Feuille d'exercices n^{o}13

Corrigé

Exercice 1

1. Quitte à translater, on peut supposer $x = 0$. L'inégalité est aussi invariante par dilatation. On peut donc supposer $r = 1$.
Il suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour toute $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{B(0,1)} |u(y) - u_{0,1}|^p dy \leq C \int_{B(0,1)} ||\nabla u||^p$$

On reconnaît là l'inégalité de Poincaré-Sobolev (voir TD 2).
2. Puisque toute fonction de $W^{1,p}(\Omega)$ peut se prolonger en une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, il suffit de considérer le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$.
D'après la question précédente, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in \mathcal{L}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$ (l'espace de Campanato défini dans le cours). D'après le théorème de Campanato, on a alors $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ avec $\alpha = 1 - n/p$.

Exercice 2

1. Si u est de classe $\mathcal{C}^1$, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $d(\overline{\Omega''}, \partial\Omega) < h$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega'', \qquad \tau_h u(x) - u(x) &= u(x+h) - u(x) \\ &= \int_0^1 \langle \nabla u(x+th), h \rangle \, dt \\ &\leq ||h|| \int_0^1 ||\nabla u(x+th)|| dt \\ &\leq ||h|| \sqrt{\int_0^1 ||\nabla u(x+th)||^2 dt} \end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence de l'inégalité de Jensen.
D'où :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega''} |\tau_h u(x) - u(x)|^2 dx &\leq ||h||^2 \int_0^1 \int_{x \in \Omega''} ||\nabla u(x+th)||^2 dx dt \\ &\leq ||h||^2 \int_0^1 \int_{x \in \Omega} ||\nabla u(x)||^2 dx dt \\ &= ||h||^2 ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

On étend à tout $H^1(\Omega)$ par densité.
2. On prend h tel que $\Omega'' + h \subset \Omega$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), \nabla\phi\rangle &= \frac{1}{||h||}\int_\Omega \langle (\tau_h A)\left(\tau_h \nabla u - \nabla u\right), \nabla\phi\rangle \\
&= \frac{1}{||h||}\int_\Omega \langle (\tau_h A)\tau_h \nabla u, \nabla\phi\rangle - \frac{1}{||h||}\int_\Omega \langle (\tau_h A)\nabla u, \nabla\phi\rangle \\
&= \frac{1}{||h||}\int_\Omega \langle A\nabla u, \tau_{-h}\nabla\phi\rangle - \int_\Omega \langle (\Delta_h A)\nabla u, \nabla\phi\rangle - \frac{1}{||h||}\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla\phi\rangle \\
&= \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla\Delta_{-h}\phi\rangle - \int_\Omega \langle (\Delta_h A)\nabla u, \nabla\phi\rangle \\
&= \int_\Omega f(\Delta_{-h}\phi) - \int_\Omega \langle (\Delta_h A)\nabla u, \nabla\phi\rangle \\
&= \int_\Omega (\Delta_h f)\phi - \int_\Omega \langle (\Delta_h A)\nabla u, \nabla\phi\rangle
\end{aligned}$$

3. Soit γ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 1 sur Ω' et dont le support est inclus dans Ω''.
Posons $\phi = \gamma^2(\Delta_h u)$.
On a :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), \nabla(\gamma^2(\Delta_h u))\right\rangle \\
&= \int_\Omega \gamma^2 \langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), \nabla(\Delta_h u)\rangle + 2\int_\Omega \langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), (\nabla\gamma)\rangle \gamma\Delta_h u \\
&\geq \lambda \int_\Omega \gamma^2 ||\nabla(\Delta_h u)||^2 + 2\int_\Omega \langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), (\nabla\gamma)\rangle \gamma\Delta_h u
\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_\Omega \gamma^2 ||\nabla(\Delta_h u)||^2 \\
&\leq -2\int_\Omega \langle (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u), (\nabla\gamma)\rangle \gamma\Delta_h u + \int_\Omega \gamma^2(\Delta_h f)(\Delta_h u) \\
&\quad - \int_\Omega \gamma^2 \langle (\Delta_h A)\nabla u, \nabla\Delta_h u\rangle - 2\int_\Omega \langle (\Delta_h A)\nabla u, \nabla\gamma\rangle \gamma\Delta_h u \\
&\leq 2||A||_\infty ||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 ||\,|\nabla\gamma|\Delta_h u||_2 + \int_\Omega f\Delta_{-h}(\gamma^2(\Delta_h u)) \\
&\quad + ||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 ||\Delta_h A||_\infty ||\gamma\nabla u||_2 + 2||\Delta_h A||_\infty ||\,||\nabla u||.||\nabla\gamma||\,||_2 ||\gamma\Delta_h u||_2 \\
&\leq 2||A||_\infty ||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 ||\,|\nabla\gamma|\Delta_h u||_2 + ||f||_2 ||\nabla(\gamma^2\Delta_h u)||_2 \\
&\quad + ||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 ||\Delta_h A||_\infty ||\gamma\nabla u||_2 + 2||\Delta_h A||_\infty ||\,|\nabla u|.|\nabla\gamma|\,||_2 ||\gamma\Delta_h u||_2 \\
&\leq 2||A||_\infty ||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 ||\,|\nabla\gamma|\Delta_h u||_2 + ||f||_2 \left(||\gamma||_\infty ||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 + 2||\nabla\gamma||_\infty ||\gamma\Delta_h u||_2\right) \\
&\quad + ||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 ||\Delta_h A||_\infty ||\gamma\nabla u||_2 + 2||\Delta_h A||_\infty ||\,|\nabla u|.|\nabla\gamma|\,||_2 ||\gamma\Delta_h u||_2
\end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité provient de la question 1.
Comme $A \in \mathcal{C}^{0,1}$, $||\Delta_h A||_\infty$ est bornée par une constante finie indépendante de h.
On a $||\gamma \Delta_h u||_2 \leq ||\gamma||_\infty |h|^{-1} ||\tau_h u - u||_{L^2(\mathrm{Supp}\,\gamma)} \leq ||\gamma||_\infty ||\nabla u||_{L^2(\Omega'')}$. De même $||\,|\nabla\gamma|\Delta_h u||_2 \leq ||\nabla\gamma||_\infty ||\nabla u||_{L^2(\Omega'')}$.
Donc, pour des constantes C_1, C_2 indépendantes de h :

$$\begin{aligned}\lambda||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2^2 \leq C_1||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 \left(||\nabla u||_{L^2(\Omega'')} + ||f||_2\right)\\ + C_2||\nabla u||_{L^2(\Omega'')} \left(||f||_2 + ||\nabla u||_{L^2(\Omega'')}\right)\end{aligned}$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}$, si $X^2 \leq aX + b$ avec $a, b \geq 0$, on voit (en résolvant l'équation polynomiale associée) qu'on a :

$$X \leq \sqrt{b} + a$$

On applique cette inégalité avec :

$$a = C_1\lambda^{-1}\left(||\nabla u||_{L^2(\Omega'')} + ||f||_2\right)$$
$$b = C_2\lambda^{-1}||\nabla u||_{L^2(\Omega'')}\left(||f||_2 + ||\nabla u||_{L^2(\Omega'')}\right) \leq C_2\lambda^{-1}\left(||f||_2 + ||\nabla u||_{L^2(\Omega'')}\right)^2$$

et on obtient :

$$||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2 \leq C_3\left(||f||_2 + ||\nabla u||_{L^2(\Omega'')}\right)$$

En élevant au carré et en utilisant l'indication, on a :

$$\begin{aligned}||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2^2 &\leq 2C_3\left(||f||_2^2 + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega'')}\right)\\ &\leq 2C_3\left(\int_\Omega f^2 + c\int_\Omega (u^2 + f^2)\right)\\ &\leq C\int_\Omega (u^2 + f^2)\end{aligned}$$

Puisque γ vaut 1 sur Ω' :

$$\int_{\Omega'} ||\nabla\Delta_h u||^2 \leq ||\gamma\nabla(\Delta_h u)||_2^2$$

et cela donne le résultat voulu.
4. La fonction u définit une distribution sur Ω' (puisque c'est une fonction L^2, donc localement L^1). Pour tous $i, j \leq n$, montrons que la distribution $\partial_i\partial_j u$ est continue au sens de la norme L^2, avec une norme majorée par :

$$D\left(\int_\Omega u^2 + f^2\right)^{1/2}$$

Cela impliquera que $\partial_i\partial_j u$ s'identifie à une fonction de $L^2(\Omega')$, dont la norme vérifie la majoration voulue.
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$ quelconque.

$$(\partial_i\partial_j u).\phi = \int_{\Omega'} u(\partial_i\partial_j\phi)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\Omega'} (\partial_i u)(\partial_j \phi) \\
&= -\lim_{t\to 0} \int_{\Omega'} (\partial_i u)(\Delta_{te_j}\phi) \\
&= -\lim_{t\to 0} \int_{\Omega'} (\Delta_{-te_j}\partial_i u)\phi \\
&\leq \limsup_{t\to 0} ||\Delta_{-te_j}\partial_i u||_{L^2(\Omega')}||\phi||_2 \\
&\leq \limsup_{t\to 0} ||\nabla\Delta_{-te_j} u||_{L^2(\Omega')}||\phi||_2 \\
&\leq C^{1/2}\left(\int_\Omega u^2 + f^2\right)^{1/2} ||\phi||_2
\end{aligned}
$$

(On a noté e_j le j-ième vecteur de la base canonique.)

5. Soit $u \in H_0^1(R)$ une solution du problème. On prolonge u sur $[-1;0]\times[-1;1]^{n-1}$ par :

$$u(x_1,...,x_n) = -u(-x_1,x_2,...,x_n) \qquad \text{si } x_1 < 0$$

On note $\overline{R} = R\cup([-1;0]\times[-1;1]^{n-1})$. La fonction u, prolongée, appartient à $H_0^1(\overline{R})$ et vérifie :

$$\nabla u(x_1,...,x_n) = \nabla u(-x_1,...,x_n) \qquad \text{si } x_1 < 0$$

Pour montrer cette dernière propriété, il suffit de constater qu'elle est vraie sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans R puis d'utiliser un argument de continuité. On remarque qu'on utilise ici la condition de bord : la même méthode de prolongement, appliquée à un élément quelconque de $H^1(R)$, ne donnerait pas un élément de $H^1(\overline{R})$.

On prolonge également A, par :

$$A(x_1,...,x_n) = A(-x_1,x_2,...,x_n) \qquad \text{si } x_1 < 0$$

La fonction, ainsi prolongée, reste lipschitzienne.

Pour toute fonction $\phi \in H_0^1(\overline{R})$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\overline{R}} \langle A\nabla u, \nabla\phi\rangle &= \int_R \langle A\nabla u, \nabla\phi\rangle - \int_R \left\langle A\nabla u, \nabla\tilde{\phi}\right\rangle \\
&= \int_R \left\langle A\nabla u, \nabla(\phi-\tilde{\phi})\right\rangle
\end{aligned}
$$

où on a noté $\tilde{\phi}(x_1,...,x_n) = \phi(-x_1,x_2,...,x_n)$ sur $\overline{R}-R$.

La fonction $\phi-\tilde{\phi}$ appartient à $H_0^1(R)$ (car sa trace sur le bord de R est nulle). Donc :

$$
\begin{aligned}
\int_{\overline{R}} \langle A\nabla u, \nabla\phi\rangle &= \int_R \left\langle A\nabla u, \nabla(\phi-\tilde{\phi})\right\rangle \\
&= \int_R f(\phi-\tilde{\phi})
\end{aligned}
$$

$$= \int_{\overline{R}} \phi f$$

si on prolonge f par

$$f(x_1, ..., x_n) = -f(-x_1, x_2, ..., x_n) \qquad \text{si } x_1 < 0$$

On a donc, sur $\overline{R}$, $-div(A\nabla u) = f$. Le rectangle R' est inclus dans l'intérieur de $\overline{R}$ donc on peut appliquer la question précédente, qui donne le résultat voulu.

Exercice 3

1. Soit $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ la fonction telle que $\hat{v}(\xi) = \hat{u}(\xi)(1 + ||\xi||^2)^{n/4}$. Puisque u appartient à $H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$, la fonction v est bien dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
On a $\hat{u} = \hat{v}\hat{J}_{n/2}$ donc, au moins au sens des distributions, $u = J_{n/2} \star v$.
2. Cette distribution, à une constante multiplicative près, est égale à $J_{n/2}$. Soit N un multi-indice ; on précisera ensuite comment le choisir. Pour toute $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n - \{0\})$:

$$\begin{aligned}
J_{n/2}\left(x \to x^N u(x)\right) &= \int e^{ix.\xi} \frac{x^N u(x)}{(1 + ||\xi||^2)^{n/4}} dx d\xi \\
&= (-i)^N \int \partial_\xi^N e^{ix.\xi} \frac{u(x)}{(1 + ||\xi||^2)^{n/4}} dx d\xi \\
&= i^N \int e^{ix.\xi} \partial_\xi^N \left(\frac{u(x)}{(1 + ||\xi||^2)^{n/4}} \right) dx d\xi \\
&= i^N \int e^{ix.\xi} u(x) \partial_\xi^N \left(\frac{1}{(1 + ||\xi||^2)^{n/4}} \right) dx d\xi
\end{aligned}$$

Choisissons N tel que $|N| > n/2$. Alors $g_N : \xi \to \partial_\xi^N \left(\frac{1}{(1+||\xi||^2)^{n/4}} \right)$ est une fonction de L^1 et, par Fubini :

$$J_{n/2}\left(x \to x^N u(x)\right) = (2\pi i)^N \int u(x) \mathcal{F}^{-1}(g_N)(x) dx$$

La fonction $h_N \overset{def}{=} \mathcal{F}^{-1}(g_N)$ est continue et bornée. Sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, $J_{n/2}$ s'identifie avec la fonction $x^{-N} h_N$, qui est continue et décroît en $|x|^{-N}$. Puisque c'est vrai pour tout N de norme assez grande, la fonction $J_{n/2}$ est $\mathcal{C}^0$ et décroît plus vite que tout polynôme quand $||x|| \to +\infty$.
Le même raisonnement peut être appliqué à toutes les dérivées partielles de $J_{n/2}$. Donc $J_{n/2}$ est de plus $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$.
3. Soit $k \in]0; n[$ quelconque. La fonction $c_k : \xi \to ||\xi||^{-k}$ définit une distribution tempérée ; cela a donc un sens de parler de sa transformée de Fourier inverse. La transformée de Fourier inverse s'identifie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ à une fonction $\mathcal{C}^\infty$. En effet, on peut écrire :

$$c_k = \phi(\xi)||\xi||^{-k} + (1 - \phi(\xi))||\xi||^{-k}$$

pour une fonction ϕ, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, valant 1 au voisinage de 0.

La fonction $\xi \to \phi(\xi)||\xi||^{-k}$ est L^1 à support compact donc sa transformée de Fourier inverse est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. La fonction $\xi \to (1-\phi(\xi))||\xi||^{-k}$, quant à elle, s'identifie à une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, par le même raisonnement qu'à la question précédente.
On a, pour tout $r > 0$:

$$(\mathcal{F}^{-1}c_k)(r.) = r^{-n}\mathcal{F}^{-1}(c_k(./r)) = r^{k-n}\mathcal{F}^{-1}c_k$$

donc $\mathcal{F}^{-1}c_k$ est homogène de degré $k-n$ et $\mathcal{F}^{-1}(c_k)(x) = O(||x||^{k-n})$.
Soit h la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ qui coïncide avec la transformée de Fourier inverse de $\hat{J}_{n/2}(\xi) - ||\xi||^{-n/2}$.
On voit en écrivant le développement limité de $\hat{J}_{n/2}$ quand $||\xi|| \to +\infty$ que $\hat{h}$ décroît en $O(||\xi||^{-n/2-2})$ et que, pour tout multi-indice α, $\partial^{(\alpha)}\hat{h}$ décroît en $O(||\xi||^{-n/2-2-|\alpha|})$.
En décomposant $\hat{h} = \hat{h}\phi + \hat{h}(1-\phi)$, avec ϕ définie comme précédemment, on a que $\hat{h}$ est la somme de deux termes. Le premier terme est une fonction L^1 à support compact, dont la transformée de Fourier inverse est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Le deuxième terme, qu'on note $\hat{h}_2$, est une fonction dont toutes les dérivées d'ordre $[n/2]$ sont L^1. Pour tout α vérifiant $|\alpha| = [n/2]$, la fonction h_2 s'écrit donc sous la forme $h_2(x) = x^{-\alpha}g_2(x)$ avec g_2 une fonction continue.
Ainsi, la fonction h vérifie $h(x) = O\left(||x||^{-[n/2]}\right)$ au voisinage de $x = 0$.
On a vu que $\mathcal{F}^{-1}\left(||\xi||^{-n/2}\right)(x) = O(||x||^{-n/2})$ au voisinage de 0 donc $J_{n/2} = \mathcal{F}^{-1}\left(||\xi||^{-n/2}\right) + h$ vérifie la même relation.

4. Puisque $J_{n/2}$ décroît plus vite que tout polynôme lorsque $||x|| \to +\infty$, il existe $C' > 0$ telle que, pour tout $\delta \in]0;1[$:

$$\begin{aligned}
||J_{n/2}||^{2-\delta}_{L^{2-\delta}} &\leq \left(||J_{n/2}||_{L^{2-\delta}(B(0,1))} + C'\right)^{2-\delta} \\
&\leq 2^{1-\delta}||J_{n/2}||^{2-\delta}_{L^{2-\delta}(B(0,1))} + 2^{1-\delta}C'^{2-\delta} \\
&\leq 2^{1-\delta}C^{2-\delta}||\,||x||^{-n/2}||^{2-\delta}_{L^{2-\delta}(B(0,1))} + 2^{1-\delta}C'^{2-\delta} \\
&\leq 2^{1-\delta}C^{2-\delta}c_n\frac{1}{\delta} + 2^{1-\delta}C'^{2-\delta}
\end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat.
Remarque : jusqu'à présent, on n'a considéré que $J_{n/2}$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. On a donc montré que, sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, $J_{n/2}$ s'identifiait à une fonction de $L^{2-\delta}$ (quelque soit $\delta \in]0;1[$). Pour que ce résultat s'étende à $\mathbb{R}^n$, il faut s'assurer du fait que la différence entre $J_{n/2}$ et la distribution définie par la fonction $L^{2-\delta}$ en question est nulle. La différence, si elle est non-nulle, est à support dans $\{0\}$. C'est donc une combinaison linéaire finie d'un dirac et de ses dérivées, or on peut vérifier « à la main » que chaque terme de la combinaison est nul.

5. D'après l'inégalité de Young, pour $p \geq 2$:

$$\begin{aligned}
||u||_p &= ||J_{n/2} \star v||_p \\
&\leq ||J_{n/2}||_{2p/(p+2)}||v||_2 \\
&\leq D||J_{n/2}||_{2p/(p+2)}||u||_{H^{n/2}} \\
&\leq D'\left(\frac{p+2}{4}\right)^{(p+2)/2p}||u||_{H^{n/2}}
\end{aligned}$$

$$\leq C(p+2)^{1/2+1/p}||u||_{H^{n/2}}$$

6.

$$\int_{\mathbb{R}^n}(e^{\gamma|u|^2}-1) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{k>1}\frac{\gamma^k|u|^{2k}}{k!}\right)$$
$$\leq \sum_{k>1}\frac{\gamma^k}{k!}C^{2k}(2k+2)^{k+1}||u||_{H^{n/2}}^{2k}$$

D'après la formule de Stirling, $k! \sim \sqrt{2\pi k}(k/e)^k$ donc, pour γ assez petit (ne dépendant que de $||u||_{H^{n/2}}$ et de C, avec C ne dépendant elle-même que de $||u||_{H^{n/2}}$ et de la dimension), la série décroît géométriquement et l'intégrale converge.