École Normale Supérieure
21 mai 2015

Traitement du signal

TD n$^{\text{o}}$11

Corrigé

1. a) Commençons par le cas où $j_1 = j_2$.
Si $n_1 = n_2$:

$$\begin{aligned}\langle \psi_{j_1,n_1}, \psi_{j_2,n_2} \rangle &= \sum_{k=2^j n}^{2^j(n+1)-1} 2^{-j} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_{j_1,n_1}, \phi_{j_2,n_2} \rangle &= \sum_{k=2^j n}^{2^j n+2^{j-1}-1} 2^{-j} - \sum_{k=2^j n+2^{j-1}}^{2^j(n+1)-1} 2^{-j} \\ &= 0\end{aligned}$$

Si $n_1 \neq n_2$, les fonctions ψ_{j_1,n_1} et ψ_{j_2,n_2} ou ψ_{j_1,n_1} et ϕ_{j_2,n_2} sont à support disjoints. On a donc :

$$\langle \psi_{j_1,n_1}, \psi_{j_2,n_2} \rangle = \langle \psi_{j_1,n_1}, \phi_{j_2,n_2} \rangle = 0$$

Traitons maintenant le cas où $j_1 < j_2$.
La fonction ψ_{j_1,n_1} est nulle sauf sur l'intervalle $\{2^{j_1}n_1, ..., 2^{j_1}(n_1+1)-1\}$. Sur cet intervalle, ψ_{j_2,n_2} et ϕ_{j_2,n_2} sont constantes (en $-1, 0$ ou 1). Notons α la valeur de cette constante. On a :

$$\begin{aligned}\langle \psi_{j_1,n_1}, \psi_{j_2,n_2} \text{ ou } \phi_{j_2,n_2} \rangle &= \alpha \sum_{k=2^{j_1}n_1}^{2^{j_1}n_1+2^{j_1-1}-1} 2^{-j_1/2} - \alpha \sum_{k=2^{j_1}n_1+2^{j_1-1}}^{2^{j_1}(n_1+1)-1} 2^{-j_1/2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Si $n_1 = n_2$, on a $\langle \phi_{j,n_1}, \phi_{j,n_2} \rangle = \sum_{k=2^j n_1}^{2^j(n_1+1)-1} 2^j = 1$. En revanche, si $n_1 \neq n_2$, les fonctions ϕ_{j,n_1} et ϕ_{j,n_2} sont à support disjoint donc $\langle \phi_{j,n_1}, \phi_{j,n_2} \rangle = 0$.
b) Le nombre d'éléments dans cet ensemble vaut :

$$\begin{aligned}1 + 3\sum_{0<j\leq J} (2^{J-j})^2 &= 1 + 3.2^{2J} \sum_{0<j\leq J} 2^{-2j} \\ &= 1 + 3.2^{2J} \frac{1-2^{-2J}}{3} \\ &= 2^{2J} = N^2\end{aligned}$$

Puisque la dimension de $\mathbb{R}^{N\times N}$ est également N^2, il suffit de montrer que les éléments de l'ensemble sont de norme 1 et orthonormaux deux à deux pour montrer qu'il s'agit d'une base orthonormale.
Pour tous j, n_1, n_2, $||\psi^1_{j,n_1,n_2}||_2 = ||\phi_{j,n_1}||_2||\psi_{j,n_2}||_2 = 1$. De même, $||\psi^2_{j,n_1,n_2}||_2 = ||\psi^3_{j,n_1,n_2}||_2 = 1$.
Pour la même raison, $||\phi||_2 = 1$.
Calculons maintenant le produit scalaire de deux éléments différents de la famille. Considérons donc deux éléments différents de l'ensemble, f^1 et f^2. Chacun des deux s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f^1 &= g^1_{j_1,n_1^1} h^1_{j_1,n_2^1} \\ f^2 &= g^2_{j_2,n_1^2} h^2_{j_2,n_2^2} \end{aligned}$$

où les g et h sont des fonctions ϕ ou ψ.
Alors $\langle f^1, f^2\rangle = \langle g^1_{j_1,n_1^1}, g^2_{j_2,n_1^2}\rangle\langle h^1_{j_1,n_2^1}, h^2_{j_2,n_2^2}\rangle$.
Par symétrie, on peut supposer qu'on a $j_1 \leq j_2$. Si $j_1 = j_2$, d'après la question a), $\langle g^1_{j_1,n_1^1}, g^2_{j_2,n_1^2}\rangle = 0$ ou $\langle h^1_{j_1,n_2^1}, h^2_{j_2,n_2^2}\rangle = 0$ car $n_1^1 \neq n_1^2$ ou $n_2^1 \neq n_2^2$. Donc $\langle f^1, f^2\rangle = 0$.
Si $j_1 < j_2$, alors g^1 ou g^2, h^1 ou h^2 est une fonction ψ. Supposons par exemple qu'il s'agit de g^1 (les autres cas sont identiques). Alors $\langle g^1_{j_1,n_1^1}, g^2_{j_2,n_1^2}\rangle = 0$, d'après la question a). Donc $\langle f^1, f^2\rangle = 0$.
2. a) On traite le cas $s = 1$. Les deux autres sont similaires.
Pour tout $n_1 \in \{0, ..., 2^J - 1\}$, on a, d'après la définition :

$$\begin{aligned} \phi_{1,n_1}[k_1] &= 2^{-1/2} \text{ si } k_1 = 2n_1 \text{ ou } k_1 = 2n_1 + 1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

De même, pour tout $n_2 \in \{0, ..., 2^J - 1\}$:

$$\begin{aligned} \psi_{1,n_2}[k_2] &= 2^{-1/2} \text{ si } k_2 = 2n_2 \\ &= -2^{-1/2} \text{ si } k_2 = 2n_2 + 1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \psi^1_{1,n_1,n_2}[k_1, k_2] &= 1/2 \text{ si } k_1 = 2n_1 \text{ et } k_2 = 2n_2 \\ &= 1/2 \text{ si } k_1 = 2n_1 + 1 \text{ et } k_2 = 2n_2 \\ &= -1/2 \text{ si } k_1 = 2n_1 \text{ et } k_2 = 2n_2 + 1 \\ &= -1/2 \text{ si } k_1 = 2n_1 + 1 \text{ et } k_2 = 2n_2 + 1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Puisque $a_{1,1,n_1,n_2} = \sum_{k_1,k_2} f[k_1, k_2]\psi^1_{1,n_1,n_2}[k_1, k_2]$, on obtient :

$$a_{1,1,n_1,n_2} = \frac{1}{2}\left(f[2n_1, 2n_2] + f[2n_1 + 1, 2n_2] - f[2n_1, 2n_2 + 1] - f[2n_1 + 1, 2n_2 + 1]\right)$$

c) Pour tout $j \geq 2$, pour tous s, n_1, n_2, $\psi^s_{j,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2] = \psi^s_{j,n_1,n_2}[2k_1+1, 2k_2] = \psi^s_{j,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2+1] = \psi^s_{j,n_1,n_2}[2k_1+1, 2k_2+1]$. En effet, $\phi_{j,n}[2k] = \phi_{j,n}[2k+1]$ et $\psi_{j,n}[2k] = \psi_{j,n}[2k+1]$ dès que $j \geq 2$.
De même, $\phi[2k_1, 2k_2] = \phi[2k_1+1, 2k_2] = \phi[2k_1, 2k_2+1] = \phi[2k_1+1, 2k_2+1]$.
Puisque g est une combinaison linéaire de ϕ et des ψ^s_{j,n_1,n_2}, g vérifie les égalités voulues.
d) Puisque $\tilde{f}[k_1, k_2] = 2g[2k_1, 2k_2]$, il faut calculer $g[2k_1, 2k_2]$.
D'après la définition de g :

$$f = g + \sum_{s=1,2,3} \sum_{n_1,n_2} a_{s,1,n_1,n_2}[f]\psi^s_{1,n_1,n_2}$$

Comme on l'a vu à la question 2.a), $\psi^1_{1,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2] = 0$ sauf si $k_1 = n_1$ et $k_2 = n_2$, auquel cas on a $\psi^1_{1,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2] = 1/2$. Le même résultat est vrai pour ψ^2_{1,n_1,n_2} et ψ^3_{1,n_1,n_2}.
Donc :

$$\begin{aligned}
f[2k_1, 2k_2] &= g[2k_1, 2k_2] + \sum_{s=1,2,3} \sum_{n_1,n_2} a_{s,1,n_1,n_2}[f]\psi^s_{1,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2] \\
&= g[2k_1, 2k_2] + \sum_{s=1,2,3} a_{s,1,k_1,k_2}[f]\psi^s_{1,k_1,k_2}[2k_1, 2k_2] \\
&= g[2k_1, 2k_2] + \frac{1}{2}\left(a_{1,1,k_1,k_2} + a_{2,1,k_1,k_2} + a_{3,1,k_1,k_2}\right) \\
&= g[2k_1, 2k_2] \\
&\quad + \frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{2}(f[2k_1, 2k_2] + f[2k_1+1, 2k_2] - f[2k_1, 2k_2+1] - f[2k_1+1, 2k_2+1]) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(f[2k_1, 2k_2] - f[2k_1+1, 2k_2] + f[2k_1, 2k_2+1] - f[2k_1+1, 2k_2+1]) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(f[2k_1, 2k_2] - f[2k_1+1, 2k_2] - f[2k_1, 2k_2+1] + f[2k_1+1, 2k_2+1])\Bigg) \\
&= g[2k_1, 2k_2] \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(3f[2k_1, 2k_2] - f[2k_1+1, 2k_2] - f[2k_1, 2k_2+1] - f[2k_1+1, 2k_2+1]\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$g[2k_1, 2k_2] = \frac{1}{4}\left(f[2k_1, 2k_2] + f[2k_1+1, 2k_2] + f[2k_1, 2k_2+1] + f[2k_1+1, 2k_2+1]\right)$$

Puisque $\tilde{f}[k_1, k_2] = 2g[2k_1, 2k_2]$, le résultat voulu en découle.
f) On remarque que $\tilde{\phi}[k_1, k_2] = 2\phi[2k_1, 2k_1]$ pour tous k_1, k_2 et $\tilde{\psi}_{s,j,n_1,n_2}[k_1, k_2] = 2\psi_{s,j+1,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2]$.
Donc, pour tous k_1, k_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}[k_1, k_2] &= 2g[2k_1, 2k_2] \\
&= 2\left(a_\phi[f]\phi[2k_1, 2k_2] + \sum_{j=2}^{J} \sum_{s=1,2,3} \sum_{n_1,n_2} a_{s,j,n_1,n_2}[f]\psi^s_{j,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2]\right) \\
&= a_\phi[f]\tilde{\phi}[k_1, k_2] + \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{s=1,2,3} \sum_{n_1,n_2} a_{s,j+1,n_1,n_2}[f]\tilde{\psi}^s_{j,n_1,n_2}[k_1, k_2]
\end{aligned}$$

g) Les coefficients de $\tilde{f}$ sur la base d'ondelettes de Haar sont $a_\phi[f]$ et les $a_{s,j+1,n_1,n_2}[f]$ pour $j = 1, ..., J-1$.

3. a) $a_\phi[f] = f$

b) On calcule $h[2k_1, 2k_2]$. Les trois autres égalités s'obtiennent de manière similaire.

D'après les définitions, $\psi^1_{1,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2] = 1/2$ si $n_1 = k_1$ et $n_2 = k_2$ et $\psi^1_{1,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2] = 0$ si $n_1 \neq k_1$ ou $n_2 \neq k_2$.

De même pour ψ^2_{1,n_1,n_2} et ψ^3_{1,n_1,n_2}.

Donc :

$$\begin{aligned} h[2k_1, 2k_2] &= \sum_s \sum_{n_1,n_2} a_{s,1,n_1,n_2}[f] \psi^s_{1,n_1,n_2}[2k_1, 2k_2] \\ &= \sum_s a_{s,1,k_1,k_2}[f] \psi^s_{1,k_1,k_2}[2k_1, 2k_2] \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{1,1,k_1,k_2}[f] + a_{2,1,k_1,k_2}[f] + a_{3,1,k_1,k_2}[f]\right) \end{aligned}$$

c) D'après la question 2. g), les coefficients de la transformée en ondelettes de Haar de $\tilde{f}$ valent $\tilde{a}_\phi[\tilde{f}] = a_\phi[f]$ et $\tilde{a}_{s,j,n_1,n_2}[\tilde{f}] = \tilde{a}_{s,j+1,n_1,n_2}[f]$ pour $j = 1, ..., J-1$.

5. e) La différence entre les deux courbes est dûe au fait que R et H ne sont pas rigoureusement égales.

Pour les petites valeurs de H, il s'agit d'un problème d'arrondi : R ne descend pas en dessous de 1 (le code de Huffman alloue au moins 1 bit à chaque valeur) tandis que H peut être arbitrairement proche de 0.

Pour les grandes valeurs de H, le nombre moyen de bits par pixel est proche de H mais légèrement supérieur, car le code renvoyé par la fonction `encode` contient, en plus du code calculé par l'algorithme de Huffman, un certain nombre de bits destinés à permettre le décodage (qui décrivent la table de Huffman utilisée, en particulier).

f) Lorsque le quantificateur est haute résolution :

$$R = H - \frac{1}{2}\log_2(12D)$$

donc R est affine en $\log_2(D)$.

Pour D grand, le quantificateur n'est plus haute résolution et l'égalité ne s'applique plus.

g) La différence entre les deux images devient difficilement visible lorsque δ est de l'ordre de 20, ce qui correspond à $R \approx 2$.

h) On obtient entre $7,5$ et 8 bits par pixel, c'est-à-dire à peu près ce qu'on obtiendrait avec un encodage naïf, en codant chaque pixel (un entier compris entre 0 et 255) sur 8 bits.