Processus aléatoires
ENS Paris, 2018-2019

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 12 : Chaînes de Markov : théorème ergodique, fonctions harmoniques
Corrigé

Mercredi 5 Décembre

1 Théorème ergodique

Exercice 1 (Les parapluies)
Michel possède k parapluies qu'il garde soit chez lui, soit dans son bureau. Le matin, avant d'aller au travail, il regarde par la fenêtre le temps qu'il fait :

— s'il fait beau, il ne prend pas de parapluie ;
— s'il pleut et qu'il a un parapluie chez lui, il prend le parapluie et va au travail ;
— s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, il décide de rester chez lui.

Le soir, il fait la même chose (s'il pleut et qu'il n'a pas de parapluies, il décide de rentrer quand même). On suppose que chaque demi-journée, il pleut avec probabilité p et il fait beau avec probabilité $1-p$ avec $0 < p < 1$, et que de plus, les météos des demi-journées sont indépendantes. Michel souhaite ne rater en moyenne qu'une journée de travail par mois. Sachant qu'il pleut 111 jours par an à Paris, combien de parapluies doit-il posséder pour cela ?

Solution de l'exercice 1 Notons X_n le nombre de parapluies que Michel a chez lui le soir du n-ième jour. Chaque jour :

— avec proba $p(1-p)$, il pleut le matin mais pas l'après-midi, auquel cas X_n diminue de 1 (sauf si $X_n = 0$),
— avec proba $p(1-p)$, il pleut l'après-midi mais pas le matin, auquel cas X_n augmente de 1 (sauf si $X_n = k$),
— avec proba $p^2 + (1-p)^2$, il pleut toute la journée ou pas du tout, auquel cas X_n ne change pas (y compris si $X_n = 0$ ou k).

On en déduit que X est une chaîne de Markov sur $\{0, 1, \ldots, k\}$ de matrice de transition Q avec

$$Q(i,j) = \begin{cases} p(1-p) & \text{si } |i-j| = 1, \\ p^2 + (1-p)^2 & \text{si } i = j \notin \{0,k\}, \\ 1 - p(1-p) & \text{si } i = j \in \{0,k\}, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

Cette chaîne de Markov est irréductible car $Q^{|i-j|}(i,j) > 0$ pour tous i, j et apériodique car $Q(0,0) > 0$. Elle admet donc une unique mesure de probabilité stationnaire et converge vers cette mesure stationnaire. On cherche une mesure μ réversible pour Q, i.e. telle que pour tous i et j,

$$\mu(i)Q(i,j) = \mu(j)Q(j,i). \tag{1}$$

La condition 1 est trivialement vérifiée pour $i = j$ (par symétrie) et pour $|i - j| \geq 2$ (les deux membres sont nuls), donc il suffit d'avoir

$$\mu(i)Q(i, i+1) = \mu(i+1)Q(i+1, i)$$

pour tout $0 \leq i \leq k-1$, soit $p(1-p)\mu(i) = p(1-p)\mu(i+1)$, soit $\mu(i+1) = \mu(i)$. Ainsi, la mesure uniforme μ sur $\{0, 1, \ldots, k\}$ est réversible, donc stationnaire, pour Q, donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(0) = \frac{1}{k+1},$$

et

$$\mathbb{P}(\text{Michel reste chez lui le jour } n) = \mathbb{P}(X_n = 0 \text{ et il pleut le } n\text{-ième matin}) = p\,\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{p}{k+1}.$$

Or, il pleut en moyenne 111 jours par an à Paris. On a donc $1 - (1-p)^2 = \frac{111}{365}$, soit $p \approx 0,1658$. Pour ne rater qu'un jour de travail par mois en moyenne, il faut donc $\frac{p}{k+1} \leq \frac{1}{20}$ (4 semaines de 5 jours), donc Michel doit avoir au moins $20p - 1 \approx 2,3$ parapluies, donc au moins 3.

Exercice 2 (Rangement sur une étagère)
Chaque matin, un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, et les choix qu'il fait jour après jour sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans les déranger. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1, 2, 3)$ de gauche à droite ?

Solution de l'exercice 2 Pour tout $n \geq 0$, on note X_n l'ordre des livres au n-ième matin, avant que l'étudiant ne fasse son choix. La variable X_n est à valeurs dans l'espace des permutations

$$S = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}.$$

On note ξ_n le numéro du livre choisi par l'étudiant le n-ième matin. Les $(\xi_n)_{n \geq 0}$ sont des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, on note γ la loi de ξ_1. Pour tout n, la variable X_n est $\sigma(\xi_0, \cdots \xi_{n-1})$-mesurable, donc ξ_n est indépendante de X_n.

On en déduit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans S de matrice de transition Q avec, pour toute permutation (a, b, c) de $(1, 2, 3)$,

$$\begin{cases} Q((a,b,c),(a,b,c)) = \alpha_a, \\ Q((a,b,c),(b,a,c)) = \alpha_b, \\ Q((a,b,c),(c,a,b)) = \alpha_c, \\ Q((a,b,c),(d,e,f)) = 0 \qquad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Cette chaîne est irréductible et apériodique. Elle possède donc une unique mesure de probabilité invariante, que l'on note π. De plus, pour tout $x \in S$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x).$$

On détermine maintenant π. Soit $(a, b, c) \in S$. Comme $\pi Q = \pi$, on a

$$\pi(a,b,c) = \alpha_a \left(\pi(a,b,c) + \pi(b,a,c) + \pi(b,c,a)\right).$$

En particulier, on a $\pi(a,b,c) + \pi(a,c,b) = \alpha_a \sum_{x \in S} \pi(x) = \alpha_a$. Par symétrie, on a donc aussi $\pi(b,a,c) + \pi(b,c,a) = \alpha_b$. On en déduit

$$\pi(a,b,c) = \alpha_a \left(\pi(a,b,c) + \pi(b,a,c) + \pi(b,c,a)\right) = \alpha_a \left(\pi(a,b,c) + \alpha_b\right),$$

donc $\pi(a,b,c) = \frac{\alpha_a \alpha_b}{1 - \alpha_a}$. En particulier $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \alpha_1}$.

Exercice 3 (Monopoly)
Alice et Bob jouent au Monopoly. Comme il n'y a qu'un nombre fini de billets, ils se fixent la règle suivante : si un des deux joueurs doit recevoir de l'argent de la banque mais que la banque n'a pas assez de billets pour lui verser cet argent, il ne le reçoit pas. Montrer que la partie va se terminer presque sûrement.

Solution de l'exercice 3 On peut voir la partie de Monopoly comme une chaîne de Markov sur un très gros espace d'états, où chaque état décrit à la fois la position des joueurs sur le plateau, leur fortune, les terrains/maisons/hôtels qu'ils possèdent, et l'ordre des cartes dans les piles "Chance" et "Caisse de communauté". Bien que très grand, le nombre d'états possibles reste fini (car les fortunes des deux joueurs sont bornées). On ajoute à la chaîne de Markov les deux états $\star_A$ = "la partie est finie et Alice a gagné" et $\star_B$ = "la partie est finie et Bob a gagné". Les états $\star_A$ et $\star_B$ sont absorbants, i.e. $Q(\star_A, \star_A) = Q(\star_B, \star_B) = 1$. De plus, depuis n'importe quel autre état, l'état $\star_A$ ou l'état $\star_B$ est accessible. En effet, on pourrait imaginer que Alice et Bob se retrouvent en prison, soient obligés de payer pour sortir, puis tombent sur la case "Aller en prison" sans recevoir d'argent, et recommencent un très grand nombre de fois. La somme des fortunes des deux joueurs décroît alors strictement, donc une des deux finit par disparaître. Par conséquent, les seules classes de récurrence pour notre chaîne de Markov sont $\{\star_A\}$ et $\{\star_B\}$, donc on finira forcément par atteindre un des deux.

Remarque Si on autorise la banque à distribuer des quantités arbitrairement grandes d'argent, le problème devient beaucoup plus compliqué. Le jeu devrait alors avoir une probabilité strictement positive de ne jamais se finir. Voir par exemple ici pour une étude plus poussée, ou taper "Monopoly Markov chains" sur un moteur de recherche.

2 Chaînes de Markov et fonctions harmoniques

Exercice 4 (Un contre-exemple)
On note G le graphe $\mathbb{Z}^3$, auquel on a recollé en 0 une copie de $\mathbb{N}$. Plus formellement, l'ensemble des sommets de G est $\mathbb{Z}^3 \cup \mathbb{N}^*$, et deux sommets x et y de G sont reliés si et seulement si x et y sont voisins dans $\mathbb{Z}^3$, ou x et y sont voisins dans $\mathbb{N}^*$, ou $x = 0 \in \mathbb{Z}^3$ et $y = 1 \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que toute fonction harmonique bornée sur G est constante.
2. Montrer qu'il existe une fonction harmonique positive non-constante sur G.

Solution de l'exercice 4

1. Soit h une fonction harmonique bornée sur G. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $h(i) = \frac{1}{2}\left(h(i-1) + h(i+1)\right)$ (en faisant l'identification $(0,0,0) = 0$), donc $h(i+1) - h(i)$ ne dépend pas de $i \in \mathbb{N}$, donc h est affine sur $\mathbb{N}$. Comme h est bornée, elle est donc constante sur $\mathbb{N}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{Z}^3 \backslash \{0\}$, les voisins de x sont les mêmes dans G et dans $\mathbb{Z}^3$. Comme h est harmonique sur G, elle est donc harmonique sur $\mathbb{Z}^3 \backslash \{0\}$. Enfin, on a

$$h(0) = \frac{1}{7}\left(h(1) + \sum_{y \text{ voisin de } 0 \text{ dans } \mathbb{Z}^3} h(y)\right). \tag{2}$$

Comme $h(1) = h(0)$, on a donc

$$h(0) = \frac{1}{6} \sum_{y \text{ voisin de } 0 \text{ dans } \mathbb{Z}^3} h(y),$$

donc h est harmonique sur $\mathbb{Z}^3$. Comme on l'a vu dans l'exercice 1 du TD9, toute fonction harmonique bornée sur $\mathbb{Z}^3$ est constante, donc h est constante sur $\mathbb{Z}^3$. On en déduit que h est constante sur G.

2. Tout d'abord, il existe une fonction positive sur $\mathbb{Z}^3$ qui est harmonique sur $\mathbb{Z}^3\backslash\{0\}$: on note (X_n) la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^3$ et, pour $x \in \mathbb{Z}^3$, on pose

$$h(x) = \mathbb{P}_x\left(\exists n \geq 0, X_n = 0\right).$$

En conditionnant sur le premier pas, il est facile de montrer que h est bien harmonique sur $\mathbb{Z}^3\backslash\{0\}$. On a de plus $h(0)10$ et $0 \leq h(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^3$. Il existe alors une unique valeur de $h(1)$ telle que (2) soit vérifiée, et on a $h(1) > 1$. On prend alors $h(n) = 1 + n\left(h(1) - 1\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que h est harmonique sur $\mathbb{N}^*$. La fonction h est alors bien harmonique sur G positive sur G, et non constante.

Exercice 5 (h-transformée d'une chaîne de Markov)
Soit S un ensemble dénombrable et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}^+$, et soit $S_+ = \{x \in S | h(x) > 0\}$. On suppose que h est harmonique sur S^+, i.e. $h(x) = \sum_{y\in S} Q(x,y)h(y)$ pour tout $x \in S^+$. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S | h(x) > 0\}$ par la formule

$$P(x,y) = \frac{h(y)}{h(x)} Q(x,y).$$

Pour tout $x \in S$, on pose $\tau_x = \min\{n \geq 0 | X_n = x\}$.

1. Vérifier que P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur S^+.
2. Soient $x \neq y \in S$. On suppose que X est transiente et que $\mathbb{P}_x\left(\tau_y = +\infty\right) > 0$. On note $\mathbb{P}_x^{(y)} = \mathbb{P}_x\left(\cdot | \tau_y = +\infty\right)$ la loi de X démarrée en x, conditionnée à ne jamais taper y. Montrer que X sous $\mathbb{P}_x^{(y)}$ est une chaîne de Markov, et déterminer sa matrice de transition.
3. Soit X la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Comme dans la question précédente, étudier le processus $\left(X_{n\wedge\tau_0\wedge\tau_N}\right)_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_1\left(\cdot | \tau_N < \tau_0\right)$ pour $N \geq 2$. Proposer une définition de la "marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ conditionnée à rester positive".

Solution de l'exercice 5

1. Pour tout $x \in S^+$, on a

$$\sum_{y\in S^+} P(x,y) = \frac{1}{h(x)} \sum_{y\in S^+} h(y)Q(x,y) = \frac{1}{h(x)} \sum_{y\in S} h(y)Q(x,y) = 1$$

car h est harmonique en x. On en déduit que P est bien une matrice de transition.

2. Pour tout $z \in S$, on pose

$$h(z) = \mathbb{P}_z\left(\tau_y = +\infty\right).$$

Notons que S^+ contient x, mais pas y car $h(y) = 0$. De plus, h est harmonique sur S^+. On va montrer que le processus X sous $\mathbb{P}_x\left(\cdot | \tau_y = +\infty\right)$ est une chaîne de Markov, dont la matrice de transition est la h-transformée de Q par la fonction h.
En effet, pour tous $x = x_0, x_1, \ldots, x_n \in S^+$, on a, en utilisant la propriété de Markov simple à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n | \tau_y = +\infty\right) &= \frac{\mathbb{P}_x\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, \tau_y = +\infty\right)}{\mathbb{P}_x\left(\tau_y = +\infty\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_{x_0}\left(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\right)\mathbb{P}_{x_n}\left(\tau_y = +\infty\right)}{h(x_0)} \\
&= \frac{h(x_n)}{h(x_0)} \prod_{i=0}^{n-1} Q(x_i, x_{i+1}) \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{h(x_{i+1})}{h(x_i)} Q(x_i, x_{i+1}),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. On rappelle que pour tout $0 \leq k \leq N$, on a

$$\mathbb{P}_k(\tau_N < \tau_0) = \frac{k}{N}.$$

On note $X'_n = X_{n \wedge \tau_0 \wedge \tau_N}$. Notons que X' est une chaîne de Markov, de matrice de transition Q avec

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{|x-y|=1}$$

si $x \notin \{0, N\}$, et

$$Q(0,0) = Q(N,N) = 1.$$

Comme dans la question précédente, soit $(x_0, \ldots, x_n)$ une trajectoire possible de X' avec $x_0 = 1$. Alors comme précédemment, on a

$$\mathbb{P}_1(X'_0 = x_0, \ldots, X'_n = x_n | \tau_N < \tau_0) = \frac{\mathbb{P}_{x_n}(\tau_N < \tau_0)}{\mathbb{P}_1(\tau_N < \tau_0)} \mathbb{P}_1(X'_0 = x_0, \ldots, X'_n = x_n).$$

Pour $1 \leq i \leq N$, on pose donc $h(i) = \mathbb{P}_i(\tau_N < \tau_0) = \frac{i}{N}$. Alors le processus qui nous intéresse est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est la h-transformée de Q par h. Comme multiplier h par une constante ne change pas la h-transformée, on aurait aussi pu prendre $h(i) = i\mathbb{1}_{1 \leq i \leq N}$.
Conditionner une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ (issue, par exemple, de 1) à ne pas taper 0 n'a a priori pas de sens car cet événement a une probabilité nulle. Une manière de lui donner un sens est de la conditionner à taper N avant 0 puis de faire tendre N vers $+\infty$. D'après la discussion qui précède, pour tous n et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ avec $x_0 = 1$, on a

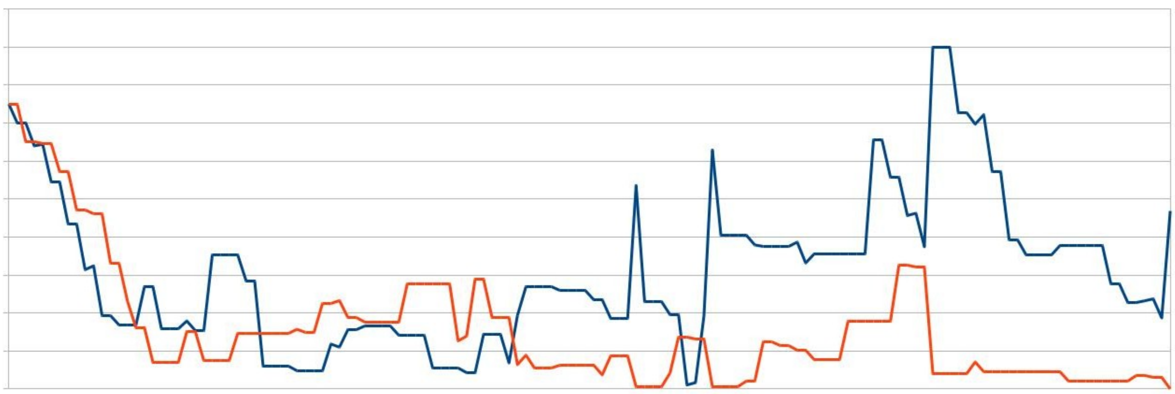
$$\mathbb{P}_1(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n | \tau_N < \tau_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}}{2x_i} \mathbb{1}_{|x_{i+1} - x_i| = 1}.$$

Un candidat naturel est donc la h-transformée de la marche simple avec $h(x) = x\mathbb{1}_{x>0}$.

Remarque L'utilisation d'une h-transformée pour "conditionner" une marche aléatoire à un événement de probabilité nulle (par exemple ne pas taper un ensemble d'états donné) fonctionne dans des cas assez variés.

Exercice 6

Que représente la jolie image ci-dessous ?



Solution de l'exercice 6 C'est une illustration de l'exercice 3 : au cours d'une partie de Monopoly, on a représenté l'évolution des fortunes (en liquide) des deux joueurs au cours du temps. C'est le joueur bleu qui gagne à la fin. Notons vers la fin de la partie qu'à plusieurs reprises, le joueur bleu gagne beaucoup d'argent, et le dépense dans la foulée pour acheter des hôtels.