &= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x+z)dz \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(y)dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} div\, U(y)dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} \langle U(y), \nu(y)\rangle \, dy \\
&= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} u(y)\nu_j(y)dy
\end{aligned}$$

2. Appliquons l'égalité précédente à $u - m$ et utilisons la majoration $0 \leq u - m \leq M - m$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)\right| &\leq \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} |u(y)\nu_j(y)|dy \\
&\leq \frac{M-m}{|B(x_0,r)|}\int_{\partial B(x_0,r)} |\nu_j(y)|dy \\
&\leq \frac{M-m}{\pi r^2} \times \left(r\int_{\partial B(0,1)} |\nu_j(y)|dy\right) \\
&= \frac{M-m}{r} \times \left(\frac{1}{\pi}\int_{\partial B(0,1)} |\nu_j(y)|dy\right)
\end{aligned}$$

3. On applique l'inégalité de la question précédente pour $x_0 = x$, $r < d(x, \partial\Omega)$. On obtient ainsi que chaque composante de $\nabla u(x)$ est majorée par :

$$C_n \frac{M - m}{r}$$

En faisant tendre r vers $d(x, \partial\Omega)$, chaque composante est majorée par :

$$C_n \frac{M - m}{d(x, \partial\Omega)}$$

ce qui entraîne l'inégalité demandée pour $C'_n = \sqrt{n} C_n$.
4. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts inclus dans Ω telle que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega \qquad \text{et} \qquad \forall k, \quad K_k \subset \mathring{K}_{k+1}$$

D'après la question 3., pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(\partial u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur K_k. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc uniformément lipschitzienne et uniformément bornée. D'après le théorème d'Ascoli, il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K_k. En procédant par extraction diagonale, on peut supposer que la convergence uniforme a lieu sur K_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On fait cette hypothèse dans la suite.
D'après la question 3., pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall n, n', \qquad \sup_{x\in K_k} ||\nabla u_{\phi(n)}(x) - \nabla u_{\phi(n')}(x)|| \leq 2C'_n \frac{\sup_{x\in K_{k+1}} |u_{\phi(n)}(x) - u_{\phi(n')}(x)|}{d(K_k, \partial K_{k+1})} \to 0$$

donc $(\nabla u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également uniformément sur tout K_k.
Chaque dérivée partielle de u_n est harmonique, pour tout n. On peut donc réappliquer le raisonnement précédent et on montre ainsi que les dérivées secondes de $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi uniformément sur tout compact de Ω.
Si on note u_∞ la limite de $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors que u_∞ appartient à $\mathcal{C}^2$ et que $\Delta u_\infty = \lim_{n\to+\infty} \Delta u_{\phi(n)} = 0$.

Exercice 2

Soit $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ valant 1 sur Ω'. La fonction $\eta^2 u$ est dans H_0^1 (c'est une fonction de H^1 nulle au voisinage de $\partial\Omega$).
Calculons $\langle Lu, \eta^2 u\rangle = \langle f, \eta^2 u\rangle$.

$$\begin{aligned}
\left\langle Lu, \eta^2 u \right\rangle &= -\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij}(\partial_{x_j} u)\partial_{x_i}\left[\eta^2 u\right] + \sum_{i=1}^d \int_\Omega b_i(\partial_{x_i} u)\eta^2 u + \int_\Omega c u^2 \eta^2 \\
&= -\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \eta^2 a_{ij}(\partial_{x_j} u)(\partial_{x_i} u) - 2\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} u(\partial_{x_j} u)\eta(\partial_{x_i}\eta) \\
&\quad + \sum_{i=1}^d \int_\Omega b_i(\partial_{x_i} u)\eta^2 u + \int_\Omega c u^2 \eta^2
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega \eta^2 ||\nabla u||^2 &\leq \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \eta^2 a_{ij} (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_i} u) \\
&= - \int_\Omega f \eta^2 u - 2 \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} u (\partial_{x_j} u) \eta (\partial_{x_i} \eta) + \sum_{i=1}^d \int_\Omega b_i (\partial_{x_i} u) \eta^2 u + \int_\Omega c u^2 \eta^2 \\
&\leq \int_\Omega -f\eta^2 u + cu^2\eta^2 + 2C' \int_\Omega u ||\nabla u|| \eta ||\nabla \eta|| + C'' \int_\Omega u ||\nabla u|| \eta^2 \\
&\leq \int_\Omega \eta^2 (-fu + cu^2) \\
&\quad + \left(\int_\Omega \eta^2 ||\nabla u||^2 \right)^{1/2} \left[2C' \left(\int_\Omega u^2 ||\nabla \eta||^2 \right)^{1/2} + C'' \left(\int_\Omega u^2 \eta^2 \right)^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

Une inégalité de la forme $x^2 \leq ax + b$ avec $b \geq 0$ implique $x^2 \leq a^2 + 4b$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta^2 ||\nabla u||^2 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[2C' \left(\int_\Omega u^2 ||\nabla \eta||^2 \right)^{1/2} + C'' \left(\int_\Omega u^2 \eta^2 \right)^{1/2} \right]^2 + \frac{4}{\alpha} \int_\Omega \eta^2 |-fu + cu^2| \\
&\leq \frac{8C'^2}{\alpha^2} \int_\Omega u^2 ||\nabla \eta||^2 + \frac{2C''^2}{\alpha^2} \int_\Omega u^2 \eta^2 + \frac{4}{\alpha} \int_\Omega \eta^2 (|fu| + |c|u^2) \\
&\leq \frac{8C'^2}{\alpha^2} ||\nabla \eta||_\infty^2 \int_\Omega u^2 + \frac{2C''^2}{\alpha^2} ||\eta||_\infty^2 \int_\Omega u^2 + \frac{4}{\alpha} ||\eta||_\infty^2 \int_\Omega \left(\frac{1}{2} f^2 + \left(\frac{1}{2} + ||c||_\infty \right) u^2 \right) \\
&\leq C \int_\Omega \left(u^2 + f^2 \right)
\end{aligned}$$

pour une constante C bien choisie.
Comme $\eta = 1$ sur Ω', cela donne :

$$\int_{\Omega'} ||\nabla u||^2 \leq \int_\Omega \eta^2 ||\nabla u||^2 \leq C \int_\Omega \left(u^2 + f^2 \right)$$

Exercice 3

1. a) On traite le cas de la fonction C. Le raisonnement est similaire pour la fonction S.

$$C(t, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{t^{2k} ||\xi||^{2k}}{(2k)!}$$

Cette série converge uniformément sur tout compact, ainsi que toutes ses dérivées. La fonction C est donc $\mathcal{C}^\infty$.
Montrons que toutes ses dérivées par rapport à ξ sont à croissance au plus polynomiale, lorsque t est fixé. Si $t = 0$, la fonction est constante en ξ ; toutes les dérivées sont donc nulles. Supposons maintenant $t \neq 0$ fixé et notons $N : \xi \to t||\xi||$.

La fonction N est dérivable en-dehors de 0. De plus, comme N est 1-homogène en ξ, ses dérivées d'ordre l sont $1-l$ homogènes en ξ. Puisque $C(t,.) = \cos \circ N$, on a, pour tout multi-indice α, que $\partial_\xi^\alpha C(t,.)$ est (en-dehors de 0) une combinaison linéaire finie de termes de la forme :

$$(\partial^{\alpha_1} N) \dots (\partial^{\alpha_s} N) \cos^{(s)} \circ N$$

où les $\alpha_1, ..., \alpha_s$ sont des multi-indices non-nuls tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_s = \alpha$. Comme $\cos^{(s)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ pour tout s, un terme de la forme précédente est le produit d'une fonction $(s-|\alpha|)$-homogène en ξ et d'une fonction bornée. Puisqu'on a nécessairement $|\alpha| \geq s$, c'est une fonction bornée. En particulier, elle est à croissance polynomiale.
En outre, pour tout a, on a :

$$\partial_t^a C(t,\xi) = ||\xi||^a \cos^{(a)}(t||\xi||)$$

La fonction $\xi \to ||\xi||^a$ a toutes ses dérivées à croissance au plus polynomiale lorsque $||\xi|| \to +\infty$. De plus, à t fixé, la fonction $\xi \to \cos^{(a)}(t||\xi||)$ a toutes ses dérivées bornées en-dehors d'un voisinage de 0 (par le raisonnement qu'on vient de faire pour le cas $a = 0$, qui est aussi vrai pour les autres valeurs de a). Donc, par la formule de Leibniz, toutes les dérivées en ξ de $\partial_t^a C(t,.)$ sont à croissance au plus polynomiale en-dehors d'un voisinage de 0, donc sur tout $\mathbb{R}^n$, puisqu'elles sont continues.
b) Posons $u(t) = \mathcal{F}^{-1}(C(t,.)\hat{u}_0 + S(t,.)\hat{u}_1)$. D'après les propriétés de régularité de C et S, il s'agit d'un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}')$.
En utilisant le fait que, pour toute distribution g, $\mathcal{F}(\Delta g) = -||\xi||^2 \mathcal{F} g$, on a :

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\partial_t^2 + ||\xi||^2\right) C(t,.)\hat{u}_0 + \left(\partial_t^2 + ||\xi||^2\right) S(t,.)\hat{u}_1\right) = 0$$

De plus, $u(0) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0) = u_0$ et $\partial_t u(0) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_1) = u_1$.
c) Posons, comme dans l'indication, $U(s) = C(t-s,.)\hat{u}(s) + S(t-s,.)\partial_t \hat{u}(s)$ et calculons la dérivée de cette fonction.

$$\begin{aligned}
\partial_s U &= -\partial_t C(t-s,.)\hat{u}(s) + C(t-s,.)\partial_t \hat{u}(s) - \partial_t S(t-s,.)\partial_t \hat{u}(s) + S(t-s,.)\partial_t^2 \hat{u}(s) \\
&= ||\xi||^2 S(t-s)\hat{u}(s) + C(t-s)\partial_t \hat{u}(s) + C(t-s)\partial_t \hat{u}(s) - S(t-s)\mathcal{F}(\Delta u)(s) \\
&= ||\xi||^2 S(t-s)\hat{u}(s) - S(t-s)||\xi||^2 \hat{u}(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc U est constante. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t) &= U(t) \\
&= U(0) \\
&= C(t,.)\hat{u}(0) + S(t,.)\partial_t \hat{u}(0) \\
&= C(t,.)\hat{u}_0 + S(t,.)\partial_t \hat{u}_1
\end{aligned}$$

2. a) On prolonge D_S en $t = 0$ par la distribution nulle. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$D_S(t) = t \int_{S(0,1)} f(tx) d\sigma(x)$$

La distribution D_S est donc $\mathcal{C}^\infty$. D'après la question 1., pour montrer que $\mathcal{F}(D_S(t)) = 4\pi S(t,.)$, il suffit de montrer que D_S est solution de l'équation des ondes pour les conditions initiales $\hat{u}_0 = 0$ et $\hat{u}_1 = 4\pi$, c'est-à-dire $u_0 = 0$ et $u_1 = 4\pi\delta_0$.
On a :

$$\begin{aligned}
\partial_t D_S(t) &= \int_{S(0,1)} f(tx)d\sigma(x) + t\int_{S(0,1)} \langle \nabla f(tx), x\rangle \, d\sigma(x) \\
&= \int_{S(0,1)} f(tx)d\sigma(x) + \frac{1}{t}\int_{\partial B(0,t)} \langle \nabla f(x), n_x\rangle \, d\sigma(x) \\
&= \int_{S(0,1)} f(tx)d\sigma(x) + \frac{1}{t}\int_{B(0,t)} \Delta f(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 D_S(t) &= \int_{S(0,1)} \langle \nabla f(tx), x\rangle \, d\sigma(x) - \frac{1}{t^2}\int_{B(0,t)} \Delta f(x)dx + \frac{1}{t}\int_{\partial B(0,t)} \Delta f(x)d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{t^2}\int_{B(0,t)} \Delta f(x)dx - \frac{1}{t^2}\int_{B(0,t)} \Delta f(x)dx + \frac{1}{t}\int_{\partial B(0,t)} \Delta f(x)d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{t}\int_{\partial B(0,t)} \Delta f(x)d\sigma(x) \\
&= (\Delta D_S(t))(f)
\end{aligned}$$

Donc $\partial_t^2 D_S = \Delta D_S$ et D_S est solution de l'équation des ondes.
De plus, $D_S(0) = 0$ et, d'après les calculs qu'on vient de faire :

$$\partial_t D_S(0)(f) = \int_{S(0,1)} f(0)d\sigma(x) = 4\pi f(0)$$

c'est-à-dire que $\partial_t D_S(0) = 4\pi\delta_0$. C'est ce qu'on cherchait à démontrer.
Puisque $\partial_t S(t,.) = C(t,.)$, on a $\mathcal{F}(\partial_t D_S(t)) = 4\pi C(t,.)$. L'égalité $\mathcal{F}(D_C(t)) = 4\pi C(t,.)$ est donc une conséquence du fait que $D_C = \partial_t D_S$.
b) Pour tout t, la distribution $D_S(t)$ est à support compact. On peut donc définir, pour toute distribution tempérée u :

$$u \star D_S(t) : f \in \mathcal{S} \to u.\left(y \to D_S(t).\left(f(.+y)\right)\right)$$

En effet, on passe les détails mais on peut vérifier que $y \to D_S\left(f(.+y)\right)$ est bien une distribution tempérée, ce qui fait que la définition ci-dessus a un sens. On peut également montrer que $u \star D_S$ est de nouveau une distribution tempérée et que :

$$\mathcal{F}\left(u \star D_S\right) = \hat{u}\hat{D}_S = 4\pi S(t,.)\hat{u}$$

Le même raisonnement peut être appliqué à D_C au lieu de D_S.
On en déduit que, pour tout t :

$$u(t) = \frac{1}{4\pi}\left(u_0 \star D_C(t) + u_1 \star D_S(t)\right)$$

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{4\pi}\left(\tilde{u}_0 \star D_C(t) + \tilde{u}_1 \star D_S(t)\right)$$

Supposons $t \in]-r;r[$ et montrons que ces deux distributions coïncident sur $B(x_0, r-|t|)$. Comme on peut « renverser le sens du temps », on se limite au cas $t > 0$.
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, r-|t|))$:

$$u(t).f = \frac{1}{4\pi}\left(u_0.\left(y \to D_C(t).f(.+y)\right) + u_1.\left(y \to D_S(t).f(.+y)\right)\right)$$
$$\tilde{u}(t).f = \frac{1}{4\pi}\left(\tilde{u}_0.\left(y \to D_C(t).f(.+y)\right) + \tilde{u}_1.\left(y \to D_S(t).f(.+y)\right)\right)$$

La fonction $y \to D_S(t).f(.+y)$ est à support dans $B(x_0, r)$. En effet, si $||y - x_0|| \geq r$:

$$D_S(t).f(.+y) = \frac{1}{t}\int_{\partial B(0,t)} f(y+x)d\sigma(x) = 0$$

car, pour tout $x \in \partial B(0,t)$, $||y + x - x_0|| \geq ||y - x_0|| - ||x|| \geq r - t$ donc $f(y+x) = 0$ (on a supposé f à support inclus dans $B(x_0, r-|t|)$).
De même, $y \to D_C(t).f(.+y)$ est à support dans $B(x_0, r)$. Puisqu'on a supposé que u_0 coïncidait avec $\tilde{u}_0$, et u_1 avec $\tilde{u}_1$ sur $B(x_0, r)$, on a alors, pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x_0, r-|t|))$:

$$u(t).f = \tilde{u}(t).f$$

3. Supposons $(x, \xi) \notin WF(u_0) \cup WF(u_1)$.
Soient $\phi_0, \phi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 au voisinage de x, telles que $\widehat{\phi_0 u_0}, \widehat{\phi_1 u_1}$ décroissent plus vite que tout polynôme dans la direction ξ.
Soit $\tilde{u}$ la solution de l'équation des ondes pour les conditions initiales $(\phi_0 u_0, \phi_1 u_1)$. D'après la question 2.b), u et $\tilde{u}$ coïncident au voisinage de $(0, x)$. En notant $\tilde{U}(t,x) = \tilde{u}(t)(x)$, il suffit donc de montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $((0,x),(y,\xi)) \notin WF(\tilde{U})$.
Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de 0. Alors, pour tout t, d'après la question 1. :

$$\psi(t)\widehat{\tilde{u}(t)} = \psi(t)C(t,.)\widehat{\phi_0 u_0} + \psi(t)S(t,.)\widehat{\phi_1 u_1}$$

Notons $c(t,.)$ et $s(t,.)$ les transformées de Fourier de $\psi(t)C(t,.)$ et $\psi(t)S(t,.)$ selon la variable t. On a :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^n, \qquad \widehat{\psi\tilde{U}}(\sigma,\omega) = c(\sigma,\omega)\widehat{\phi_0 u_0}(\omega) + s(\sigma,\omega)\widehat{\phi_1 u_1}(\omega)$$

Pour tout k, il existe c_k, c'_k telles que :

$$\forall \sigma, \omega, \qquad |c(\sigma,\omega)| \leq c_k \langle\sigma\rangle^{-k}\langle\omega\rangle^{k} \qquad |s(\sigma,\omega)| \leq c'_k \langle\sigma\rangle^{-k}\langle\omega\rangle^{k-1}$$

C'est dû aux majorations L^∞ qu'on a sur les dérivées par rapport à t de S et C. On a donc, pour tout k, une majoration :

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}^n, \qquad |\widehat{\psi\tilde{U}}(\sigma,\omega)| \leq c_k \langle\sigma\rangle^{-k}\langle\omega\rangle^{k}|\widehat{\phi_0 u_0}(\omega)| + c'_k \langle\sigma\rangle^{-k}\langle\omega\rangle^{k-1}|\widehat{\phi_1 u_1}(\omega)|$$

Puisque $\widehat{\phi_0 u_0}$ et $\widehat{\phi_1 u_1}$ décroissent plus vite que tout polynôme dans la direction ξ, $\widehat{\psi\tilde{U}}$ décroît aussi plus vite que tout polynôme dans la direction (y,ξ), pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $((0,x),(y,\xi)) \notin WF(\tilde{U})$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

4. a) Notons $a((t,x),(y,\xi)) = y^2 - ||\xi||^2$. Puisque U satisfait l'équation des ondes, $\mathrm{Op}(a)U = 0$.
Donc, d'après le théorème de Sato-Hörmander vu en cours, $WF(U) \subset a^{-1}(\{0\}) = \{((t,x),(||\xi||,\xi)), t \in \mathbb{R}, x,\xi \in \mathbb{R}^n\} \cup \{((t,x),(-||\xi||,\xi)), t \in \mathbb{R}, x,\xi \in \mathbb{R}^n\}$.
b) Supposons $((0,x),(||\xi||,\xi)), ((0,x),(-||\xi||,\xi)) \notin WF(U)$ et montrons que $(x,\xi) \notin WF(u_0)$.
La démonstration du fait que $(x,\xi) \notin WF(u_1)$ sera similaire.
En utilisant la question a), on a alors que $WF(U) \cap (\{(0,x)\} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\xi)) = \emptyset$. Comme cet ensemble est conique et fermé, un argument de compacité montre qu'il existe $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ valant 1 au voisinage de $(0,x)$ tel que $\widehat{\phi U}$ décroît plus vite que tout polynôme sur un voisinage conique de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\xi$.
Un tel voisinage conique contient un ensemble de la forme $\mathbb{R} \times V$, avec V un voisinage conique de ξ. On a, par la formule d'inversion de Fourier appliquée à la première coordonnée :

$$\widehat{\phi(0,.)U(0,.)}(\xi') = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi U}(y,\xi')dy$$

Lorsque ξ' appartient à V, on a donc, pour tout $k \geq 2$, une majoration de la forme :

$$\begin{aligned}|\widehat{\phi(0,.)U(0,.)}(\xi')| &\leq c_k \int_{\mathbb{R}} (1+y^2+||\xi'||^2)^{-k/2}dy \\ &= c_k \int_{\mathbb{R}} (1+y^2)^{-k/2}(1+||\xi'||^2)^{1/2-k/2}dy \\ &= c'_k(1+||\xi'||^2)^{1/2-k/2}\end{aligned}$$

donc $\widehat{\phi(0,.)U(0,.)} = \widehat{\phi(0,.)u_0}$ décroît plus vite que tout polynôme sur V. Comme $\phi(0,.)$ vaut 1 au voisinage de x, $(x,\xi) \notin WF(u_0)$.

5. Supposons $(x,\xi) \in WF(u(t))$. Alors, d'après la question 4.b) (appliquée en t plutôt qu'en 0), $((t,x),(||\xi||,\xi)) \in WF(U)$ ou $((t,x),(-||\xi||,\xi)) \in WF(U)$. Supposons par exemple qu'on est dans le premier cas.
Comme à la question 4.a), on note $a(y,\xi) = y^2 - ||\xi||^2$. On a $\mathrm{Op}(a)U = 0$ donc, d'après le théorème de propagation des singularités du TD 10, la courbe bicaractéristique de a passant par $((t,x),(||\xi||,\xi))$ est incluse dans $WF(U)$.
Une courbe bicaractéristique $((T,X),(Y,\Xi))$ est une fonction qui satisfait l'équation :

$$\begin{aligned}(T,X)' &= 2(Y,-\Xi) \\ (Y,\Xi)' &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, si $((T(0),X(0)),(Y(0),\Xi(0))) = ((t,x),(||\xi||,\xi))$, on a, pour tout s :

$$((T(s),X(s)),(Y(s),\Xi(s))) = ((t+2s||\xi||, x-2s\xi),(||\xi||,\xi))$$

En particulier, pour $s = -t/(2||\xi||)$, on obtient que $((0,x+t\xi/||\xi||),(||\xi||,\xi))$ appartient à $WF(U)$. D'après la question 3., on a donc $(x+t\xi/||\xi||,\xi) \in WF(u_0) \cup WF(u_1)$.