Géométrie Différentielle, TD 12 du 25 mai 2015

1. Orientabilité

1– Soit M une variété différentielle de dimension n. Une *forme volume* sur M est une forme différentielle de degré n, non nulle en tout point. Montrer que M est orientable si et seulement s'il existe une forme volume sur M.

2– Si M est une variété différentielle, montrer que TM est orientable.

3– Soit M une variété différentielle connexe. Soit M^{or} le *fibré des orientations* de M : c'est l'ensemble des couples (x, o), où x est un point de M et o une orientation de T_xM. Munir M^{or} d'une structure de variété différentielle telle que l'application canonique $\pi : M^{or} \to M$ soit un difféomorphisme local et un revêtement à deux feuillets. Montrer que M est orientable si et seulement si M^{or} n'est pas connexe.

2. Bouteille de Klein

On identifie $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on considère $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On introduit $\sigma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 : (\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$.

1– Montrer que $K = \mathbb{T}^2 / \langle \mathrm{Id}, \sigma \rangle$ a une structure naturelle de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2– Montrer que K n'est pas orientable.

3– En admettant que $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{S}^2$ ne sont pas difféomorphes, montrer que K n'est pas difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On pourra identifier $\mathbb{S}^2$ (resp. $\mathbb{T}^2$) au fibré des orientations de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (resp. K).

3. Formule de Cauchy

Dans cet exercice, on considère des fonctions et des formes différentielles à valeurs complexes. Toutes les constructions usuelles sont étendues par $\mathbb{C}$-linéarité. On considère le plan complexe $\mathbb{C}$. On note $dz := dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$. Soit f une fonction lisse de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\bar{\partial} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$.

1– Exprimer la différentielle extérieure de $f(z)dz$ en fonction de $\bar{\partial} f$, dz et $d\bar{z}$.

2– En déduire que f est holomorphe si et seulement si l'intégrale de $f(z)dz$ sur tout cercle est nulle.

4. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

1– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de T_xM,

$$\omega_x(e_1, \ldots, e_d) = 1.$$

2– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

3– Exprimer l'intégrale sur la sphère de cette forme volume, en fonction du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

5. Théorème de Frobenius et lemme de Poincaré

Soit M une variété différentielle et α une forme différentielle de degré 1 sur M. On veut montrer que α s'écrit localement df, avec f une fonction, si α est fermée, i.e. vérifie $d\alpha = 0$.

On considère X la variété $M \times \mathbb{R}$ et, en un point (x,t) de X, on considère $D_{(x,t)}$ le sous-espace de $T_{(x,t)}X$ des vecteurs de la forme $(\xi + \alpha_x(\xi)\partial_t)$, où $\xi \in T_xM$ et ∂_t est le champ de vecteur constant canonique sur $\mathbb{R}$.

1– Montrer que D définit un champ (ou distribution) d'hyperplans sur X.

2– Montrer que D est involutive si, et seulement si, α est fermée.

3– Montrer que si D est intégrable, alors α est localement exacte.

4– Conclure.