Géométrie Différentielle, TD 12 du 27 mai 2014

1. $SU(2)$ et $SO(3)$

1– Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$.

2– Soit V l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur V qui soit invariant par l'action naturelle de $SU(2)$ sur V.

3– En déduire l'existence d'un morphisme injectif de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

4– Montrer qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme de groupes de Lie.

5– Montrer que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

6– En déduire la cohomologie de de Rham de $SO(3)$.

7– Expliciter des formes différentielles bi-invariantes sur $SO(3)$ qui représentent les classes de cohomologie de $SO(3)$. On pourra considérer $(X, Y, Z) \mapsto \mathrm{Tr}(XYZ - XZY)$.

2. Exponentielle de matrice

1– Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ est une application C^∞, et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que $T_0 \exp = \mathrm{Id}$.

2– Soient G un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, de telle sorte que $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$. Si G est connexe, montrer que $\exp(\mathfrak{g})$ engendre G.

3– Dans le cas de $G = SO(n)$, montrer que l'exponentielle est surjective. En revanche, pour $G = SL(2, \mathbb{R})$, montrer que ce n'est pas le cas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace $\geqslant -2$).

4– Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre l'espace des matrices symétriques réelles et l'espace des matrices symétriques réelles définies positives.

5– Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons L_M et R_M les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par M, agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d\exp_M = \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$ et $\mathrm{ad}\, M = L_M - R_M$, puis en déduire que

$$\exp(-M) d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}.$$

6– Montrer que $d\exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{ad}\, M$ n'a pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

3. Décompositions de $GL(n, \mathbb{R})$

1– Soient $\mathcal{A}$ le groupe des matrices réelles diagonales ayant des valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{N}$ le groupe des matrices réelles triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{A} \times \mathcal{N} & \to & GL(n, \mathbb{R}) \\ (K, A, N) & \mapsto & KAN \end{array} \right.$ est un difféomorphisme C^∞.

2– Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{S} & \to & GL(n, \mathbb{R}) \\ (K, S) & \mapsto & KS \end{array} \right.$ est un difféomorphisme C^∞.

3– En utilisant l'exercice précédent, en déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $SO(n) \times \mathbb{R}^{(n+2)(n-1)/2}$.

4. Espace hyperbolique réel

Soit $n \geqslant 1$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$q(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On note $O(1, n)$ le groupe orthogonal de cette forme quadratique et $SO_0(1, n)$ la composante connexe de l'identité de $O(1, n)$. On considère $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des $x = (x_0, \ldots, x_n)$ tels que $q(x) = 1$ et $x_0 > 0$: c'est l'espace hyperbolique réel de dimension n.

1– Montrer que $SO_0(1, n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

2– Quel est le stabilisateur d'un point de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ pour cette action ?

3– Construire un morphisme de groupes surjectif $\Phi : O(1, n) \to \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$.

4– En déduire le nombre de composantes connexes de $O(1, n)$.

5. Quaternions

1– Montrer que les matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$ forment une algèbre à division de dimension réelle 4 ; on la note $\mathbb{H}$, c'est l'algèbre des quaternions.

2– Montrer que det est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{H}$.

3– Montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathbb{H}$.

4– On note $\mathbb{H}^1$ les quaternions de déterminant 1. Montrer que $\mathbb{H}^1$ est un groupe de Lie isomorphe à $\mathrm{SU}(2)$.

5– On identifie $\mathbb{R}^3$ aux quaternions de trace nulle. Si s est un quaternion de déterminant 1 et h un quaternion de trace nulle, on pose $\rho(s)(h) = shs^{-1}$. Montrer que cette action induit un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

6– On considère l'action ρ' de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{H}$ définie par $\rho'(s, t)(q) = sqt^{-1}$. En déduire un isomorphisme de groupes de Lie $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \to \mathrm{SO}(4)$.

7– Construire un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{PSO}(4)$.