Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2018-2019 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 13 : Convergence de chaînes de Markov
Corrigé

Mercredi 12 Décembre

1 Applications du théorème ergodique

Exercice 1 (Une suite de flips)
Soit $n \geq 4$. On considère un polygone régulier $\mathscr{P}_n$ à n sommets, numérotés de 1 à n. Une *triangulation* de $\mathscr{P}_n$ est une manière de tracer $n-3$ diagonales de $\mathscr{P}_n$ qui divisent $\mathscr{P}_n$ en $n-2$ triangles. On note $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des triangulations de $\mathscr{P}_n$.

Si $t \in \mathscr{T}_n$ et d est une des diagonales de t, on peut supprimer d, ce qui crée un quadrilatère, et remplacer d par l'autre diagonale de ce quadrilatère (on dit alors qu'on *flippe* d). On obtient ainsi une triangulation qu'on note $\mathfrak{flip}(t,d)$.

On se fixe $t_0 \in \mathscr{T}_n$ et on définit $(T_k)_{k\geq 0}$ de la manière suivante : $T_0 = t_0$ et, pour tout $k \geq 0$, conditionnellement à $(T_0, \dots, T_k)$, on choisit uniformément une diagonale d_k de T_k et on pose $T_{k+1} = \mathfrak{flip}(T_k, d_k)$.

1. Vérifier que (T_k) est une chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_n$ et qu'elle admet la mesure uniforme comme mesure stationnaire.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathscr{T}_n$, en partant de t, il est possible d'obtenir en un nombre fini de flips la triangulation où toutes les diagonales sont issues du sommet 1. En déduire que (T_k) est irréductible.
3. La chaîne (T_k) converge-t-elle vers la mesure uniforme ?

Solution de l'exercice 1

1. On vérifie que (T_k) est une chaîne de Markov de matrice de transition Q avec
$$Q(t,t') = \begin{cases} \frac{1}{n-3} & \text{si on peut passer de } t \text{ à } t' \text{ par un unique flip,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Conditionnellement à $(T_0, \dots, T_k)$, la diagonale d_k est uniforme dans T_k, donc pour s'assurer que T_{k+1} est uniforme parmi les triangulations "directement accessibles" depuis T_k, il suffit de vérifier que flipper deux arêtes différentes de T_k donne deux triangulations différentes. Ceci est vrai car si $d \neq d'$ sont deux diagonales de T_k, alors $\mathfrak{flip}(T_k, d)$ contient d', ce qui n'est pas le cas de $\mathfrak{flip}(T_k, d')$. De plus, il est immédiat par la définition de Q que Q admet la mesure uniforme sur $\mathscr{T}_n$ comme mesure réversible, donc stationnaire.
2. Soit t_0 la triangulation dont les $n-3$ diagonales relient 1 à $3, 4, \dots, n-1$. On va montrer que si $t \neq t_0$, alors on peut, en flippant une arête de t, augmenter strictement le degré du sommet 1. Cela suffira à conclure car t_0 est la seule triangulation où le degré du sommet 1 est maximal (égal à $n-1$). Si $t \neq t_0$, soit $3 \leq i \leq n-1$ tel que 1 n'est pas relié à i dans t. Soient $j < i$ maximal et $k > i$ minimal tels que 1 est relié à j et k (ils existent car 1 est relié à 2 et n). Alors $(1, j, k)$ doit

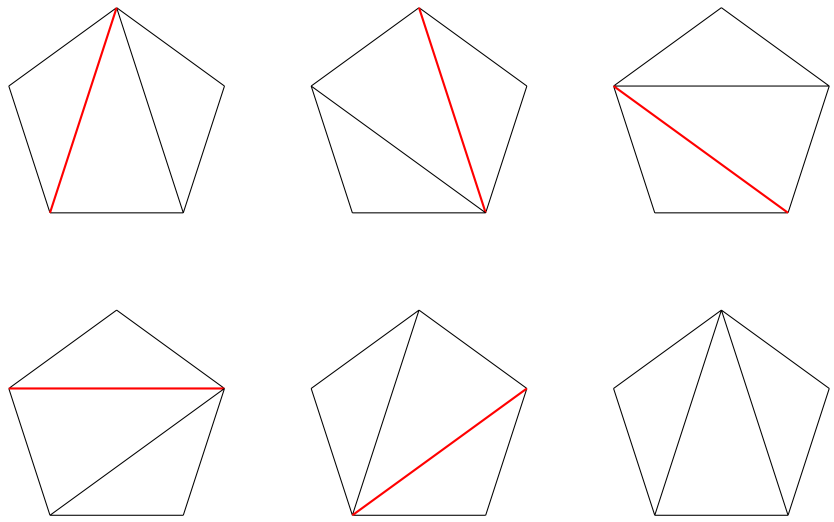


FIGURE 1 – En 5 flips, on revient à la triangulation de départ.

être un des triangles de t, donc j est relié à k. On a de plus $k - j \geq 2$ donc l'arête entre j et k est bien une diagonale. En flippant cette diagonale, le degré de 1 augmente de 1.

On en déduit $Q^{n-3}(t, t_0) > 0$ pour tout $t \in \mathscr{T}_n$ (le degré augmente de 1 à chaque étape et démarre au moins à 2, donc met au plus $n-3$ étapes à atteindre $n-1$). Par réversibilité, on a $Q^{n-3}(t_0, t') > 0$ pour tout $t' \in \mathscr{T}_n$, donc $Q^{2n-6}(t, t') > 0$ pour tous $t, t' \in \mathscr{T}_n$, et Q est bien irréductible.

3. D'après les deux questions précédentes, il suffit de déterminer si la chaîne (T_n) est apériodique. Pour $n = 4$, elle ne l'est pas. En effet, on vérifie facilement $|\mathscr{T}_4| = 2$, et on a $T_{n+1} \neq T_n$ pour tout n donc T est périodique de période 2.

   Soit maintenant $n \geq 5$. On a $Q^2(t, t) > 0$ pour tout t (flipper deux fois la "même" diagonale) donc la période de T vaut 1 ou 2. Par ailleurs, pour $n = 5$, on peut réaliser les opérations de la figure 1, ce qui montre qu'il existe t telle que $Q^5(t, t) > 0$. La période de la chaîne divise donc 5, donc elle vaut 1 et T est apériodique. Pour $n \geq 6$, il suffit d'isoler un pentagone et de faire les mêmes flips que sur la figure 1 à l'intérieur de ce pentagone pour obtenir le même résultat. On a donc convergence de T_k vers la mesure uniforme si et seulement si $n \geq 5$.

Remarque Si la chaîne obtenue n'est pas apériodique, une manière naturelle de la rendre apériodique est de la rendre "paresseuse", c'est-à-dire de lui donner à chaque étape une probabilité > 0 de ne pas bouger. Par exemple, avec probabilité p on a $T_{k+1} = T_k$, et avec probabilité $1 - p$ on flippe une arête uniforme.

Exercice 2 (Durée de vie des ampoules)
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$,
- $\mathrm{PGCD}\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique.
2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1,\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$
3. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice ?

Solution de l'exercice 2

1. On remarque (faire un dessin !) que, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0, \\ Y_{k+1} - 1 & \text{si } X_n = 0 \text{ et } n = Y_1 + ... + Y_k. \end{cases}$$

Sur l'événement $\{Y_1 + ... + Y_k = n\}$ (qui est dans $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$), les variables $X_0, ..., X_n$ sont $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-mesurables, et donc indépendantes de $X_{n+1} = Y_{k+1} - 1$. Sur l'événement $\{X_n \geq 1\}$, $X_{n+1} = X_n - 1$ p.s.. Cela implique que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q définie par

$$\begin{array}{lcll} Q(i, i-1) & = & 1 & \text{pour } i \geq 1 \\ Q(0, j) & = & \mathbb{P}(Y_1 = j+1) & \text{pour } j \geq 0 \\ Q(i, j) & = & 0 & \text{dans les autres cas}\,. \end{array}$$

Vérifions-le plus proprement. On a, pour tous $(x_0, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{N}$, si $x_n > 0$:

$$\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{n+1} \neq x_n - 1, \\ \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $x_n = 0$, d'après l'indépendance énoncée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}\right) &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, X_{n+1} = x_{n+1}\right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, Y_{k+1} = x_{n+1} + 1\right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n\right) \mathbb{P}\left(Y_{k+1} = x_{n+1} + 1\right) \\ &= \left(\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n\right)\right) \\ &\qquad \times \mathbb{P}\left(Y_1 = x_{n+1} + 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0\right) \mathbb{P}\left(Y_1 = x_{n+1} + 1\right). \end{aligned}$$

L'espace d'états de $(X_n)_{n \geq 0}$ est $S = \{0, \ldots, m\}$ si $m = \sup\{i \geq 0 | \mathbb{P}(Y_1 = i+1) > 0\} < +\infty$ et $S = \mathbb{N}$ sinon. On vérifie que $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible. Soient $i, j \in S$. Si $i > j$, alors $Q^{i-j}(i, j) = 1 > 0$. Si $i \leq j$, soit $\ell \geq j$ tel que $\mathbb{P}(Y_1 = \ell + 1) > 0$. Alors

$$Q^{i+\ell-j+1}(i, j) \geq Q^i(i, 0) Q(0, \ell) Q^{\ell-j}(\ell, j) > 0.$$

Enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$Q^n(0, 0) \geq \mathbb{P}(Y_1 = n)\,,$$

donc

$$L_0 := \{n \geq 1 \,|\, Q^n(0, 0) > 0\} \supset \{n \geq 1 \,|\, \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\}\,,$$

où ce dernier ensemble est de PGCD 1, donc 0 est de période 1, donc la chaîne est apériodique.

2. D'après la question précédente Q admet une unique mesure stationnaire ν, et X converge en loi vers ν. La limite qui nous intéresse est donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \nu(0).$$

On doit donc calculer ν. Pour tout i, on a

$$\nu(i) = \nu(i+1) + \nu(0) \mathbb{P}\left(Y_1 = i + 1\right),$$

d'où on déduit facilement, par récurrence sur i,

$$\nu(i) = \nu(0)\mathbb{P}(Y_1 > i).$$

On a donc

$$1 = \nu(0)\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}(Y_1 > i) = \nu(0)\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(Y_1 \geq i) = \nu(0)\mu,$$

donc $\nu(0) = \frac{1}{\mu}$, d'où le résultat.

3. Imaginons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ représente la durée de vie d'ampoules. Quand la k-ième ampoule ne fonctionne plus, on la remplace par la $(k+1)$-ième dont la durée de vie est Y_{k+1}. L'exercice montre qu'asymptotiquement, la probabilité d'avoir à changer une ampoule à l'instant n est l'inverse de la durée de vie moyenne des ampoules, ce qui est assez intuitif.

2 Fonds de tiroir

Exercice 3 (La fourmi et la montre)
Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. La fourmi s'arrête quand elle a visité tous les chiffres de la montre. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Solution de l'exercice 3 Notons d'abord que C existe bien p.s. car la fourmi finit forcément par faire 12 pas consécutifs vers la gauche (argument déjà vu en TD, par exemple exercice 6 du TD6), donc par visiter tous les chiffres de la montre. Pour tout $i \in \mathbb{Z}\backslash 12\mathbb{Z}$, on note T_i le premier temps auquel la fourmi découvre i. Pour tout $i \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C = i) &= \mathbb{P}(T_i > T_{i-1}, T_i > T_{i+1}) \\
&= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1} < T_i) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1} < T_i) \\
&= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1})\,\mathbb{P}(T_{i+1} < T_i | T_{i-1} < T_{i+1}) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1})\,\mathbb{P}(T_{i-1} < T_i | T_{i+1} < T_{i-1}).
\end{aligned}$$

Mais d'après la propriété de Markov forte, conditionnellement à $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$, la marche de la fourmi après T_{i-1} a la même loi qu'une marche aléatoire démarrée de $i-1$, donc $\mathbb{P}(T_{i+1} < T_i | T_{i-1} < T_{i+1})$ est égale à la probabilité qu'une marche démarrée en $i-1$ atteigne $i+1$ avant i. Par invariance par rotation, cette probabilité ne dépend pas de i, donc vaut $\mathbb{P}(T_2 < T_1)$. De même, on a

$$\mathbb{P}(T_{i-1} < T_i | T_{i+1} < T_{i-1}) = \mathbb{P}(T_{10} < T_{11}) = \mathbb{P}(T_2 < T_1),$$

où la dernière égalité s'obtient par symétrie. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C = i) &= \mathbb{P}(T_{i-1} < T_{i+1})\,\mathbb{P}(T_2 < T_1) + \mathbb{P}(T_{i+1} < T_{i-1})\,\mathbb{P}(T_2 < T_1) \\
&= \mathbb{P}(T_2 < T_1).
\end{aligned}$$

Comme cela ne dépend pas de i, on en déduit que C est bien uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.

Remarque On peut déduire de la fin de la preuve que $\mathbb{P}(T_2 < T_1) = \frac{1}{11}$, c'est-à-dire que pour la marche simple sur $\mathbb{Z}$ on a $\mathbb{P}(T_{-10} < T_1) = \frac{1}{11}$, résultat qu'on avait déjà obtenu par le théorème d'arrêt.

Exercice 4 (Un petit résultat technique utile)
Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. à valeurs entières. Pour tout $n \geq 0$, soient $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $S_n^* = \max\{|S_k||0 \leq k \leq n\}$. On se fixe $n \geq 0$, et $\varepsilon, A > 0$ tels que pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(|S_k| \geq A) \leq \varepsilon.$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(|S_n^*| \geq 2|A|) \leq 2\varepsilon.$$

Solution de l'exercice 4 Commençons par remarquer que S est une chaîne de Markov. Si on note $p_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$, sa matrice de transition est $Q(x,y) = p_{y-x}$.

Soit $\tau = \min\{k \geq 0 | |S_k| \geq 2A\}$. On applique la propriété de Markov forte au temps d'arrêt τ. La propriété de Markov forte nous dit que conditionnellement à $\mathcal{F}_\tau$, le processus $(S_{\tau+k})_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov issue de S_τ, de matrice de transition Q. Soit $\widetilde{S}$ le processus $(S_{\tau+k} - S_\tau)_{k\geq 0}$. La loi de $\widetilde{S}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_\tau$ est donc celle d'une chaîne de Markov issue de 0 et de matrice de transition Q. En particulier, cette loi ne dépend pas de $\mathcal{F}_\tau$, donc $\widetilde{S}$ est une copie de S, indépendante de $\mathcal{F}_\tau$.

L'idée de la preuve est maintenant la suivante : si $\tau \leq n$, alors soit $|S_n| \geq A$, ce qui arrive avec proba au plus ε, soit $|S_n| \leq A$, mais alors $|S_n - S_\tau| \geq A$, soit $|\widetilde{S}_{n-\tau}| \geq A$, ce qui arrive aussi avec proba au plus ε.

Plus précisément, si $\tau = k \leq n$, alors

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \leq A \middle| \mathcal{F}_\tau\right) \leq \mathbb{P}\left(|\widetilde{S}_{n-\tau}| \geq A \middle| \mathcal{F}_\tau\right) = \mathbb{P}\left(|\widetilde{S}_{n-k}| \geq A \middle| \mathcal{F}_\tau\right) \leq \varepsilon,$$

en utilisant notre hypothèse sur A et ε et le fait que la loi de $\widetilde{S}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_\tau$ est celle de S. On en déduit, en utilisant la définition de l'espérance conditionnelle sur $\mathcal{F}_\tau$:

$$\mathbb{P}(\tau \leq n, |S_n| \leq A) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tau \leq n} \mathbb{P}\left(|S_n| \leq A \middle| \mathcal{F}_\tau\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tau \leq n} \varepsilon\right] \leq \varepsilon.$$

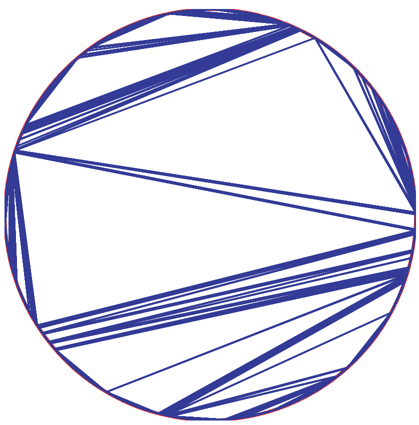
On a donc finalement :

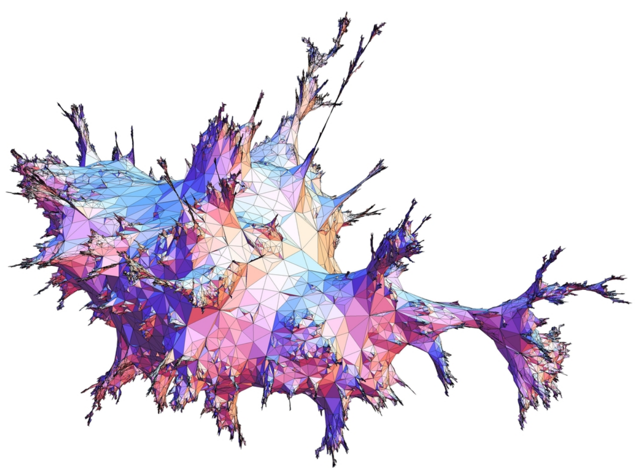
$$\mathbb{P}(\tau \leq n) \leq \mathbb{P}(|S_n| \geq A) + \mathbb{P}(\tau \leq n, |S_n| \leq A) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

en utilisant l'hypothèse de départ pour $k = n$.

3 Jolies images

Exercice 5 Que représentent les jolies images ci-dessous ?





Solution de l'exercice 5 L'image de gauche est une illustration de l'exercice 1. Plus précisément, c'est une triangulation aléatoire uniforme d'un n-gone, avec n grand (de l'ordre de 10000). L'image est d'Igor Kortchemski, vous pouvez trouver d'autres simulations d'objets aléatoires similaires sur sa page.

L'image de droite est aussi une triangulation choisie uniformément au hasard, mais cette fois-ci parmi les triangulations de la sphère, sans ordre naturel entre les sommets. Plus précisément, une triangulation de la sphère est une manière de découper la sphère en faces triangulaires, considérée à déformation près.

La triangulation de droite a été choisie uniformément parmi toutes les triangulations de la sphère à 32400 sommets. De telles triangulations peuvent aussi être simulées en flippant des arêtes choisies uniformément. Des images similaires (en couleur !) se trouvent sur ma page.

Exercice 6 Saurez-vous retrouver la subtile contrepèterie qui s'est cachée dans ce TD ?