Géométrie Différentielle, TD 12 du 25 mai 2015

1. Orientabilité

1– Soit M une variété différentielle de dimension n. Une *forme volume* sur M est une forme différentielle de degré n, non nulle en tout point. Montrer que M est orientable si et seulement s'il existe une forme volume sur M.

2– Si M est une variété différentielle, montrer que TM est orientable.

3– Soit M une variété différentielle connexe. Soit M^{or} le *fibré des orientations* de M : c'est l'ensemble des couples (x, o), où x est un point de M et o une orientation de T_xM. Munir M^{or} d'une structure de variété différentielle telle que l'application canonique $\pi : M^{or} \to M$ soit un difféomorphisme local et un revêtement à deux feuillets. Montrer que M est orientable si et seulement si M^{or} n'est pas connexe.

Solution :

1– On suppose que M admet une forme volume ω. Soit (U, φ) une carte de M, avec U connexe. Notons ν la forme volume canonique sur $\mathbb{R}^n$. Alors, $\varphi^*(\nu)$ est une forme volume sur U. Donc, elle diffère de ω par une fonction de signe constant. Si ce signe est positif, on garde la carte dans l'atlas. Sinon, on l'enlève. les ouverts des cartes conservées recouvrent encore M. En effet, si ψ est un difféomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^n$ renversant l'orientation et si (U, φ) a été enlevé de l'atlas, $(U, \psi \circ \varphi)$ a lui été conservé. Cela prouve qu''il existe un atlas de M avec des changements de cartes à Jacobien positif, donc que M est orientable.

Réciproquement, on suppose que M est orientable et on fixe une orientation. On recouvre M par des ouverts de cartes orientées (U, φ) Alors, les formes $\alpha_U := \varphi^*(\nu)$ sont des formes volume sur U. De plus, sur les intersections $U \cap V$, α_U et α_V diffèrent par une fonction positive. On considère une partition de l'unité (ρ_U) subordonnée au recouvrement. Alors, la forme $\sum \rho_U \alpha_U$ est bien définie et de degré maximal. En tout point, c'est une combinaison linéaire à coefficients positifs de certaines α_{U_i}. Commes ces formes sont de même signe, la forme construite ne s'annule pas et est une forme volume sur M.

2– Soit U un ouvert de M et $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ une carte de M. Soit $T\varphi : TU \to V \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$ la carte de TM associée. Montrons que ces cartes munissent TM d'une structure de variété orientée.

Si ψ est une autre carte de M, l'application de changements de cartes est $T\psi \circ T\varphi^{-1}(x, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), d_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v))$. Sa différentielle en (x, v) est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} d_x(\psi \circ \varphi^{-1}) & \bullet \\ 0 & d_x(\psi \circ \varphi^{-1}) \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant positif.

3– On considère un recouvrement de M par des ouverts de cartes (U, φ) connexes. *Via* φ, les espaces tangents T_xM, avec x dans U héritent de l'orientation naturelle de $\mathbb{R}^n$. Notant o_x cette orientation, l'ensemble U^{or} de M^{or} des couples (x, o_x) avec x dans U est en bijection avec U et on définit $(U^{or}, \varphi \circ \pi$ comme une carte. On vérifie sans difficulté que ceci définit une structure de variété différentielle sur M^{or} ayant les propriétés requises.

Si M est orientable, on peut fixer une orientation et les espaces tangents T_xM ont une orientation canonique, déduite d'une carte orientée quelconque. On en déduit alors un difféomorphisme $M^{or} \to M \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Réciproquement, comme M^{or} est un revêtement à deux feuillets au-dessus de M, s'il n'est pas connexe il est homéomorphe à $M \times \mathbb{Z}/2Z$. On choisit une composante connexe quelconque de M^{or} et on considère uniquement des cartes qui respectent l'orientation choisie. Vu la construction de la topologie de M^{or}, de telles cartes existent et les ouverts forment un recouvrement de M.

2. Bouteille de Klein

On identifie $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on considère $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On introduit $\sigma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 : (\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$.

1– Montrer que $K = \mathbb{T}^2 / \langle \mathrm{Id}, \sigma \rangle$ a une structure naturelle de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2– Montrer que K n'est pas orientable.

3– En admettant que $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{S}^2$ ne sont pas difféomorphes, montrer que K n'est pas difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On pourra identifier $\mathbb{S}^2$ (resp. $\mathbb{T}^2$) au fibré des orientations de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (resp. K).

Solution :

1– L'automorphisme σ est sans point fixe car il change toujours la seconde coordonnée. Le groupe $\langle \mathrm{Id}, \sigma \rangle$ agit donc librement. Il agit de plus proprement car c'est un groupe fini. Le quotient admet donc une structure de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2– Notons π l'application quotient. Supposons par l'absurde que K est orientable et fixons une orientation de K. Comme π est un difféomorphisme local, elle induit une orientation de $\mathbb{T}^2$. Quitte à changer d'orientation, on peut supposer que c'est l'orientation canonique de $\mathbb{T}^2$ (i.e. l'orientation produit où les orientations des facteurs sont induites par l'orientation canonique de $\mathbb{R}$). Alors, comme $\pi \circ \sigma = \pi$, σ préserve l'orientation de $\mathbb{T}^2$. Cependant, lu dans des cartes orientées adéquates, $\sigma :]-\pi; \pi[\times]-\pi; \pi[\to]-\pi; \pi[\times]0; 2\pi[$ a pour expression $(\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$ qui est de déterminant -1 donc négatif. L'automorphisme σ ne préserve donc pas l'orientation de $\mathbb{T}^2$. C'est absurde.

3– Si X est une variété, on définit son fibré des orientations $\widetilde{X}$ comme l'ensemble des couples (x, o) où x est dans X et o est une orientation de $T_x M$. On munit aisément $\widetilde{X}$ d'une structure de variété rendant lisse la projection canonique $\widetilde{X} \to X$. On montre alors que si Y est une variété lisse orientée, munie d'une action libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui ne respecte pas l'orientation, alors Y s'identifie au fibré des orientations de son quotient pour cette action. On conclut en appliquant ce résultat pour $Y = \mathbb{S}^2$ et $Y = \mathbb{T}^2$.

3. Formule de Cauchy

Dans cet exercice, on considère des fonctions et des formes différentielles à valeurs complexes. Toutes les constructions usuelles sont étendues par $\mathbb{C}$-linéarité. On considère le plan complexe $\mathbb{C}$. On note $dz := dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$. Soit f une fonction lisse de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\bar{\partial} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$.

1– Exprimer la différentielle extérieure de $f(z)dz$ en fonction de $\bar{\partial} f$, dz et $d\bar{z}$.

2– En déduire que f est holomorphe si et seulement si l'intégrale de $f(z)dz$ sur tout cercle est nulle.

Solution :

1– On calcule :

$$\begin{aligned} d(f dz) &= d(f(dx + idy)) = (i\partial_x f - \partial_y f) dx \wedge dy \\ &= 2i\bar{\partial} f \frac{1}{2i} dz \wedge d\bar{z} = \bar{\partial} f dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

2– La formule de Stokes donne

$$\int_C f(z)dz = \int_D \bar{\partial} f dz \wedge d\bar{z},$$

pour n'importe quel cercle C bordant un disque D. Si f est holomorphe, le terme de droite est toujours nul. Réciproquement, si f n'est pas holomorphe, il existe un point z_0 tel que $\bar{\partial} f(z_0) \neq 0$. Alors l'intégrale de droite, prise sur un petit disque autour de z_0 est non nulle.

4. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

1– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de $T_x M$,

$$\omega_x(e_1, \ldots, e_d) = 1.$$

2– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

3– Exprimer l'intégrale sur la sphère de cette forme volume, en fonction du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Solution :

1– L'unicité est évidente car la condition détermine ω_x pour tout $x \in M$.

Pour montrer l'existence, il faut vérifier le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de ω. Faisons-le au voisinage de $x \in M$. Pour cela on choisit un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et $F : U \to M$ un paramétrage local orienté de M au voisinage de x. On note $u = F^{-1}(x)$. Soit $(a_1, \ldots, a_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormale directe de $T_x M$. Alors :

$$\begin{aligned}\omega_{F(u)}(T_u F(a_1), \ldots, T_u F(a_d)) &= \det(\langle T_u F(a_i), e_j \rangle_{1 \leqslant i,j \leqslant d}) \\ &= (\det(\langle T_u F(a_i), T_u F(a_j) \rangle_{1 \leqslant i,j \leqslant d}))^{1/2}\end{aligned}$$

où l'on a pris la racine positive, car le paramétrage local respecte les orientations.

On a montré la formule ci-dessous qui prouve, comme voulu, le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de ω :

$$F^* \omega = (\det(\langle T_u F(a_i), T_u F(a_j) \rangle_{1 \leqslant i,j \leqslant d}))^{1/2} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d.$$

Autre preuve : on montre qu'on peut trouver des sections lisses $s_1, \ldots, s_d$ de $T_x M$ formant en tout point une base orthonormée directe : vu la définition de ω, ceci prouvera le caractère lisse. On se ramène à la situation locale suivante : soit U ouvert de $\mathbb{R}^d$ et g une application lisse de U dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille d. Alors il existe d application $a_1, \ldots, a_d$ de U dans $\mathbb{R}^d$ telles que $(a_1(u), \ldots, a_d(u))$ est orthonormée pour $g(u)$ pour tout u. Pour montrer cela, on part d'une base quelconque fixe de $\mathbb{R}^d$ et on applique en tout point le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ; ceci donne une base, dépendant de façon lisse de u, car g est une fonction lisse de u.

2– On vérifie aisément que la forme ω définie sur $\mathbb{S}^{n-1}$ par la formule $\omega_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1})$ vérifie les propriétés requises, et est donc (par unicité) la forme volume canonique sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Que cette forme coïncide avec celle donnée dans l'énoncé résulte juste du développement du déterminant suivant la première colonne.

3– On calcule $d\sigma = n \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. On peut alors appliquer la formule de Stokes : en notant $\mathbb{B}^n$ la boule unité,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma|_{\mathbb{S}^{n-1}} = n \int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

On reconnaît le volume d'une boule connu classiquement (procéder par récurrence sur n, appliquer Fubini, faire un changement de variables trigonométrique et reconnaître une intégrale de Wallis). Tous calculs faits,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

5. Théorème de Frobenius et lemme de Poincaré

Soit M une variété différentielle et α une forme différentielle de degré 1 sur M. On veut montrer que α s'écrit localement df, avec f une fonction, si α est fermée, i.e. vérifie $d\alpha = 0$.

On considère X la variété $M \times \mathbb{R}$ et, en un point (x, t) de X, on considère $D_{(x,t)}$ le sous-espace de $T_{(x,t)}X$ des vecteurs de la forme $(\xi + \alpha_x(\xi)\partial_t)$, où $\xi \in T_xM$ et ∂_t est le champ de vecteur constant canonique sur $\mathbb{R}$.

1– Montrer que D définit un champ (ou distribution) d'hyperplans sur X.

2– Montrer que D est involutive si, et seulement si, α est fermée.

3– Montrer que si D est intégrable, alors α est localement exacte.

4– Conclure.

Solution :

On note n la dimension de n.

1– Clairement, $D_{(x,t)}$ est un sous-espace vectoriel de $T_{(x,t)}X$ de dimension n. Il s'agit donc de vérifier que D varie de façon lisse. Or ceci est équivalent à l'existence (locale) de champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_n$ sur X formant une base de D en tout point. Localement autour de x_0 dans M, on peut prendre n champs de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. Alors $Y_i = v_i + \alpha_x(v_i)\partial_t$ conviennent.

2– Il s'agit calculer le crochet entre deux champs de vecteurs de D. Considérons des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ sur M et notons ∂_i le champ de vecteur suivant x_i. Alors, on peut considérer comme précédemment les champs de vecteurs $Y_i = \partial_i + \alpha_x(\partial_i)\partial_t$. On calcule $[Y_i, Y_j] = (\partial_i\alpha_x(\partial_j) - \partial_j\alpha_x(\partial_i)\partial_t$ (attention dans cette expression, le même symbole ∂_i est vu comme champ de vecteurs et comme dérivation de fonction). Or D intersecte trivialement $\mathbb{R}\partial_t$ donc $[Y_i, Y_j]$ est dans D si, et seulement si, il est nul, i.e. $\partial_i\alpha_x(\partial_j) - \partial_j\alpha_x(\partial_i = 0$. On retrouve l'expression locale de $d\alpha$.

3– Si D est intégrale, soit Y une sous-variété de dimension n de X telle que, dans un voisinage de $(x, 0)$, $T_yY = D_y$, pour tout y dans Y. Comme D intersecte trivialement $\mathbb{R}\partial_t$, la projection de Y sur le facteur M est un difféomorphisme local. Notons $s : X \to Y$ un inverse local. Comme s est une section de la projection, s est de la forme $s(x) = (x, f(x))$, où $x \in M$ et $f(x)$ est une fonction lisse de M dans $\mathbb{R}$. La différentielle de s appliquée en Y vaut $Y + df(Y)\partial_t$ et vit dans D. Vue l'expression de D, on a donc $df(Y) = \alpha(Y)$ pour tout Y. Donc $\alpha = df$.

4– Par le théorème de Frobenius, D est involutive si, et seulement si, elle est intégrable. D'où le résultat.