TD 13 – Fonctions caractéristiques

1 – Petites questions

Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes.

1. Binomiale de paramètre (n,p), avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$.
2. Géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
3. Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
4. Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
5. Uniforme sur $[a,b]$ avec $a < b$.
6. Gaussienne de paramètre (m,σ^2) avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

2 – Variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^d$

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On définit la *fonction caractéristique* de X par

$$\phi_X : \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}\left[e^{i\langle \xi, X\rangle}\right],$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$. On dit aussi que $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \phi_X(-\xi)$ est la *transformée de Fourier* de la mesure P_X sur $\mathbb{R}^d$.

1. (*Le cas gaussien*) Soit $\sigma > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$g_\sigma^{(d)} : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{e^{-\|x\|^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}},$$

   c'est-à-dire la transformée de Fourier de la mesure de densité $g_\sigma^{(d)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ (cette loi de probabilité est une gaussienne d-dimensionnelle notée $\mathcal{N}(0,\sigma^2 \mathrm{Id}_d)$).
2. (*Injectivité*) Montrer que ϕ_X caractérise la loi de X.
3. (*Théorème de Lévy faible*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $(\phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ϕ_X.

3 – Indépendance

Exercice 2. Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

1. Montrer que $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si et seulement si la fonction caractéristique de $(X_1,\dots,X_n)$ est

$$\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi_k).$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

2. Supposons que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi_{X_1+X_2}(\xi) = \phi_{X_1}(\xi)\phi_{X_2}(\xi)$. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas forcément indépendantes.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires bornées. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[X^k Y^l\right] = \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right].$$

4 – Convergence en loi

Exercice 4. (*Limite de gaussiennes*) Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles suivant respectivement une loi gaussienne $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle Y si et seulement si les deux suites $(m_n)_{n\geq 0}$ et $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ convergent vers respectivement $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$, et identifier la loi limite.

5 – Fonctions caractéristiques

Exercice 5. (*Moments et régularité*) Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k \exp(itX)\right].$$

2. On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2.
   Indication. On pourra considérer $(\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2)/t^2$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$.
4. (☆) Construire une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, symétrique, qui n'admet pas de moment d'ordre 1 mais telle que ϕ_X soit dérivable en 0.

6 – Théorème central limite

Exercice 6. En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

7 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (*Développement de fonction caractéristique*) Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \exp(ituX)\,\mathrm{d}u\right].$$

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t),$$

où $|\varepsilon_n(t)| \leq 2\mathbb{E}[|X|^n]$ et $\lim_{t\to 0} \varepsilon_n(t) = 0$.

2. On suppose que X admet des moments de tous ordres et que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty,$$

où $\|X\|_n := \mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}$. Montrer que ϕ_X est alors développable en série entière au voisinage de tout réel, le rayon de convergence étant supérieur ou égal à R/e. En déduire que :

$$\forall t \in \left]-\frac{R}{\mathrm{e}}, \frac{R}{\mathrm{e}}\right[, \qquad \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

Exercice 8. (*Cinquante nuances de Cauchy*) La *loi de Cauchy* de paramètre $\theta > 0$ est la mesure sur $\mathbb{R}$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\theta}{\pi(\theta^2 + x^2)}.$$

1. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Cauchy de paramètre $\theta > 0$ est

$$\xi \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-\theta|\xi|}.$$

Indication. On pourra utiliser la formule d'inversion de Fourier (voir exercice 6 du TD 8) : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
3. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre 1. Déterminer la loi de $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ et en déduire une convergence. Commenter.

Exercice 9. (*Problème des moments*)

1. Calculer

$$\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right).$$

Calculer $\int_0^\infty x^k f(x)\, \mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. En déduire qu'il existe deux variables aléatoires X et Y positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n] < \infty$, mais n'ayant pas la même loi.

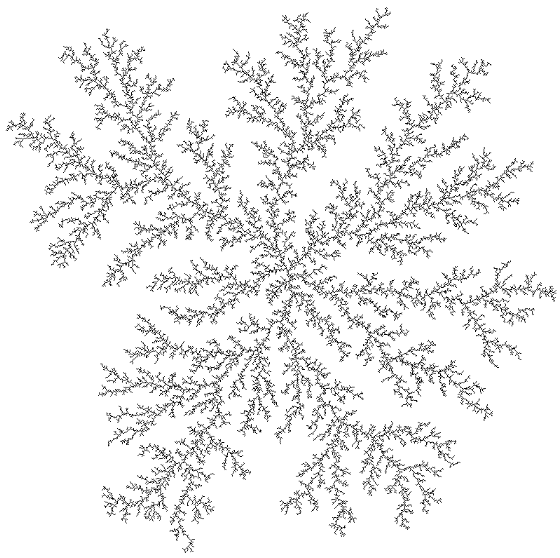
Exercice 10. (*Une loi faible par les fonctions caractéristiques*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Montrer alors que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1], \quad \text{en probabilité,}$$

à l'aide des fonctions caractéristiques.

Exercice 11. (*Équation aléatoire*) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie σ^2. On suppose que $(X+Y)/\sqrt{2}$ est de même loi que X et Y. Que dire de cette loi commune ?

Exercice 12. (*Magie gaussienne*) (✵) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes. Montrer que les deux variables X et Y sont deux variables aléatoires gaussiennes.



Agrégation limitée par diffusion (par Paul Bourke)

Bonne année !