TD 13 – Fonctions caractéristiques

1 – Petites questions

Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes.

1. Binomiale de paramètre (n,p), avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$.
2. Géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
3. Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
4. Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
5. Uniforme sur $[a,b]$ avec $a < b$.
6. Gaussienne de paramètre (m,σ^2) avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Corrigé. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

1. $\phi(t) = \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} e^{ikt} = (1-p+pe^{it})^n$.
2. $\phi(t) = \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} e^{ikt} = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$.
3. $\phi(t) = \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ikt} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.
4. $\phi(t) = \int_0^\infty \theta e^{-\theta x} e^{ixt}\, dx = \frac{\theta}{\theta - it}$.
5. $\phi(t) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{ixt}\, dx = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$.
6. $\phi(t) = e^{imt-\sigma^2 t^2/2}$ d'après le cours.

2 – Variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^d$

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la *fonction caractéristique* de X par

$$\phi_X : \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}\left[e^{i\langle \xi, X\rangle}\right],$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$. On dit aussi que $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \phi_X(-\xi)$ est la *transformée de Fourier* de la mesure P_X sur $\mathbb{R}^d$.

1. (*Le cas gaussien*) Soit $\sigma > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$g_\sigma^{(d)} : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{e^{-\|x\|^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}},$$

c'est-à-dire la transformée de Fourier de la mesure de densité $g_\sigma^{(d)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ (cette loi de probabilité est une gaussienne d-dimensionnelle notée $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathrm{Id}_d)$).

2. (*Injectivité*) Montrer que ϕ_X caractérise la loi de X.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3. (*Théorème de Lévy faible*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $(\phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ϕ_X.

Corrigé.

1. On calcule

$$\begin{aligned}\widehat{g_\sigma^{(d)}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle \xi,x\rangle}\frac{\mathrm{e}^{-\|x\|^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}}\,\mathrm{d}x = \prod_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi_k x_k}\frac{\mathrm{e}^{-x_k^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}}\,\mathrm{d}x_k\\ &= \prod_{i=1}^k \widehat{g_\sigma^{(1)}}(\xi_k) = \prod_{i=1}^k \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi_k^2/2} = \mathrm{e}^{-\sigma^2\|\xi\|^2/2} = (2\pi\sigma^2)^{d/2} g_{1/\sigma}^{(d)}(\xi),\end{aligned}$$

en utilisant le calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne unidimensionnelle, effectué dans le cours.

2. Calquer la démonstration du cours en utilisant les gaussiennes de dimension d introduites à la question 1.
3. Idem.

3 – Indépendance

Exercice 2. Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

1. Montrer que $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si et seulement si la fonction caractéristique de $(X_1,\dots,X_n)$ est

$$\xi\in\mathbb{R}^n \mapsto \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi_k).$$

2. Supposons que, pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, $\phi_{X_1+X_2}(\xi)=\phi_{X_1}(\xi)\phi_{X_2}(\xi)$. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas forcément indépendantes.

Corrigé.

1. Calculons la transformée de Fourier de la mesure $P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d}$. Pour $\xi\in\mathbb{R}^d$, on a, par Fubini-Lebesgue

$$\begin{aligned}\phi_{P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i(\xi_1x_1+\cdots+\xi_dx_d)}\,\mathrm{d}(P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d})(x_1,\dots,x_d)\\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi_kx_k}\,\mathrm{d}P_{X_k}(x_k) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi_k).\end{aligned}$$

Ainsi, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}X_1,\dots,X_n \text{ sont indépendantes } &\Leftrightarrow P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d}\\ &\Leftrightarrow \phi_{(X_1,\dots,X_n)} = \phi_{P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d}}\\ &\Leftrightarrow \forall \xi\in\mathbb{R}^d, \phi_{(X_1,\dots,X_n)}(\xi) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi_k),\end{aligned}$$

en utilisant l'injectivité de Fourier pour la 2e équivalence (c'est-à-dire le fait que la fonction caractéristique d'un v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ caractérise sa loi).

2. On remarque que l'hypothèse "pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi_{X_1+X_2}(\xi) = \phi_{X_1}(\xi)\phi_{X_2}(\xi)$" est équivalente à "$X_1 + X_2$ a même loi que $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$ avec $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$ indépendantes chacunne ayant respectivement même loi que X_1 et X_2", par injectivité de Fourier.

   On prend X_1 et X_2 deux dés à trois faces correllés : on définit la loi du couple (X_1, X_2) par

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} 1/9 & \text{si } (i,j) \in \{(1,1),(2,2),(3,3)\}, \\ 2p/9 & \text{si } (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}, \\ 2(1-p)/9 & \text{si } (i,j) \in \{(1,3),(2,1),(3,2)\}, \end{cases}$$

   pour $p \in [0,1]$ un paramètre. Alors on vérifie aisément que X_1 et X_2 suivent chacun une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ et que

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \begin{cases} 1/9 & \text{si } k \in \{2,6\}, \\ 2/9 & \text{si } k \in \{3,5\}, \\ 1/3 & \text{si } k = 4, \end{cases}$$

   c'est-à-dire que $X_1 + X_2$ a la même loi que la somme de deux variables uniformes sur $\{1,2,3\}$ indépendantes. Ainsi (X_1, X_2) vérifie bien l'hypothèse mais X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes dès que $p \neq 1/2$.

   Remarque. La démarche pour arriver à la loi de (X_1, X_2) est la suivante. On se fixe un objectif pour la loi de X_1 et X_2 (ici des uniformes). Alors la loi de $X_1 + X_2$ doit être celle obtenue si X_1 et X_2 étaient indépendantes. On construit alors la loi de (X_1, X_2) de sorte qu'elle vérifie toutes les équations qu'imposent les lois de X_1, X_2 et $X_1 + X_2$. Dans notre cas, il n'y a qu'un seul paramètre de liberté qui est p et on le choisit de sorte que X_1 et X_2 ne soient pas indépendants.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires bornées. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[X^k Y^l\right] = \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right].$$

Corrigé. L'implication est facile, car si X et Y sont indépendantes, alors X^k et Y^l le sont également. Réciproquement, supposons que $\forall k, l \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X^k Y^l] = \mathbb{E}[X^k]\mathbb{E}[Y^l]$. La fonction caractéristique de (X, Y) est donnée en $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \mathbb{E}\left[e^{iuX} e^{iuY}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iuX)^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ivY)^l}{l!}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k,l \geq 0} i^{k+l} \frac{u^k v^l}{k!l!} X^k Y^l\right]$$

Pour échanger la série et l'espérance, on veut utiliser Fubini-Lebesgue : soit C un majorant de $|X|$ et $|Y|$, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k,l \geq 0} \left| i^{k+l} \frac{u^k v^l}{k!l!} X^k Y^l \right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k,l \geq 0} \frac{|u|^k |v|^l C^{k+l}}{k!l!}\right] = e^{|u|C} e^{|v|C} < \infty.$$

On peut donc appliquer Fubini-Lebesgue, qui nous donne

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \sum_{k,l \geq 0} i^{k+l} \frac{u^k v^l}{k!l!} \mathbb{E}\left[X^k Y^l\right].$$

D'après l'hypothèse, on a donc

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \sum_{k,l \geq 0} i^{k+l} \frac{u^k v^l}{k!l!} \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k \mathbb{E}[X^k]}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iv)^l \mathbb{E}[Y^l]}{l!}\right).$$

En appliquant Fubini-Lebesgue de la même manière pour chaque série, il en découle

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k X^k}{k!}\right]\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iv)^l Y^l}{l!}\right] = \phi_X(u)\phi_Y(v),$$

d'où le résultat, en utilisant la question 1. de l'exercice 2.

4 – Convergence en loi

Exercice 4. (*Limite de gaussiennes*) Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles suivant respectivement une loi gaussienne $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle Y si et seulement si les deux suites $(m_n)_{n\geq 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ convergent vers respectivement $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$, et identifier la loi limite.

Corrigé. On rappelle que la fonction caractéristique d'une gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ de moyenne m et de variance σ^2 est $\Phi_{m,\sigma^2}(t) = \exp(imt - \sigma^2 t^2/2)$. Par convention, lorsque $\sigma = 0$, la gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est la masse de Dirac δ_m.
La réciproque découle immédiatement du théorème de Lévy et la loi limite est alors la loi gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.
Pour l'implication, supposons que Y_n converge en loi vers Y. Le théorème de Lévy garantit que $\exp(im_n t - \sigma_n^2 t^2/2)$ converge pour tout réel t lorsque $n \to \infty$, et donc que $\exp(-\sigma_n^2 t^2/2)$ converge (en prenant le module). Par positivité de σ_n, on obtient donc

$$\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Par l'absurde, si $\sigma = \infty$, alors on a, pour tout $t > 0$,

$$\left|\phi_Y(t)\right| = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\sigma_n^2 t^2/2} = 0,$$

ce qui contredit que $\phi_Y(0) = 1$ et que ϕ_Y est continue en 0. Ainsi, on a bien $\sigma \in \mathbb{R}_+$.
Montrons à présent la convergence de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\mathrm{e}^{-\sigma_n^2 t^2/2}$ converge vers une limite non nulle pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{im_n t}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$. Montrons que cela entraîne la convergence de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on sait a priori que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est facile : si m et m' sont deux valeurs d'adhérence on a $\exp(imt) = \exp(im't)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne $m = m'$. Par l'absurde, supposons la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée. Alors il existe une extractrice $\psi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(|m_{\psi(n)}|)$ converge vers $+\infty$. Ici, on a deux possibilités :

- ▷ Utiliser le théorème de Portmanteau (qui visiblement n'a pas été vu en cours) qui dit, entre autres, que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall F \subset \mathbb{R} \text{ fermé}, \quad \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F).$$

  On obtient ainsi, pour tout $A > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y| \geq A) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq A).$$

- ▷ Repasser par les fonctions de répartition. On note D_Y l'ensemble des points de discontinuité de F_Y. Soit $A > 0$ tel que $A, -A \notin D_Y$. Alors on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \in]-\infty,-A]\cup]A,\infty]) &= F_Y(-A) + 1 - F_Y(A) = \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(-A) + 1 - F_{Y_n}(A)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \in]-\infty,-A]\cup]A,\infty]).\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on obtient

$$\mathbb{P}(|Y| \geq A) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_{\psi(n)}| > A) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_{\psi(n)}| \geq |m_{\psi(n)}|),$$

car $|m_{\psi(n)}| > A$ à partir d'un certain rang. Or on a

$$\mathbb{P}(|Y_{\psi(n)}| \geq |m_{\psi(n)}|) \geq \begin{cases} \mathbb{P}(Y_{\psi(n)} \geq m_{\psi(n)}) & \text{si } m_n \geq 0 \\ \mathbb{P}(Y_{\psi(n)} \leq m_{\psi(n)}) & \text{si } m_n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2},$$

par symétrie de la gaussienne autour de sa moyenne. On a donc montré que pour (presque) tout $A > 0$, $\mathbb{P}(|Y| \geq A) \geq 1/2$. Ceci est absurde car $\mathbb{P}(|Y| \geq A) \to 0$ quand $A \to \infty$.

5 – Fonctions caractéristiques

Exercice 5. (*Moments et régularité*) Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k \exp(itX)\right].$$
2. On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2. *Indication.* On pourra considérer $(\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2)/t^2$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$.
4. (✯) Construire une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, symétrique, qui n'admet pas de moment d'ordre 1 mais telle que ϕ_X soit dérivable en 0.

Corrigé.

1. Ceci provient immédiatement du théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination $\left|i^k X^k \exp(itX)\right| \leq |X|^k \in L^1$ pour $1 \leq k \leq n$.
2. La fonction ϕ_X étant deux fois dérivable en 0, la formule de Taylor-Young garantit un développement limité à l'ordre 2 :
$$\phi_X(t) = 1 + \phi_X'(0)t + \phi_X''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$
On en déduit que :
$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2}{t^2} = \phi''(0). \tag{1}$$
Or $\phi_X(t) + \phi_X(-t) = 2\mathrm{Re}(\phi_X(t)) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)]$. Il s'ensuit par (1) que
$$\lim_{t \to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\phi_X''(0).$$
Or $(1 - \cos(tX))/t^2 \geq 0$, donc on peut appliquer le lemme de Fatou, qui donne
$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}\left[2 \liminf_{t \to 0}\left(\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right)\right] \leq 2 \liminf_{t \to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right] = -\phi_X''(0) < \infty.$$
Remarque. Par la question 1., on a alors $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$ et aussi que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Raisonner par récurrence en adaptant la preuve de la question précédente.
4. On cherche une loi $P_X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$ telle que $a_k = a_{-k}$, $\mathbb{E}[|X|] = 2\sum_{k \geq 0} k a_k = \infty$ et telle que ϕ_X soit dérivable en 0, où l'on a
$$\phi_X(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt).$$
Choisissons $a_0 = a_1 = a_{-1} = 0$ et pour $k \geq 2$:
$$a_k = a_{-k} = \frac{c}{k^2 \ln k}, \qquad \text{où } c = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}\right)^{-1},$$
de sorte que :
$$0 \leq \frac{1 - \phi_X(t)}{t} = \frac{2c}{t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}(1 - \cos(tk)).$$

On vérifie ensuite que cette quantité tend vers 0 lorsque $t \to 0$ en décomposant cette dernière somme suivant que $k \geq 1/t$ ou $k < 1/t$. Tout d'abord :

$$\sum_{k\geq 1/t} \frac{1}{k^2 \ln k} \frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq -\frac{2}{t\ln(t)} \sum_{k\geq 1/t} \frac{1}{k^2} \leq -\frac{2}{t\ln(t)} \int_{\lfloor 1/t \rfloor -1} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = -\frac{2}{t(\lfloor 1/t \rfloor - 1)\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{t} \sum_{2\leq k<1/t} \frac{1}{k^2 \ln k} \frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq t \sum_{2\leq k<1/t} \frac{1}{\ln(k)} \leq \frac{t}{\ln(2)} + t\int_2^{1/t} \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_2^y \frac{1}{\ln x} \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{\ln x}\right]_2^y + \int_2^y \frac{1}{(\ln(x))^2} \mathrm{d}x.$$

Mais lorsque $x \to \infty$, $1/(\ln x)^2 = o(1/\ln x)$ et donc lorsque $y \to \infty$:

$$\int_2^y \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]_2^y + o\left(\int_2^y \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x\right)$$

de sorte que

$$\int_2^{1/t} \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{t\ln(t)}$$

Il s'ensuit que

$$t\int_2^{1/t} \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Ceci achève de démontrer que $(1-\phi_X(t))/t \to 0$ lorsque $t \to 0$.
Cela montre qu'en général il n'est pas vrai que X admet un moment d'ordre 1 lorsque ϕ_X est dérivable en 0.

6 – Théorème central limite

Exercice 6. En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Corrigé. On a

$$\mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(P_1 + \ldots + P_n \leq n),$$

où $P_1, \ldots, P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre 1 indépendantes (car alors $P_1 + \ldots + P_n$ suit une loi de Poisson de paramètre n). On écrit ensuite

$$\mathbb{P}(P_1 + \ldots + P_n \leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{P_1 + \ldots + P_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right).$$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ étant égales à λ, on a, d'après le TCL,

$$\frac{P_1 + \ldots + P_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} N,$$

où N est une variable gaussienne centrée réduite. Or la fonction de répartition de N est continue en 0 donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

7 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (*Développement de fonction caractéristique*) Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \exp(ituX)\,\mathrm{d}u\right].$$
   (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t),$$
   où $|\varepsilon_n(t)| \leq 2\mathbb{E}[|X|^n]$ et $\lim_{t\to 0} \varepsilon_n(t) = 0$.
2. On suppose que X admet des moments de tous ordres et que
   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty,$$
   où $\|X\|_n := \mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}$. Montrer que ϕ_X est alors développable en série entière au voisinage de tout réel, le rayon de convergence étant supérieur ou égal à R/e. En déduire que :
   $$\forall t \in \left]-\frac{R}{\mathrm{e}}, \frac{R}{\mathrm{e}}\right[, \qquad \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

Corrigé.

1.(a) On applique la formule de Taylor avec reste intégral à $y \mapsto \exp(iy)$:
$$\exp(iy) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \exp(iuy)\,\mathrm{d}u.$$
Le résultat s'ensuit en prenant $y = tX$ et en prenant l'espérance (qui est linéaire).

(b) En remarquant que $\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = 1/n$, on a :
$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} (\exp(ituX) - 1)\,\mathrm{d}u\right].$$
Ainsi,
$$\varepsilon_n(t) = n\mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} (\exp(ituX) - 1)\,\mathrm{d}u\right],$$
et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient la majoration
$$|\varepsilon_n(t)| \leq 2n\mathbb{E}[|X|^n] \int_0^1 (1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = 2\mathbb{E}[|X|^n].$$
De plus, pour $u \in [0,1]$ on a
$$\left|nX^n(1-u)^{n-1}(\exp(ituX) - 1)\right| \leq 2n|X|^n(1-u)^{n-1},$$
majoration indépendante de t par une application $\lambda_{[0,1]} \otimes \mathbb{P}$-intégrable. Le théorème de convergence dominée garantit donc que $\lim_{t\to 0} \varepsilon_n(t) = 0$.

2. Par l'exercice 5, on sait que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec pour dérivées

$$\phi_X^{(n)}(u) = i^n \mathbb{E}\left[X^n e^{iuX}\right],$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour $t_0 \in \mathbb{R}$, ϕ_X possède un développement de Taylor à tout ordre $n \geq 1$ en t_0 :

$$\phi_X(t) = \phi_X(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \phi_X^{(k)}(t_0) + R_n(t, t_0),$$

où le reste est défini par

$$R_n(t_0, t) := \int_{t_0}^{t} \frac{(t-u)^n}{n!} \phi_X^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-u)^n}{n!} i^{n+1} \mathbb{E}\left[X^{n+1} e^{iuX}\right] \mathrm{d}u.$$

Il s'agit donc de démontrer que celui-ci tend vers 0 : on a

$$|R_n(t_0, t)| \leq \frac{(|t-t_0| \|X\|_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}$$

et l'hypothèse sur $\|X\|_n$ et la formule de Stirling permettent aisément de voir que cette quantité tend vers 0 pour $|t-t_0| < R/e$.

Remarque. Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles telles que $\limsup_{n\to\infty} \|X\|_n/n < \infty$, $\limsup_{n\to\infty} \|Y\|_n/n < \infty$ et $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \geq 1$, alors on a montré que ϕ_X et ϕ_Y sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$ coïncidant au voisinage de 0 et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi, X et Y ont même loi (en revanche, ce n'est pas vrai en général, voir l'exercice 9).

Exercice 8. (*Cinquante nuances de Cauchy*) La *loi de Cauchy* de paramètre $\theta > 0$ est la mesure sur $\mathbb{R}$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\theta}{\pi(\theta^2 + x^2)}.$$

1. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Cauchy de paramètre $\theta > 0$ est

$$\xi \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\theta|\xi|}.$$

Indication. On pourra utiliser la formule d'inversion de Fourier (voir exercice 6 du TD 8) : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
3. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre 1. Déterminer la loi de $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ et en déduire une convergence. Commenter.

Corrigé.

1. On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\theta|x|}$ et on commence par calculer $\hat{f}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta|x|} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-\theta|x|} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x,$$

par convergence dominée. Puis on a

$$\int_{-n}^{n} e^{-\theta|x|} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{n} e^{-\theta x} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x + \int_{-n}^{0} e^{\theta x} e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-\theta n} e^{-i\xi n}}{\theta + i\xi} + \frac{1 - e^{-\theta n} e^{i\xi n}}{\theta - i\xi} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\theta}{\theta^2 + \xi^2},$$

et donc

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\theta}{\theta^2+\xi^2}.$$

Ainsi $\hat{f}$ est L^1 et on peut utiliser l'inversion de Fourier : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\frac{2\theta}{\theta^2+x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\frac{\theta}{\pi(\theta^2+x^2)}\,dx$$

et donc f est bien la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre θ.

2. Pour déterminer la loi d'une somme de v.a. indépendantes, il est très pratique de passer par les fonctions caractéristiques. On calcule donc, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}(\xi) = \prod_{k=1}^{n}\phi_{X_k}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\theta_k|\xi|} = e^{-(\theta_1+\cdots+\theta_n)|\xi|}.$$

On en déduit que $X_1+\cdots+X_n$ suit une loi de Cauchy de paramètre $\theta_1+\cdots+\theta_n$.
Remarque. En particulier, toute loi de Cauchy est *infiniment divisible* : si X suit une loi de Cauchy de paramètre θ et si $k \geq 1$, alors il existe $X_1,\ldots,X_k$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que X ait même loi que $X_1+\cdots+X_k$ (il suffit de prendre les X_i avec une loi de Cauchy de paramètre θ/k).

3. On pose $S_n := X_1+\cdots+X_n$, qui suit une loi de Cauchy de paramètre n par la question précédente. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi_{S_n/n}(\xi) = \phi_{S_n}(\xi/n) = e^{-n|\xi/n|} = e^{-|\xi|}.$$

Donc S_n/n suit une loi de Cauchy de paramètre 1 et converge donc évidemment en loi vers une loi de Cauchy de paramètre 1.
Ici on est dans le cas de variables aléatoires i.i.d. n'admettant pas de moment d'ordre 1, donc S_n/n diverge presque sûrement par l'exercice 8 du TD 12, et il y a pourtant convergence en loi.
En outre, le théorème central limite ne s'applique pas car il n'y a pas de moment d'ordre 1 (et donc pas de moment d'ordre 2) : ici on a besoin d'une renormalisation par n au lieu de $\sqrt{n}$ dans le TCL.

Exercice 9. (*Problème des moments*)

1. Calculer
$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right)dx.$$

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sin(2\pi\ln x)\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right).$$
Calculer $\int_0^{\infty} x^k f(x)\,dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. En déduire qu'il existe deux variables aléatoires X et Y positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n] < \infty$, mais n'ayant pas la même loi.

Corrigé.

1. Avec le changement de variable $u = \ln(x)$, on a
$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du = 1.$$

2. Soit $k \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et le changement de variable $u = \ln(x)$ aboutit à
$$\int_0^\infty x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{-u^2}{2} + ku\right)\sin(2\pi u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}u.$$
En remarquant que $-u^2/2 + nu = -1/2(u-n/2)^2 + n^2/2$, le changement de variable $v = u - n/2$ donne
$$\int_0^\infty x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \text{cste}\cdot\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-v^2/2}\sin(2\pi v)\,\mathrm{d}v = 0.$$

3. On considère les v.a. X et Y de densité respectives
$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right) \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (1+\sin(2\pi\ln x))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right),$$
qui sont bien définies par les questions 1. et 2. (les densités sont bien d'intégrale 1). Alors X et Y admettent des moments à tout ordre et, pour $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{E}\left[Y^k\right] = \int_0^\infty x^k(1+\sin(2\pi\ln x))\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right)\mathrm{d}x = \mathbb{E}\left[X^k\right] + \int_0^\infty x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}\left[X^k\right],$$
mais X et Y sont bien de lois différentes !

Exercice 10. (*Une loi faible par les fonctions caractéristiques*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Montrer alors que
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1], \quad \text{en probabilité,}$$
à l'aide des fonctions caractéristiques.

Corrigé. L'indépendance des (X_i) implique que, pour $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\varphi_{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}(\xi) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^n.$$
Comme X_1 a un moment d'ordre 1 fini, $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ est dérivable en 0 de dérivée $i\mathbb{E}[X_1]$. D'où
$$\left(\varphi_{X_1}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{i\xi\mathbb{E}[X_1]}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} i\xi\mathbb{E}[X_1].$$
Ainsi, les fonctions caractéristiques de $(X_1+\cdots+X_n)/n$ convergent simplement vers la fonction caractéristique de la mesure de Dirac en $\mathbb{E}[X_1]$, on en déduit que
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathbb{E}[X_1].$$
Or la convergence en loi vers une constante implique une convergence en probabilité vers cette constante, ce qui conclut.

Exercice 11. (*Équation aléatoire*) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie σ^2. On suppose que $(X+Y)/\sqrt{2}$ est de même loi que X et Y. Que dire de cette loi commune ?

Corrigé. Tout d'abord, comme $(X+Y)/\sqrt{2}$ et X ont même loi, on a $(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])/\sqrt{2} = \sqrt{2}\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]$. D'où $\mathbb{E}[X] = 0$.

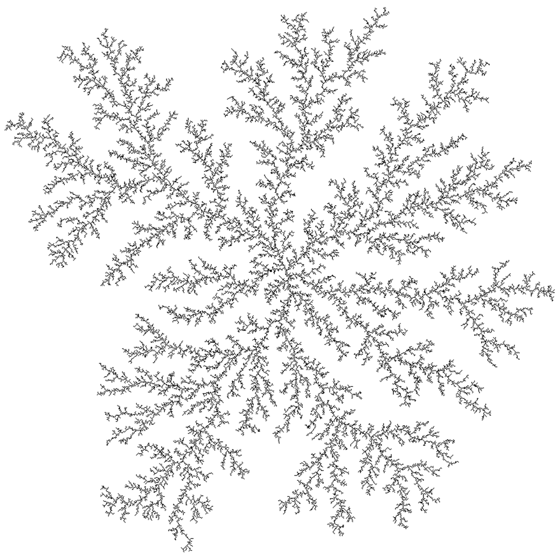
Ensuite, si $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X, on démontre aisément par récurrence sur n que

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=1}^{2^n} X_i$$

a la même loi que X. Or d'après le théorème central limite, Z_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (en effet, le numérateur de Z_n est une somme de 2^n variables aléatoires réelles centrées indépendantes de même loi et de variance σ^2). On conclut donc que X a la même loi que $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Exercice 12. (*Magie gaussienne*) (✯) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes. Montrer que les deux variables X et Y sont deux variables aléatoires gaussiennes.

Corrigé. Grandes étapes de la solution : en utilisant une équation fonctionnelle vérifiée par les fonctions caractéristiques, trouver le module de la fonction caractéristique de $X+Y$, puis son argument.



Agrégation limitée
par diffusion
(par Paul Bourke)

Bonne année !