Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2018-2019 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 13 : Convergence de chaînes de Markov

Mercredi 12 Décembre

1 Applications du théorème ergodique

Exercice 1 (Une suite de flips)
Soit $n \geq 4$. On considère un polygone régulier $\mathscr{P}_n$ à n sommets, numérotés de 1 à n. Une *triangulation* de $\mathscr{P}_n$ est une manière de tracer $n-3$ diagonales de $\mathscr{P}_n$ qui divisent $\mathscr{P}_n$ en $n-2$ triangles. On note $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des triangulations de $\mathscr{P}_n$.

Si $t \in \mathscr{T}_n$ et d est une des diagonales de t, on peut supprimer d, ce qui crée un quadrilatère, et remplacer d par l'autre diagonale de ce quadrilatère (on dit alors qu'on *flippe* d). On obtient ainsi une triangulation qu'on note $\mathfrak{flip}(t, d)$.

On se fixe $t_0 \in \mathscr{T}_n$ et on définit $(T_k)_{k\geq 0}$ de la manière suivante : $T_0 = t_0$ et, pour tout $k \geq 0$, conditionnellement à $(T_0, \ldots, T_k)$, on choisit uniformément une diagonale d_k de T_k et on pose $T_{k+1} = \mathfrak{flip}(T_k, d_k)$.

1. Vérifier que (T_k) est une chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_n$ et qu'elle admet la mesure uniforme comme mesure stationnaire.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathscr{T}_n$, en partant de t, il est possible d'obtenir en un nombre fini de flips la triangulation où toutes les diagonales sont issues du sommet 1. En déduire que (T_k) est irréductible.
3. La chaîne (T_k) converge-t-elle vers la mesure uniforme ?

Exercice 2 (Durée de vie des ampoules)
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$,
- $\mathrm{PGCD}\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n \;=\; \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n \,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique.

2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1,\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$
3. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice ?

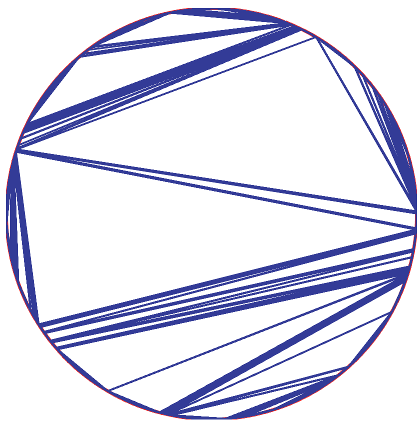
2 Fonds de tiroir

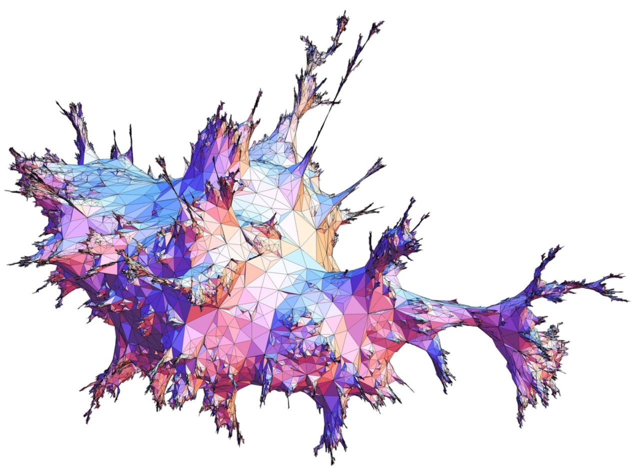
Exercice 3 (La fourmi et la montre)
Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. La fourmi s'arrête quand elle a visité tous les chiffres de la montre. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Exercice 4 (Un petit résultat technique utile)
Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. à valeurs entières. Pour tout $n \geq 0$, soient $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \max\{|S_k|| 0 \leq k \leq n\}$. On se fixe $n \geq 0$, et $\varepsilon, A > 0$ tels que pour tout $0 \leq k \leq n$,
$$\mathbb{P}\left(|S_k| \geq A\right) \leq \varepsilon.$$
Montrer que
$$\mathbb{P}\left(|S_n^*| \geq 2|A|\right) \leq 2\varepsilon.$$

3 Jolies images

Exercice 5 Que représentent les jolies images ci-dessous ?





Exercice 6 Saurez-vous retrouver la subtile contrepèterie qui s'est cachée dans ce TD ?