TD 12 – Lemmes de Borel–Cantelli et convergences

1 – Petites questions

Soit $X, X_0, X_1, \ldots$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots$ des mesures finies sur $\mathbb{R}$.

1. Supposons que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. A-t-on $f(X_n) \to f(X)$ en loi ?
2. Supposons que pour tout $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, $\int f \, \mathrm{d}\mu_n \to \int f \, \mathrm{d}\mu$. Y a-t-il convergence étroite de $(\mu_n)_{n\geq 0}$ vers μ ?
3. Supposons que pour tout $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$. Y a-t-il convergence en loi de $(X_n)_{n\geq 0}$ vers X ?
4. Supposons que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X. A-t-on $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$?

2 – Lemmes de Borel–Cantelli et loi du 0–1 de Kolmogorov

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ positives, indépendantes et de même loi.

1. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X_0] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_0 \geq \alpha n) < \infty.$$

2. En déduire la dichotomie suivante :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty, \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty, \end{cases}$$

presque sûrement.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour $n \geq 1$, on définit

$$L_n := \max\{k \geq 1 \mid \exists i \leq n-k : X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\},$$

la longueur de la plus grande série de 1 successifs obtenue avant l'instant n. Montrer que

$$\frac{L_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\ln 2},$$

presque sûrement.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge presque sûrement ou diverge presque sûrement.
2. Supposons à présent que les variables aléatoires X_n sont positives et identiquement distribuées. Montrer que $\sum_{n\geq 0} X_n = \infty$ presque sûrement, sauf dans un cas à préciser.

3 – Loi des grands nombres

Exercice 4. (*Théorème de Bernstein-Weierstrass*) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. Le n^{e} *polynôme de Bernstein* de f est défini par

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer sans calcul que B_n converge simplement vers f.
2. Montrer que B_n converge uniformément vers f.

4 – Convergence en loi

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que la suite $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.

Exercice 6. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires constantes, respectivement égales p.s. à $x_n \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X$ en loi quand $n \to \infty$ si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, respectivement de loi exponentielle de paramètre n.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.
3. On suppose ici que les variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Calculer $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n \geq Z_1)$. Commenter.

Exercice 8. (*Loi des grands nombres, cas non intégrable*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que
$$\mathbb{E}[|X_1|] \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n).$$
2. En déduire que, si X_1 n'est pas intégrable, alors la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ diverge presque sûrement.

Exercice 9. (*Mesure empirique*) Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes de loi μ. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k},$$

qui est une mesure aléatoire appelée *mesure empirique* associée à l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que la mesure empirique converge vers la vraie mesure, c'est-à-dire qu'à partir des observations X_k, on arrive à retrouver la loi inconnue μ.

1. Montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est séparable pour la norme infini.
2. Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ et ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit H une partie dense de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ pour la norme infini. Montrer que ν_n converge étroitement vers ν si et seulement si
$$\forall h \in H, \quad \int_{\mathbb{R}} h \, \mathrm{d}\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} h \, \mathrm{d}\nu.$$
3. Montrer que presque sûrement, μ_n converge étroitement vers μ quand $n \to \infty$.

Exercice 10. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1 et on suppose que X_1 n'est pas p.s. constante. On pose $\alpha := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ et $\beta := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

1. Montrer que $\alpha < \beta$, que $\alpha \neq +\infty$ et que $\beta \neq -\infty$.
2. Montrer que
$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} X_n = \beta,$$
presque sûrement.

Exercice 11. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \geq 1$, la probabilité de l'ensemble des multiples de n soit égale à $1/n$.

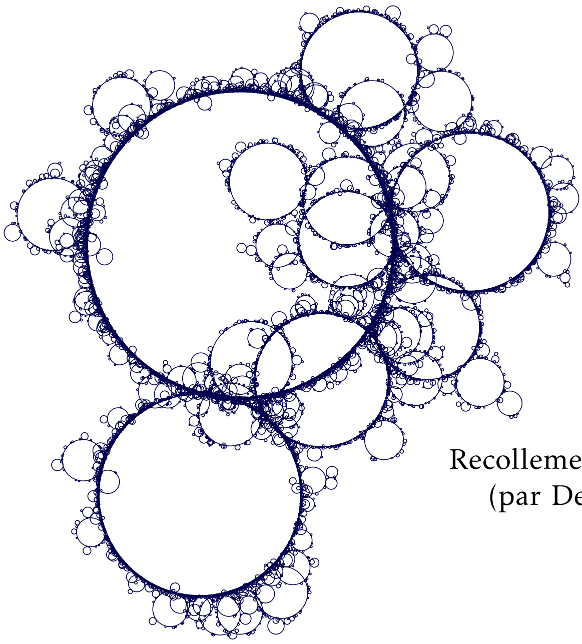
Exercice 12. (*Retours en 0 de la marche aléatoire simple asymétrique*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ tel que $p \neq 1/2$. On considère $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$. Montrer que presque sûrement le nombre de passages en 0 de la marche $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fini.

Exercice 13.

1. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une mesure de probabilité μ_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :
$$\mu_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu([k/n, (k+1)/n[)\delta_{k/n}.$$
Montrer que μ_n converge étroitement vers μ quand $n \to \infty$.
2. En déduire que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, respectivement de loi géométrique de paramètre $\mathrm{e}^{-1/n}$, alors la suite $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Exercice 14.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite de
$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$
quand $n \to \infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue bornée et $\lambda > 0$. Déterminer la limite de
$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
quand $n \to \infty$.



Recollement aléatoire de cercles
(par Delphin Sénizergues)

Fin