Processus aléatoires
ENS Paris, 2018-2019

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 11 : Chaînes de Markov : classification des états, mesures invariantes
Corrigé

Mercredi 28 Novembre

Exercice 1 (Petites questions sur la classification des états)
On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. Pour $x \in S$, on notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe.
2. Donner un exemple où, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même, sans que x soit récurrent. Donner un exemple où, de plus, l'ensemble des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.
3. Pour $x, y \in S$, est-il vrai que si y est récurrent et il existe n tel que $Q^n(x, y) > 0$, alors $N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. ?
4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q^n(x, y) > 0$ mais $Q^m(y, x) = 0$ pour tout $m \geq 0$.
5. Montrer que pour $x, y \in S$, si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, alors y est récurrent. La réciproque est-elle vraie ?
6. Peut-on avoir $0 < \mathbb{E}_x[N_y] < +\infty$, avec y récurrent ?
7. Si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, quelles valeurs peut prendre $\mathbb{E}_y[N_x]$?
8. On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S \mid \exists n \text{ tel que } Q^n(x, y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. On prend $S = \{-1, 0, 1\}$, $Q(1, 1) = Q(-1, -1) = 1$ et $Q(0, 1) = Q(0, -1) = 1/2$. Alors, sous $\mathbb{P}_0$, l'ensemble des points visités est $\{0, 1\}$ avec probabilité $1/2$, et $\{0, -1\}$ avec probabilité $1/2$.
2. Pour $S = \{0, 1\}$ et $Q(0, 1) = 1 = Q(1, 1)$, on voit que $x = 0$ n'est pas récurrent, et l'ensemble des points visités par la chaîne est $\{0, 1\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s..
   Pour $S = \{0, 1, 2\}$ et $Q(i, 1) = Q(i, 2) = 1/2$ pour $i = 0, 1, 2$, on voit que $x = 0$ n'est pas récurrent, que l'ensemble des points visités est $\{0, 1, 2\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s., et que le deuxième point visité est 1 ou 2 avec probabilité $1/2$ chacun.
3. La réponse est non. Il suffit de reprendre l'exemple de la question 1., on voit que 1 est récurrent, $Q(0, 1) > 0$ mais $\mathbb{P}_0(N_1 = +\infty) = 1/2$.
4. Toujours avec le même exemple, $Q(0, 1) > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q^p(1, 0) = 0$.

5. On a, d'après la propriété de Markov forte pour $H_y = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = y\}$, en notant (Y_n) une autre chaîne de même matrice de transition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[N_y] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{H_y<+\infty}\sum_{n\geq H_y}\mathbb{1}_{X_n=y}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{H_y<+\infty}\mathbb{E}_{X_{H_y}}\left[\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{Y_n=y}\right]\right] \\
&= \mathbb{P}_x(H_y<+\infty)\mathbb{E}_y\left[\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{Y_n=y}\right] \\
&= \mathbb{P}_x\left(H_y<+\infty\right)\mathbb{E}_y[N_y]\,,
\end{aligned}$$

donc si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, comme $\mathbb{P}_x(H_y < +\infty)$ est fini, on a $\mathbb{E}_y[N_y] = +\infty$, i.e. y est récurrent.
La réciproque est fausse, cf l'exemple 1. où 1 est récurrent, mais $\mathbb{E}_{-1}[N_1] = 0$.

6. Non, car $\mathbb{E}_x[N_y] = \mathbb{P}_x(H_y < +\infty)\mathbb{E}_y[N_y]$ (cf question 5.) et $\mathbb{E}_y[N_y] = +\infty$, donc $\mathbb{E}_x[N_y] = 0$ ou $+\infty$ selon que $\mathbb{P}_x(H_y < +\infty) = 0$ ou > 0.
7. Si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, alors y est récurrent (cf 5.). On en déduit que $\mathbb{E}_y[N_x]$ ne peut prendre que 2 valeurs : $\mathbb{E}_y[N_x] = +\infty$ si x est récurrent et dans la même classe que y, et $\mathbb{E}_y[N_x] = 0$ sinon.
8. Soit $x \in E$. Sous $\mathbb{P}_x$, la chaîne reste p.s. dans V_x, donc sous $\mathbb{P}_x$,

$$\forall k \geq 0 \qquad \sum_{y\in V_x} Q^k(x,y) \;=\; 1\,,$$

donc

$$\sum_{y\in V_x}\sum_{k\geq 0} Q^k(x,y) \;=\; \sum_{k\geq 0}\sum_{y\in V_x} Q^k(x,y) \;=\; +\infty\,.$$

V_x étant fini, il existe $y \in V_x$ tel que $\mathbb{E}_x[N_y] = \sum_{k\geq 0} Q^k(x,y) = +\infty$, ce qui implique (cf 5.) que y est récurrent.

Exercice 2 (Chaînes irréductibles)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable S de matrice de transition Q. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide F de S tel que

$$\forall x \in F,\ \forall y \in S\backslash F, \quad Q(x,y) = 0\,.$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> • On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et que l'on peut trouver un sous-ensemble strict non vide F de S tel que

$$\forall x \in F,\ \forall y \in S\backslash F, \quad Q(x,y) = 0\,.$$

Soient $x \in F$ et $y \in S\backslash F$. Par hypothèse $Q(x,y) = 0$ et, puisque la chaîne est irréductible, il existe $n \geq 2$ tel que $Q^n(x,y) > 0$, et donc une suite $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ d'éléments de S telle que $Q(x_i, x_{i+1}) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Soit

$$k \;=\; \max\{1 \leq i \leq n-1 \,|\, x_i \in F\}\,.$$

Alors $x_k \in F$, $x_{k+1} \in S\backslash F$ et $Q(x_k, x_{k+1}) > 0$ ce qui est impossible.

• On suppose que pour tout sous-ensemble strict non vide F de S, il existe $x \in F$ et $y \in S\backslash F$ tels que $Q(x,y) > 0$. Pour $x \in S$, on note $S_x = \{y \in E : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Q^n(x,y) > 0\}$. On veut montrer que $S_x = S$. L'ensemble S_x est non vide car il contient x. Supposons que $S_x \neq S$, et soient $a \in S_x$ et $b \in S\backslash S_x$

tels que $Q(a,b) > 0$ (ils existent par hypothèse). On a $a \in S_x$ donc il existe $n \geq 0$ tel que $Q^n(x,a) > 0$, d'où

$$Q^{n+1}(x,b) \;\geq\; Q^n(x,a)Q(a,b) \;>\; 0\,.$$

Ceci est absurde car alors $b \in S_x$. Cela signifie que $S_x = S$ et ceci pour tout $x \in S$. La chaîne est donc irréductible.

Exercice 3 (Condition de Kolmogorov pour la réversibilité)
On considère une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable S, de matrice de transition Q. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\forall (x,y) \in S^2, \qquad Q(x,y) > 0 \implies Q(y,x) > 0,$

(ii) Pour toute "boucle" $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ telle que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1},x_i)}{Q(x_i,x_{i-1})} \;=\; 1\,.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

• Supposons qu'il existe une mesure réversible μ, i.e. μ n'est pas identiquement nulle (cette partie de la définition est souvent omise car trivialement vérifiée...) et pour tout $(x,y) \in S^2$, $\mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x)$. Montrons d'abord que $\mu(x) > 0$ pour tout $x \in S$. Soit $x \in S$. On sait qu'il existe $y \in S$ tel que $\mu(y) > 0$. Puisque la chaîne est irréductible, il existe $x_0 = y, x_1, ..., x_n = x$ tels que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$. La condition de réversibilité de μ pour le couple (x_0, x_1) donne alors

$$\mu(x_1)Q(x_1,x_0) \;=\; \mu(x_0)Q(x_0,x_1) > 0,$$

donc $\mu(x_1) > 0$. Par une récurrence immédiate, on obtient $\mu(x_i) > 0$ pour tout i donc $\mu(x) > 0$, et ce pour tout $x \in S$. La condition de réversibilité s'écrit alors pour tous $(x,y) \in S^2$

$$Q(y,x) \;=\; \frac{\mu(x)}{\mu(y)}Q(x,y),$$

donc

$$Q(x,y) > 0 \implies Q(y,x) > 0\,.$$

De plus, soient $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ dans S tels que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$. Alors on a

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1},x_i)}{Q(x_i,x_{i-1})} \;=\; \prod_{i=1}^n \frac{\mu(x_i)}{\mu(x_{i-1})} \;=\; 1\,,$$

ce qui achève la démonstration de la première implication.

• Réciproquement, supposons que les conditions données dans l'énoncé sont satisfaites. Nous allons définir une mesure réversible μ. Soit x fixé arbitrairement dans S, on pose $\mu(x) = 1$. Soit $y \in S$. Puisque la chaîne est irréductible, il existe $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ tels que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Pour que μ soit réversible, il faut $\mu(x_{i-1})Q(x_{i-1},x_i) = \mu(x_i)Q(x_i,x_{i-1})$ pour tout i. Puisque $Q(x_i, x_{i-1}) > 0$ pour tout i par hypothèse, on peut donc poser

$$\mu(y) \;=\; \prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1},x_i)}{Q(x_i,x_{i-1})}\,.$$

Vérifions que $\mu(y)$ est bien défini, c'est à dire que sa valeur ne dépend pas du chemin $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ choisi (du moment que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout i). Soit $y_0 = x, y_1, ..., y_m = y$ un autre chemin tel que $Q(y_{i-1}, y_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leqslant m$. On veut montrer

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1},x_i)}{Q(x_i,x_{i-1})} \;=\; \prod_{i=1}^m \frac{Q(y_{i-1},y_i)}{Q(y_i,y_{i-1})}, \tag{1}$$

ce qu'on peut faire en appliquant l'hypothèse à la "boucle"

$$(z_0, \ldots, z_{n+m}) = (x, x_1, \ldots, x_{n-1}, y, y_{m-1}, \ldots, y_1, x)\,.$$

La mesure μ est ainsi bien définie partout, et non identiquement nulle. Il reste à vérifier qu'elle est bien réversible. Soit z un autre état de S, il suffit de vérifier que $\mu(y)Q(y,z) = \mu(z)Q(z,y)$. Si $Q(y,z) = 0$, alors $Q(z,y) = 0$ et l'égalité est triviale. Si $Q(y,z) > 0$, alors en reprenant le chemin $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ utilisé pour définir $\mu(y)$, on construit un chemin $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y, x_{n+1} = z$ de x à z tel que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $1 \leq n+1$, et par construction de μ on a

$$\mu(z) \;=\; \prod_{i=1}^{n+1} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} \;=\; \mu(y)\frac{Q(y,z)}{Q(z,y)}\,,$$

donc μ est bien réversible.

Exercice 4 (Chaîne de naissance et de mort)
Soit Q la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, ainsi que $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour tout $i \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.
2. On suppose que
$$\sum_{i\geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \;<\; +\infty\,.$$
Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?
3. On pose $f(j) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q_1 \ldots q_i}{p_1 \ldots p_i}$ (avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$) et $\tau = \inf\{n \geq 0 | X_n = 0\}$. Montrer que $f(X_{n\wedge\tau})$ est une martingale, et en déduire que X_n est récurrente si et seulement si
$$\sum_{i\geq 0} \frac{q_1 \ldots q_i}{p_1 \ldots p_i} = +\infty.$$

Solution de l'exercice 4

1. Soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$. On remarque que
$$\begin{aligned} Q^{j-i}(i,j) &\geq Q(i,i+1)\ldots Q(j-1,j) \;=\; p_i \ldots p_{j-1} \;>\; 0 \;\text{ si }\; i < j \\ Q^{i-j}(i,j) &\geq Q(i,i-1)\ldots Q(j+1,j) \;=\; q_i \ldots q_{j+1} \;>\; 0 \;\text{ si }\; i > j \\ Q^2(i,i) &\geq Q(i,i+1)Q(i+1,i) \;=\; p_i q_{i+1} \;>\; 0\,, \end{aligned}$$
donc X est irréductible.
2. Soit π une mesure de probabilité. Elle est réversible ssi pour tout $i \in \mathbb{N}$,
$$\pi(i)p_i \;=\; \pi(i+1)q_{i+1}\,. \tag{2}$$
En effet cette condition est suffisante car si $j \neq i \pm 1$, la condition $\pi(i)Q(i,j) = \pi(j)Q(j,i)$ est triviale. La condition (2) est équivalente à : pour tout $i \in \mathbb{N}$,
$$\pi(i) \;=\; \pi(0) \times \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}. \tag{3}$$

Il suffit donc de vérifier qu'il existe une mesure de probabilité qui satisfait (3). Or

$$s := \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{p_0 \dots p_{i-1}}{q_1 \dots q_i} \in]0, +\infty[$$

par hypothèse, donc on peut poser $\pi(0) = \frac{1}{s}$ pour obtenir $\sum_i \pi(i) = 1$. On en déduit que la mesure π définie par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \pi(i) = \frac{1}{s} \frac{p_0 \dots p_{i-1}}{q_1 \dots q_i}$$

est bien une probabilité réversible pour la chaîne.

La mesure π étant réversible, elle est également invariante. Puisque la chaîne est irréductible et admet une probabilité invariante, on sait qu'elle est aussi récurrente positive.

Si la somme considérée est infinie, π reste une mesure réversible donc invariante, mais sa masse est infinie. Par unicité de la mesure invariante pour une chaîne de Markov irréductible, X n'a donc pas de mesure de proba invariante, donc la condition qu'on a donnée est nécessaire et suffisante.

3. On se fixe un point de départ $x > 0$, et on commence par montrer que $f(X_{n \wedge \tau})$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$ pour $(\mathcal{F}_n)$, où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Si $X_{n \wedge \tau} = 0$, alors $X_{(n+1) \wedge \tau} = 0$, donc

$$\mathbb{E}\left[f(X_{(n+1)\wedge\tau})|\mathcal{F}_n\right] = f(0) = f(X_{n\wedge\tau}).$$

Si $X_{n\wedge\tau} > 0$, alors $X_{(n+1)\wedge\tau} = X_{n+1}$, et sa loi conditionnelle sachant $\mathcal{F}_n$ est la suivante : elle vaut $X_n + 1$ avec proba p_{X_n}, elle vaut X_n avec proba r_{X_n}, et elle vaut $X_n - 1$ avec proba q_{X_n}. On en déduit

$$\mathbb{E}\left[f(X_{(n+1)\wedge\tau})|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n\right] = p_{X_n} f(X_n + 1) + r_{X_n} f(X_n) + q_{X_n} f(X_n - 1).$$

Pour conclure, il suffit donc de vérifier, pour tout $j \geq 1$, la relation

$$p_j f(j+1) + r_j f(j) + q_j f(j-1) = f(j).$$

En remplaçant r_j par $1 - p_j - q_j$, elle équivaut à

$$p_j(f(j+1) - f(j)) = q_j(f(j) - f(j-1)),$$

qui est facile à vérifier.

Si la somme considérée est finie, alors f est bornée, donc la martingale $f(X_{n\wedge\tau})$ converge p.s. et dans L^1 vers une limite M_∞ avec $\mathbb{E}[M_\infty] = f(x) > 0$ (on rappelle qu'on a choisi un point de départ $x > 0$). En particulier, on a $\mathbb{P}_x(M_\infty > 0) > 0$. Mais si $M_\infty > 0$, alors forcément $\tau = +\infty$. On a donc $\mathbb{P}_x(\tau = +\infty) > 0$, donc la chaîne X est transiente.

Si au contraire la somme est infinie, alors $\lim_{j\to+\infty} f(j) = +\infty$. De plus, $f(X_{n\wedge\tau})$ est une martingale positive, donc elle converge p.s.. Par conséquent, $X_{n\wedge\tau}$ est p.s. constante à partir d'un certain rang, donc soit $\tau < +\infty$, soit X_n est constante à partir d'un certain rang. Le second cas est impossible par irréductibilité, donc $\tau < +\infty$ p.s. et la chaîne est récurrente.

Exercice 5 (Temps de départ)
Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. On suppose que $Q(x, x) < 1$ pour tout $x \in E$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq0}$ la filtration canonique et on définit

$$\tau = \inf\{n \geq 1,\ X_n \neq X_0\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ est fini $\mathbb{P}_x$-p.s. Calculer les lois de τ et de X_τ sous $\mathbb{P}_x$.
2. On définit une suite de variables $(\tau_k)_{k\geq0}$ par

$$\tau_0 = 0,\ \tau_1 = \tau,\ \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k,\ X_n \neq X_{\tau_k}\}.$$

Montrer que les τ_k sont des temps d'arrêt finis $\mathbb{P}_x$-p.s.

3. On définit un processus (Y_n) par $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente. Montrer que (Y_n) est aussi irréductible récurrente.
5. Soit μ une mesure invariante pour (X_n). A partir de μ, construire une mesure ν invariante pour (Y_n).

Solution de l'exercice 5

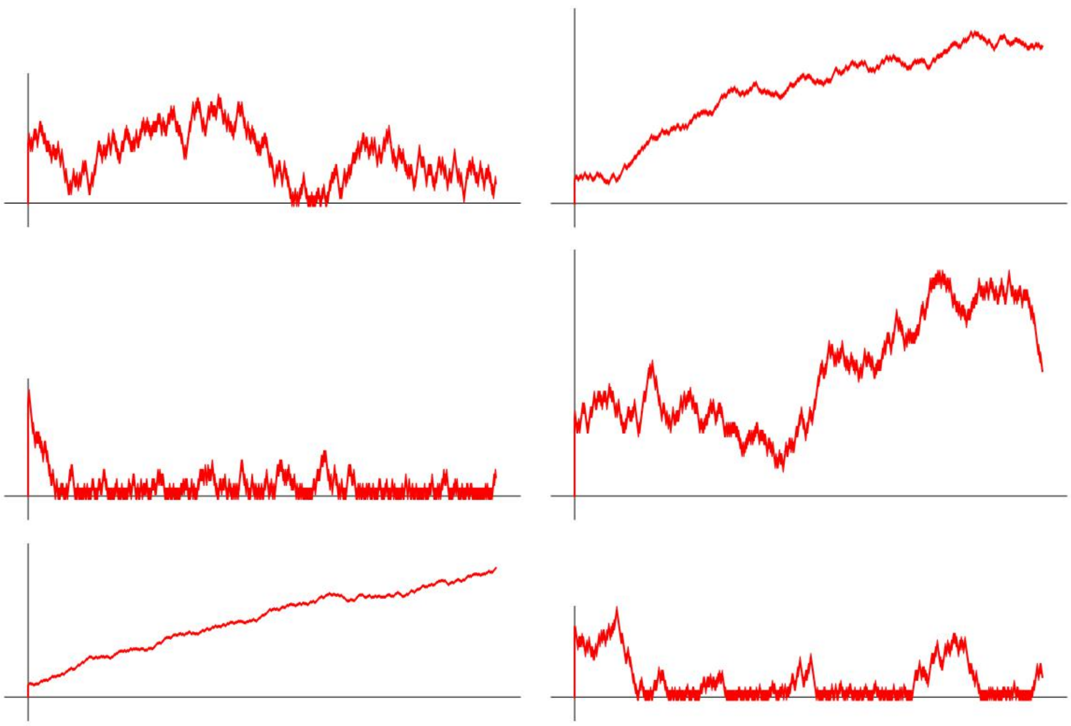
1. Pour tout $n \geq 0$, on a $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{X_n \neq X_0\} \in \mathcal{F}_n$ donc τ est bien un temps d'arrêt. De plus, pour tout $n \geq 0$,
$$\mathbb{P}_x(\tau > n) = \mathbb{P}_x(X_0 = X_1 = \cdots = X_n) = Q(x,x)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$
donc $\tau < +\infty$ p.s.
2. On montre par récurrence sur k que τ_k est un temps d'arrêt. On l'a montré pour $k = 1$ dans la question précédente. De plus, pour tout $n \geq 0$ on a
$$\{\tau_{k+1} \leq n\} = \bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{i=j+1}^{n} \{\tau_k = j, X_i \neq X_j\} \in \mathcal{F}_n$$
par hypothèse de récurrence, donc τ_{k+1} est un temps d'arrêt. On montre également par récurrence sur k que τ_k est fini P_x-p.s. On l'a montré pour $k = 1$ dans la question précédente. De plus, si τ_k est fini P_x-p.s., alors $\tau_{k+1} = \tau_1 \circ \theta_{\tau_k}$ donc d'après la propriété de Markov forte appliquée à τ_k,
$$\mathbb{P}_x(\tau_{k+1} < +\infty) = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{\tau_1 < +\infty} \circ \theta_{\tau_k} \mathbb{1}_{\tau_k < +\infty}\right] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{X_{\tau_k}}\left[\mathbb{1}_{\tau_1 < +\infty}\right] \mathbb{1}_{\tau_k < +\infty}\right] = \mathbb{E}_x\left[1 \times \mathbb{1}_{\tau_k < +\infty}\right] = 1.$$
3. Soient $y_0 = x, y_1, \ldots, y_k \in E$ tels que $y_{i+1} \neq y_i$ pour tout i. On a
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_k) \\
&= \sum_{t_1,\ldots,t_k \geq 1} \mathbb{P}(Y_0 = y_0, \tau_1 = t_1, Y_1 = y_1, \tau_2 - \tau_1 = t_2, \ldots, \tau_k - \tau_{k-1} = t_k, Y_k = y_k) \\
&= \sum_{t_1,\ldots,t_k \geq 1} \mathbb{P}(X_0 = \cdots = X_{t_1 - 1} = y_0, X_{t_1} = \cdots = X_{t_1+t_2-1} = y_1, \ldots, X_{t_1+t_2+\cdots+t_k} = y_k) \\
&= \sum_{t_1,\ldots,t_k \geq 1} Q(y_0,y_0)^{t_1-1} Q(y_0,y_1) Q(y_1,y_1)^{t_2-1} \ldots Q(y_{k-1},y_{k-1})^{t_k-1} Q(y_{k-1},y_k) \\
&= \frac{Q(y_0,y_1)}{1 - Q(y_0,y_0)} \cdots \frac{Q(y_{k-1},y_k)}{1 - Q(y_{k-1},y_{k-1})}.
\end{aligned}$$
Le processus Y est donc bien une chaîne de Markov, de matrice de transition $P(x,y) = \frac{Q(x,y)}{1-Q(x,x)}$ pour $x \neq y$ et $P(x,x) = 0$.
4. Soient $x \neq y \in S$. Comme X est irréductible, il existe $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ tels que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Quitte à retirer x_i quand $x_i = x_{i-1}$, on peut de plus supposer $x_i \neq x_{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a alors $P(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, donc Y est bien irréductible. Par ailleurs, comme tous les τ_k sont finis, un sommet est visité une infinité de fois par Y ssi il est visité une infinité de fois par y, donc Y est récurrente.
5. Pour tout $x \in E$, on pose $\nu(x) = (1 - Q(x,x))\,\mu(x)$. Pour tout $y \in E$, on a alors
$$\begin{aligned}
\sum_{x \in E} \nu(x) P(x,y) &= \sum_{x \in E \setminus \{y\}} (1 - Q(x,x))\,\mu(x) \frac{Q(x,y)}{1 - Q(x,x)} \\
&= \left(\sum_{x \in E} \mu(x) Q(x,y)\right) - \mu(y) Q(y,y) \\
&= \mu(y) - \mu(y) Q(y,y) \\
&= \nu(y),
\end{aligned}$$

donc ν est bien invariante pour Y.

Exercice 6
Les jolies images ci-dessous sont des illustrations de l'exercice 4 (jusqu'à $n = 1000$, avec $X_0 = 20$ à chaque fois, les échelles verticales changent d'une image à l'autre). On a pris à chaque fois $r_i = 0$, et on a testé les valeurs suivantes pour $i \geq 1$:

1. $p_i = \frac{2}{5}$
2. $p_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}$
3. $p_i = \frac{1}{2}$
4. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$
5. $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}}$
6. $p_i = \frac{3}{5}$

Retrouver l'image qui correspond à chaque cas.



Solution de l'exercice 6

— La première correspond à $p_i = \frac{1}{2}$. C'est la marche aléatoire simple, réfléchie en 0. Elle est récurrente nulle.

— La seconde correspond à $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{i}}$. Elle est transiente, et on peut vérifier que $X_n \sim \left(\frac{3n}{2}\right)^{2/3}$ p.s..

— La troisième correspond à $p_i = \frac{2}{5}$. Elle est récurrente positive.

— La quatrième correspond à $p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2i}$. C'est la marche aléatoire "conditionnée à rester positive" (cf. jolie image du TD 5). Elle est transiente, mais on a $X_n \approx \sqrt{n}$ comme pour la marche simple.

— La cinquième correspond à $p_i = \frac{3}{5}$. Elle est transiente et d'après la loi des grands nombres, on a $X_n \sim \frac{n}{5}$ p.s..

— La sixième correspond à $p_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2i}$. Elle est récurrente positive comme la troisième, mais met un peu plus de temps à "redescendre" en partant de haut.