Géométrie Différentielle, TD 12 du 27 mai 2014

1. $SU(2)$ et $SO(3)$

1– Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$.

2– Soit V l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur V qui soit invariant par l'action naturelle de $SU(2)$ sur V.

3– En déduire l'existence d'un morphisme injectif de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

4– Montrer qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme de groupes de Lie.

5– Montrer que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

6– En déduire la cohomologie de de Rham de $SO(3)$.

7– Expliciter des formes différentielles bi-invariantes sur $SO(3)$ qui représentent les classes de cohomologie de $SO(3)$. On pourra considérer $(X, Y, Z) \mapsto \mathrm{Tr}(XYZ - XZY)$.

Solution :

1– Soit $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$. L'égalité ${}^t\bar{x}x = I_2$ donne $|a|^2 + |c|^2 = 1$ et $|b|^2 + |d|^2 = 1$. L'égalité $x^t\bar{x} = I_2$ donne aussi $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Ainsi, $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$.

De plus, $1 = \det(x) = ad - bc$. Par Cauchy-Schwarz,

$$1 \leqslant |ad| + |bc| = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz montre que $ad \in \mathbb{R}_+$ et $bc \in \mathbb{R}_-$. Ainsi, si $a = re^{i\theta}$, on a $d = re^{-i\theta}$, et si $b = r'e^{i\theta'}$ on a $c = -r'e^{-i\theta'}$. On a montré que x était de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3$. Réciproquement, une telle matrice appartient bien à $SU(2)$. Ainsi, la formule ci-dessus définit un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^3$ et $SU(2)$.

2– L'espace V est l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Ainsi, $SU(2)$ agit naturellement sur V par conjugaison (c'est l'action Ad). Un élément $X = \begin{pmatrix} ix & -y + iz \\ y + iz & -ix \end{pmatrix}$ de V a pour déterminant $x^2 + y^2 + z^2$. On définit alors une norme euclidienne sur V par $\|X\| = \sqrt{\det(X)}$. Comme la conjugaison ne modifie pas le déterminant, cette norme est invariante sous l'action de $SU(2)$.

3– Soit $\Phi = \mathrm{Ad} : SU(2) \to GL(V)$. Pour la norme de la question précédente, Φ prend ses valeurs dans $O(V)$. Comme $SU(2)$ est connexe, on a même $\Phi(SU(2)) \subset SO(V)$. De plus, $\Phi : SU(2) \to SO(V)$ est C^∞ car polynomiale, c'est donc un morphisme de groupes de Lie.

Si $g \in \ker(\Phi)$, alors g commute avec toutes les matrices de V. En particulier, g commute avec toutes les matrices antisymétriques réelles (prendre $x = z = 0$) et toutes les matrices symétriques rélles (prendre $y = 0$ et diviser par i, ajouter alors λI_2). Ainsi, g commute avec toutes les matrices réelles, c'est donc une homothétie, puis $g = \pm I_2$. Ainsi, Φ engendre un morphisme injectif $\widetilde{\Phi} : SU(2)/\{\pm I_2\} \to SO(V)$.

4– Par homogénéité, $\widetilde{\Phi}$ est un morphisme de rang constant ; par forme normale et vu son injectivité, c'est une immersion. Ces deux groupes de Lie sont de même dimension 3, donc $\widetilde{\Phi}$ est un difféomorphisme local. En particulier, l'image de $\widetilde{\Phi}$ est un sous-groupe ouvert de $SO(V)$, et il est donc égal à $SO(V)$ par connexité. On a montré que $SO(V)$ était difféomorphe à $SU(2)/\{\pm 1\}$.

5– D'après la question précédente, $SO(V)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3/\{\pm \mathrm{Id}\} = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

6– On connaît la cohomologie des espaces projectifs réels : $H^0(SO(3)) = \mathbb{R}$, $H^1(SO(3)) = 0$, $H^2(SO(3)) = 0$ et $H^3(SO(3)) = \mathbb{R}$.

7– Les formes différentielles bi-invariantes correspondent aux formes alternées sur l'algèbre de Lie invariantes par l'action adjointe (par conjugaison) du groupe. Il faut donc trouver une 0-forme alternée et une 3-forme alternée sur l'algèbre de Lie de $SO(3)$ qui soient non triviales et invariantes par l'action adjointe. (On rappelle que cette algèbre de Lie est constituée des matrices antisymétriques).

La 0-forme alternée est évidente : c'est la forme constante égale à 1.

Comme 3-forme alternée, on peut prendre $(X, Y, Z) \mapsto \mathrm{Tr}(XYZ - XZY)$.

2. Exponentielle de matrice

1– Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ est une application C^∞, et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que $T_0 \exp = \mathrm{Id}$.

2– Soient G un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, de telle sorte que $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$. Si G est connexe, montrer que $\exp(\mathfrak{g})$ engendre G.

3– Dans le cas de $G = SO(n)$, montrer que l'exponentielle est surjective. En revanche, pour $G = SL(2, \mathbb{R})$, montrer que ce n'est pas le cas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace $\geqslant -2$).

4– Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre l'espace des matrices symétriques réelles et l'espace des matrices symétriques réelles définies positives.

5– Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons L_M et R_M les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par M, agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d\exp_M = \sum_{p,q \geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$ et

$\operatorname{ad} M = L_M - R_M$, puis en déduire que

$$\exp(-M) d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} M)^k}{(k+1)!}.$$

6– Montrer que $d\exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{ad} M$ n'a pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

Solution :

1– La fonction exponentielle est une série entière de domaine de convergence $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc analytique, et en particulier C^∞, comme fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est donc C^∞ comme fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL(n, \mathbb{R})$.

Comme $\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$, on a

$$d\exp_M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} M^k X M^{n-k-1}}{n!} \tag{1}$$

(attention à la non commutativité du produit !). En particulier, $d\exp_0 = \mathrm{Id}$.

2– L'exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to GL(n, \mathbb{R})$ est C^∞ et immersive en 0, par la question précédente. Comme elle prend ses valeurs dans G, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est encore C^∞ et immersive en 0. Comme $\mathfrak{g}$ et G sont de même dimension, c'est un difféomorphisme local en 0. En particulier, $\exp(\mathfrak{g})$ contient un voisinage ouvert de I_n dans G.

Soit H le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{g})$. Il contient un voisinage ouvert de 0, et est donc ouvert. Son complémentaire est réunion de classes à gauche de H, et est donc également ouvert, si bien que H est fermé. Par connexité, $H = G$.

3– Soit $x \in SO(n)$. Il existe une matrice orthogonale M telle que MxM^{-1} soit diagonale par blocs égaux à 1 ou de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ces blocs sont respectivement l'exponentielle de 0 et $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ (en complexe, le bloc $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est conjugué à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, qu'il est facile d'écrire comme une exponentielle de matrice, et on revient ensuite en réel). Il existe donc une matrice antisymétrique X telle que $MxM^{-1} = \exp(X)$. Finalement, $x = \exp(M^{-1}XM)$.

Montrons que, pour $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, i.e., $\operatorname{tr}(X) = 0$, alors $\operatorname{tr}(\exp(X)) \geqslant -2$. Si X a deux valeurs propres réelles, elles sont de la forme a et $-a$, et on a $\operatorname{tr}(\exp(X)) = e^a + e^{-a} \geqslant 0$. Sinon, les valeurs propres a et $-a$ de X sont complexes conjuguées, et elles sont donc imaginaires pures, i.e. $a = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. En particulier, $\operatorname{tr}(\exp(X)) = e^{ib} + e^{-ib} =$

$2\cos(b) \geqslant -2$. Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1/10 \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$ n'appartient pas à $\exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$.

4– En diagonalisant une matrice symétrique dans une base orthonormée, on vérifie que son exponentielle est symétrique définie positive Réciproquement, soit M symétrique définie positive. En la diagonalisant dans une base orthonormée, puis en prenant le logarithme des valeurs propres, on construit une matrice symétrique X telle que $\exp(X) = M$. De plus, si P est le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vaut $\log(\lambda_i)$ aux valeurs propres λ_i de M, on a $X = P(M)$.

Montrons que X est l'unique antécédent de M par l'exponentielle. Si $M = \exp(X')$, alors X' commute avec M, donc avec tous les polynômes en M, donc avec X. En particulier, $\exp(X' - X) = \exp(X')\exp(X)^{-1} = I_n$. En diagonalisant $X' - X$, on en déduit que $X' - X = 0$.

Ainsi, det réalise une bijection entre l'espace des matrices symétriques et l'espace des matrices symétriques définies positives. Il reste à vérifier que c'est un difféomorphisme.

Soit M une matrice symétrique, montrons que exp est une immersion en M. Quitte à diagonaliser M, on peut supposer que $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La formule (1) montre alors que
$$d\exp_M(A)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!} A_{ij}.$$
Il suffit donc de vérifier que les coefficients $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!}$ sont non nuls. Si $\lambda_i = \lambda_j$, ce coefficient est égal à e^{λ_i}, et il n'y a rien à faire. Sinon, le coefficient est égal à
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\lambda_i^n - \lambda_j^n}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \neq 0.$$
Ainsi, $d\det$ est partout inversible sur l'espace des matrices symétriques. En particulier, det est un difféomorphisme local, et donc une application ouverte. Sa réciproque est donc continue, ce qui conclut la preuve.

5– L'équation (1) peut se réécrire $d\exp_M = \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$. De plus, l'équation $\mathrm{ad}\, M = L_M - R_M$ (i.e. $\mathrm{ad}(M)X = MX - XM$) a été démontrée en cours. Notons de plus que les opérateurs L_M et R_M commutent.

Supposons tout d'abord $L_M - R_M$ inversible. Alors
$$\begin{aligned} d\exp_M &= \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{L_M^n - R_M^n}{L_M - R_M} = \frac{1}{L_M - R_M} (\exp(L_M) - \exp(R_M)) \\ &= \frac{1}{\mathrm{ad}\, M} \exp(L_M) (\mathrm{Id} - \exp(-\mathrm{ad}\, M)) = \exp(L_M) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}, \end{aligned}$$
ce qui est le résultat recherché.

Notons que cette preuve n'utilise que le fait que L_M et R_M commutent. Lorsque $L_M - R_M$ n'est pas inversible, le même argument s'applique donc à $L_M + \lambda\,\mathrm{Id}$ et R_M avec $\lambda > 0$ assez petit, de telle sorte que $L_M - R_M + \lambda\,\mathrm{Id}$ soit inversible. On conclut ensuite en faisant tendre λ vers 0.

6– Si $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$ sont les valeurs propres complexes de $\mathrm{ad}\, M$, la formule de la question précédente montre que les valeurs propres complexes de $\exp(-M) d \exp_M$ sont $\frac{1-e^{-\lambda_k}}{\lambda_k}$ si $\lambda_k \neq 0$, et 1 si $\lambda_k = 0$. Ainsi, cet opérateur est inversible si et seulement si les valeurs propres non nulles satisfont $e^{-\lambda_k} \neq -1$, i.e. $\lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.

3. Décompositions de $GL(n, \mathbb{R})$

1– Soient $\mathcal{A}$ le groupe des matrices réelles diagonales ayant des valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{N}$ le groupe des matrices réelles triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{A} \times \mathcal{N} & \to & GL(n, \mathbb{R}) \\ (K, A, N) & \mapsto & KAN \end{array} \right.$ est un difféomorphisme C^∞.

2– Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{S} & \to & GL(n, \mathbb{R}) \\ (K, S) & \mapsto & KS \end{array} \right.$ est un difféomorphisme C^∞.

3– En utilisant l'exercice précédent, en déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $SO(n) \times \mathbb{R}^{(n+2)(n-1)/2}$.

Solution :

1– Soit $M \in GL(n, \mathbb{R})$. En orthogonalisant ses colonnes, on vérifie qu'il existe des matrices K orthogonale et D triangulaire supérieure avec des coefficients > 0 sur la diagonale, telles que $M = KD$. Comme D s'écrit aisément sous la forme AN, on obtient la surjectivité de Φ.

Si $KAN = K'A'N'$, alors ${}^tK'K = A'N'N^{-1}A^{-1}$. La matrice ${}^tK'K$ est orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, c'est donc l'identité, et $K' = K$. Cela implique aisément que $A = A'$ et $N = N'$. Ainsi, Φ est une bijection.

On va montrer que Φ est un difféomorphisme local. En particulier, l'image d'un ouvert sera ouverte par le théorême d'inversion locale, donc Φ^{-1} sera continue et cela conclura la preuve.

Soient $(K, A, N) \in O(n) \times \mathcal{A} \times \mathcal{N}$. Alors $T_K O(n) = \{U \mid {}^tUK + {}^tKU = 0\}$ est de dimension $n(n-1)/2$, tandis que $T_A\mathcal{A}$ est constitué des matrices diagonales, de dimension n, et $T_N\mathcal{N}$ est constitué des matrices triangulaires supérieures strictes, de dimension $n(n-1)/2$. Comme $n(n-1)/2 + n + n(n-1)/2 = n^2$, les dimensions coïncident et il suffit de vérifier que $T_{(K,A,N)}\Phi$ est injective.

Soient U, V, W telles que $T_{(K,A,N)}\Phi(U, V, W) = 0$, i.e. $UAN + KVN + KAW = 0$, i.e. ${}^tKUAN + VN + AW = 0$. Soit $U' = {}^tKU$ antisymétrique, avec $U' = -(VN + AW)N^{-1}A^{-1}$. En particulier, U' est triangulaire supérieure. Par antisymétrie, $U' = 0$, puis $U = 0$. Ainsi, $VN + AW = 0$. Comme W est triangulaire supérieure stricte, les coefficients diagonaux de AW sont nuls, et les coefficients diagonaux de VN également. Mais ces coefficients sont ceux de V, donc $V = 0$. Finalement, on obtient aussi $W = 0$, ce qui conclut.

2– Soit $M \in GL(n, \mathbb{R})$. La matrice ${}^tMM$ est alors symétrique définie positive. En la diagonalisant dans une base orthonormée puis en prenant la racine carrée de chaque coefficient sur la diagonale, on obtient une matrice symétrique définie positive S telle que ${}^tMM = S^2 = {}^tSS$. Alors $K = MS^{-1}$ satisfait ${}^tKK = I_n$, i.e., K est orthogonale. On a montré la surjectivité de Φ.

Réciproquement, soient K, S tels que $M = KS$. Alors ${}^tMM = {}^tSS$. Pour démontrer l'unicité de S, il suffit donc de voir que toute matrice A de $\mathcal{S}$ admet une unique racine carrée dans $\mathcal{S}$. Dans l'argument précédent, on a construit une racine S de A, et par construction c'est un polynôme en A (utiliser un polynôme d'interpolation de Lagrange). Si S' est une autre racine carrée, elle commute avec A, donc avec S. En les diagonalisant simultanément, et comme S et S' ont des valeurs propres positives, on en déduit que $S = S'$.

Ainsi, Φ est une bijection. Il reste à montrer que c'est un difféomorphisme. Soient $K \in O(n)$ et $S \in \mathcal{S}$. L'espace tangent à $O(n)$ en K est formé des matrices U telles que ${}^tKU + {}^tUK = 0$, et est de dimension $n(n-1)/2$, tandis que l'espace tangent à $\mathcal{S}$ en S est formé des matrices symétriques, et est de dimension $n(n+1)/2$. Les dimensions coïncident bien, il suffit donc de vérifier que $T_{(K,S)}\Phi$ est une immersion pour conclure.

Soit $(U, V) \in T_KO(n) \times T_S\mathcal{S}$, alors $T_{(K,S)}\Phi(U, V) = KV + US$. Si $T_{(K,S)}\Phi(U, V) = 0$, on a donc $V + {}^tKUS = 0$. Soit $U' = {}^tKU$ antisymétrique, elle vérifie $V + U'S = 0$, donc $U'S$ est symétrique, puis

$$U'S = {}^t(U'S) = {}^tS{}^tU' = -SU'.$$

Quitte à diagonaliser S dans une base orthonormée, on peut supposer que $S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ puisque S est définie positive. L'équation $(U'S)_{ij} = -(SU')_{ij}$ donne alors $(\lambda_i + \lambda_j)U'_{ij} = 0$, puis $U'_{ij} = 0$ car $\lambda_i + \lambda_j > 0$. Ainsi, $U' = 0$, puis $U = KU' = 0$, et enfin $V = -U'S = 0$.

3– L'application Φ se restreint à $SO(n) \times \mathcal{S}$ en un difféomorphisme entre $SO(n) \times \mathcal{S}$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant strictement positif. Notons $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de déterminant 1. Alors Φ se restreint en un difféomorphisme entre $SO(n) \times \mathcal{S}_1$ et $SL_n(\mathbb{R})$. Finalement, l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{S}$ (voir le TD précédent), qui se restreint en un difféomorphisme entre l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle et $\mathcal{S}_1$. Ainsi, $\mathcal{S}_1$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{(n+2)(n-1)/2}$.

4. Espace hyperbolique réel

Soit $n \geqslant 1$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$q(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On note $O(1,n)$ le groupe orthogonal de cette forme quadratique et $SO_0(1,n)$ la composante connexe de l'identité de $O(1,n)$. On considère $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des $x = (x_0, \ldots, x_n)$ tels que $q(x) = 1$ et $x_0 > 0$: c'est l'espace hyperbolique réel de dimension n.

1– Montrer que $SO_0(1,n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

2– Quel est le stabilisateur d'un point de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ pour cette action ?

3– Construire un morphisme de groupes surjectif $\Phi : O(1,n) \to \{-1,1\} \times \{-1,1\}$.

4– En déduire le nombre de composantes connexes de $O(1,n)$.

Solution :

1– Soit $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. On va montrer qu'il peut être envoyé sur $a = (1, 0, \ldots, 0)$ par un élément $M \in SO_0(1,n)$. On procède en deux temps. Tout d'abord, comme $SO(n)$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^{n-1}$, on peut trouver une matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in SO(n)$ envoyant x sur un vecteur de la forme $(x_0, y, 0, \ldots, 0)$. Notons qu'on a bien $M_1 \in SO_0(1,n)$ car $SO(n)$ est connexe. On peut alors écrire $x_0 = \cosh(t)$ et $y = -\sinh(t)$ pour un $t \in \mathbb{R}$. Alors $\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$ envoie (x_0, y) sur $(1, 0)$. En la complétant par un bloc diagonal I_{n-1}, on obtient une matrice M_2 envoyant $(x_0, y, 0, \ldots, 0)$ sur a. De plus, faisant varier t, on voit que $M_2 \in SO_0(1,n)$.
La matrice $M = M_2 M_1$ convient.

2– Le stabilisateur de a dans $SO_0(1,n)$ est $SO(n)$; ainsi, on a $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} = SO_0(1,n)/SO(n)$.

3– On remarque que la quadrique $\{x | q(x) = 1\}$ est réunion disjointe de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et $-\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. La question précédente montre que ce sont ces composantes connexes, par connexité de $SO_0(1,n)$. Ainsi un élément de $O(1,n)$ peut préserver $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, ou bien échanger ces deux composantes connexes.
On définit une application $\Phi : O(1,n) \to \{-1,1\} \times \{-1,1\}$ par $\Phi(M) = (1, \det M)$ si M préserve $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et $\Phi(M) = (-1, \det M)$ sinon.
La multiplicativité du déterminant, et la discussion ci-dessus montrent que Φ est un morphisme de groupes.
En complétant les matrices $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon, \delta \in \{-1,1\}$ par un bloc diagonal I_{n-1}, on obtient quatre matrices qui prouvent que Φ est surjective.

4– Montrons que $\Phi^{-1}(1,1) = SO_0(1,n)$. Cela montrera que $O(1,n)$ a quatre composantes connexes, à savoir les quatre fibres de Φ.

Soit M telle que $\Phi(M) = (1,1)$. Par la première question, il existe $M' \in SO_0(1,n)$ telle que $M'M(a) = a$. Alors $M'M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Comme $M'M \in O(1,n)$, on a $L = 0$ et $B \in O(n)$. Comme $\det(M) = 1$, $B \in SO(n)$. Par connexité de $SO(n)$, $M'M \in SO_0(1,n)$. On a donc bien $M \in SO_0(1,n)$.
L'autre inclusion est immédiate.

5. Quaternions

1– Montrer que les matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$ forment une algèbre à division de dimension réelle 4 ; on la note $\mathbb{H}$, c'est l'algèbre des quaternions.

2– Montrer que det est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{H}$.

3– Montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathbb{H}$.

4– On note $\mathbb{H}^1$ les quaternions de déterminant 1. Montrer que $\mathbb{H}^1$ est un groupe de Lie isomorphe à $\mathrm{SU}(2)$.

5– On identifie $\mathbb{R}^3$ aux quaternions de trace nulle. Si s est un quaternion de déterminant 1 et h un quaternion de trace nulle, on pose $\rho(s)(h) = shs^{-1}$. Montrer que cette action induit un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

6– On considère l'action ρ' de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{H}$ définie par $\rho'(s,t)(q) = sqt^{-1}$. En déduire un isomorphisme de groupes de Lie $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \to \mathrm{SO}(4)$.

7– Construire un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{PSO}(4)$.

Solution :

1– La plupart des vérifications sont immédiates. La stabilité par produit se voit par calcul. Le déterminant d'une telle matrice est $|u|^2 + |v|^2$ et est donc un réel strictement positif si la matrice est non nulle. Alors, la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 montre la stabilité par inverse.

2– Soit M un quaternion. Si $u = a + bi$ et $v = c + di$, il vient $\det(M) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. C'est bien une forme quadratique définie positive.

3– Le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est une variété comme ouvert de $\mathbb{H}$. La multiplication matricielle et la formule pour l'inverse d'une matrice 2×2 montrent que le produit et l'inverse sont C^∞. Le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est donc un groupe de Lie. Son algèbre de Lie s'identifie naturellement à $\mathbb{H}$ car c'est un ouvert de $\mathbb{H}$.

4– C'est une vérification directe.

5– C'est précisément ce qu'on a démontré à l'exercice 1 du TD précédent.

6– On obtient un morphisme de groupes de Lie $\Phi : SU(2) \times SU(2) \to GL(\mathbb{H})$. La forme quadratique définie positive det est préservée par cette action (car on fait agir des matrices de déterminant 1). On a donc construit un morphisme de groupes de Lie C^∞ $\Phi : SU(2) \times SU(2) \to O(4)$. Par connexité de $SU(2)$, ce morphisme prend ses valeurs dans $SO(4)$.

Soit $(s, t) \in \ker(\Phi)$. En choisissant $q = \mathrm{Id}$, on voit que $s = t$. En se restreignant aux quaternions de trace nulle et en utilisant la question précédente, il vient $(s, t) = \pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$. On obtient donc un morphisme injectif de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \to \mathrm{SO}(4)$. Par homogénéité, c'est un morphisme de rang constant. Par théorème de forme normale, comme il est injectif, c'est une immersion. Comme ces deux groupes de Lie sont de même dimension 6, c'est ,donc un difféomorphisme local. Son image est alors un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SO}(4)$. Comme $SO(4)$ est connexe, c'est $SO(4)$ tout entier.

7– L'image par l'isomorphisme de la question précédente de $(-\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ est $-\mathrm{Id}$. Passant au quotient par cet élément d'ordre 2, et utilisant l'isomorphisme de la question 5, on obtient bien un isomorphisme $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{PSO}(4)$.